M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 65 (1977), 157-182

SUR L'UNICITÉ DU CÔNE CONVEXE DIVISIBLE RELATIF AU NOYAU DE CONVOLUTION DE HUNT DÉFINI PAR L'OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL

MASAYUKI ITÔ

§1. Introduction

Dans toute la suite $\boldsymbol{R}^n$ désignera l'espace euclidien à dimension $n\,(\geqq 1)$. Pour un point $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$, on note $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ et la coordonnée sphérique dans $\boldsymbol{R}^n$ désignera (r, σ).

Rappelons qu'un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ est une mesure (de Radon) positive dans $\boldsymbol{R}^n$ dans la théorie du potentiel. Pour une mesure réelle μ dans $\boldsymbol{R}^n$, $N*\mu$ s'appelle le N-potentiel de μ dès que cette convolution est définie au sens des mesures. On connaît bien que, dans la théorie du potentiel, les noyaux de convolution de Hunt possédent les propriétés définitives.

Dans l'article [6], on a introduit la notion du cône convexe divisible (du cône convexe de Riesz) relatif au noyau de convolution de Hunt donné et on a montré, dans l'article [7], que pour un opérateur différentiel elliptique et auto-adjoint L d'ordre $\leqq 2$ sur $\boldsymbol{R}^n$ à coéfficients constants tel qu'il existe le noyau de convolution G_L sur $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini vérifiant $LG_L = -\varepsilon$ (au sens des distributions), où ε est la mesure d'unité à l'origine, un cône convexe divisible relatif au noyau G_L formé par 0 et de noyaux de convolution de Dirichlet sur $\boldsymbol{R}^n$ est uniquement déterminé et que cela est égal à

$$\left\{c\varepsilon + \int G_{L,p}d\nu(p)\,;\, c\in \boldsymbol{R}^+, \nu\in M^+(\boldsymbol{R}^+) \text{ avec} \int_1^\infty \frac{1}{p}\, d\nu(p) < +\infty\right\},$$

où $\boldsymbol{R}^+ = \{t\in \boldsymbol{R}^1\,;\, t\geqq 0\}$, $M^+(\boldsymbol{R}^+)$ est l'ensemble formé par toutes les mesures positives sur $\boldsymbol{R}^+$ et où $(G_{L,p})_{p\geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau G_L.

Le but de cette note est une généralisation de ce résultat. Soit L

Received October 22, 1974.

un opérateur différentiel elliptique d'ordre $\leqq 2$ sur $\boldsymbol{R}^n$ à coéfficients constants tel qu'il existe le noyau de convolution de Hunt G_L sur $\boldsymbol{R}^n$ à $LG_L = -\varepsilon$. Alors un cône convexe divisible relatif au noyau G_L est toujours unique et cela est de la même forme que ci-dessus.

Rappelons finalement la définition d'un cône convexe divisible $C_R(N_0)$ relatif au noyau de convolution de Hunt donné N_0 sur $\boldsymbol{R}^n$: $C_R(N_0)$ est un cône convexe vaguement fermé de vertex 0 constitué par 0 et de noyaux de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$ et vérifiant

(a) $N_0 \in C_R(N_0)$,

(b) À tout l'élément $N \neq 0$ de $C_R(N_0)$, on peut associer un élément $N' \neq 0$ de $C_R(N_0)$ tel que $N * N' = N_0$.

On remarque que, dans ce cas, N' est uniquement déterminé.

§ 2. Préliminaires

D'après C. S. Herz [3], on dit qu'une distribution u dans $\boldsymbol{R}^n$ est conditionnellement positive si $u \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine. Rappelons que toute la distribution est localement d'ordre fini et posons, pour un entier $k \geqq 1$,

$$\mathcal{O}^k(\boldsymbol{R}^n) = \{f \in C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n)\,;\, D^\alpha f(0) = 0 \text{ pour tout le multi-indice } \alpha \text{ à } |\alpha| < k\},$$

où $C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ est l'espace de (LF) usuel des fonctions infiniment dérivables dans R^n à valeurs complexes et à support compact et où, pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Alors on obtient qu'une distribution u est conditionnellement positive si et seulement s'il existe un entier $k \geqq 1$ tel que u soit k-conditionnellement positive; c'est-à-dire, quelle que soit φ de $\mathcal{O}^k(\boldsymbol{R}^n)$, $u(|\varphi|^2) \geqq 0$. Pour un entier $k \geqq 1$, on note $CP^k = CP^k(\boldsymbol{R}^n)$ l'ensemble constitué par toutes les distributions k-conditionnelement positives dans $\boldsymbol{R}^n$, et alors, d'après $\mathcal{O}^k(\boldsymbol{R}^n) \supset \mathcal{O}^{k+1}(\boldsymbol{R}^n)$, $CP^k \subset CP^{k+1}$. On note ensuite $CP = \bigcup_{k=1}^\infty CP^k$. Soit $u \in CP^k$ et supposons que u est à croissance lente. On a alors, pour toute φ de $\mathcal{O}^k(R^n)$,

$$\hat{u} * \hat{\varphi} * \tilde{\hat{\varphi}}(0) = u(|\varphi|^2) \geqq 0\ ,$$

où $\wedge$ représente la transformation de Fourier et $\tilde{\hat{\varphi}}(x) = \overline{\hat{\varphi}(-x)}$. Posons, pour un entier $k \geqq 1$,

$$\hat{\mathcal{O}}^k(\boldsymbol{R}^n) = \left\{\varphi \in C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n)\,;\, \int x^\alpha \varphi(x) dx = 0 \text{ pour tout le multi-indice } \alpha \text{ à } |\alpha| < k\right\},$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

où, pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. On dit, d'après [3], qu'une distribution v dans $\boldsymbol{R}^n$ est k-conditionnellement de type positif si, quelle que soit φ de $\hat{\mathscr{O}}^k(\boldsymbol{R}^n)$, $v * \varphi * \tilde{\varphi}(0) \geqq 0$. On note $CTP^k = CTP^k(\boldsymbol{R}^n)$ la totalité des distributions k-conditionnellement de type positif dans $\boldsymbol{R}^n$, et alors $CTP^k \subset CTP^{k+1}$. On pose $CTP = \bigcup_{k=1}^{\infty} CTP^k$ et toute la distribution appartenant à CTP est simplement dite conditionnellement de type positif. On obtient facilement la proposition suivante (cf. [3]).

PROPOSITION 1. *Soit k un entier $\geqq 1$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents.*

(1) $v \in CTP^k$.

(2) $v = \hat{u}$, *où* $u \in CP^k$ *et* u *est à croissance lente.*

Donc on obtient facilement que $v \in CTP$ si et seulement si $v = \hat{u}$, où u est conditionnellement positive (c'est-à-dire, $u \in CP$) et à croissance lente. C. S. Herz a montré que toute la fonction de $\hat{\mathscr{O}}^k$ est de la forme explicite suivante (cf. [3]).

PROPOSITION 2. *Pour un entier $k \geqq 1$, $\mathscr{O}^k$ est un idéal de convolution de $C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ et on a*

$$\hat{\mathscr{O}}^k = \hat{\mathscr{O}}^k(\boldsymbol{R}^n) = \left\{ \sum_{|\alpha| = k} D^\alpha g_\alpha \,;\, g_\alpha \in C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n) \right\} .$$

Soit u une distribution dans $\boldsymbol{R}^n$. On dit que u est un laplacien généralisé sur $\boldsymbol{R}^n$ si l'on a, quelle que soit φ de $C_K^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $u(\varphi) \leqq 0$ dès que φ est à valeurs réelles et $\varphi(0) = \max_{v \in \boldsymbol{R}^n} \varphi(x)$, et alors $u \in CP^1$.

PROPOSITION 3 (cf. par exemple, [3]). *Soit u une distribution dans $\boldsymbol{R}^n$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *u est un laplacien généralisé sur $\boldsymbol{R}^n$.*

(2) *-$\hat{u}$ est égale à une fonction définie-négative ψ dans $\boldsymbol{R}^n$.*

(3) *Il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ de mesures positives dans $\boldsymbol{R}^n$ à $\int d\alpha_t \leqq 1$ $(\forall t \geqq 0)$ tel que $\frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)$ converge vers u dans $\boldsymbol{R}^n$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$ lorsque $t \to 0$.*

Une fonction définie-négative ψ dans $\boldsymbol{R}^n$ est, par définition, une fonction complexe et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

(a) $\psi(0) \geqq 0$ et $\psi(-x) = \overline{\psi(x)}$ pour tout x de $\boldsymbol{R}^n$.

(b) Quels que soient m un entier $\geqq 1$, $(x^i)_{i=1}^m$ et $(c_i)_{i=1}^m$, une famille de points de $\boldsymbol{R}^n$ et une famille de nombres complexes à $\sum_{i=1}^m c_i = 0$,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \psi(x^i - x^j) c_i \bar{c}_j \leqq 0 .$$

D'après le théorème de Levy-Khinchine, pour une fonction définie-négative ψ dans $\boldsymbol{R}^n$, il existe une famille d'une constante $c \geqq 0$, d'une forme linéaire $L(x)$ sur $\boldsymbol{R}^n$, d'une forme quadratique $Q(x) \geqq 0$ sur $\boldsymbol{R}^n$ et d'une mesure positive α en dehors de l'origine à $\int \frac{|x|^2}{1+|x|^2} d\alpha(x) < +\infty$, et une seule telle que l'on ait

$$\begin{aligned}\psi(x) &= c + L(x)\sqrt{-1} + Q(x) \\ &\quad + \int\left(1 - \exp\left(2\pi\sqrt{-1}x\cdot y\right) - \frac{2\pi x\cdot y\sqrt{-1}}{1+x^2}\right) d\alpha(y) \text{ sur } \boldsymbol{R}^n ,\end{aligned}$$

où $x \cdot y$ est le produit scalaire entre x et y sur $\boldsymbol{R}^n$.

Une famille $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ de mesures positives dans $\boldsymbol{R}^n$ s'appelle un semi-groupe vaguement continu si l'on a, pour tous $t \geqq 0$, $s \geqq 0$, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$, $\alpha_0 = \varepsilon$ et si l'application $t \in \boldsymbol{R}^+ \to \alpha_t$ est vaguement continue.

Dans la proposition 3, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est uniquement déterminé et on a $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$ sur $\boldsymbol{R}^n$.

Un noyau de convolution de Hunt N sur $\boldsymbol{R}^n$ est, par définition, de la forme $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$, où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu de mesures positives dans $\boldsymbol{R}^n$. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est unique et s'appelle le semi-groupe associé au noyau N.

PROPOSITION 4 (cf. [1] et [4]). *Soit* $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$ *un noyau de convolution de Hunt sur* $\boldsymbol{R}^n$. *Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *Il existe un nombre* $t_0 > 0$ *tel que* $\int d\alpha_{t_0} \leqq 1$.

(2) *Pour tout* $t \geqq 0$, $\int d\alpha_t \leqq 1$.

(3) *Il existe un laplacien généralisé* u *dans* $\boldsymbol{R}^n$ *tel que* $u * N = -\varepsilon$ *dans* $\boldsymbol{R}^n$.

(4) N *est borné*[1].

[1] Cela signifie que, quelle que soit f une fonction finie et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact, $N * f$ est bornée sur $\boldsymbol{R}^n$.

(5) *N est de type positif au sens faible*[2].

Dans ce cas, u est uniquement déterminé et s'appelle le laplacien généralisé relatif au noyau N.

Soient N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et $(N_p)_{p\geqq 0}$ une famille de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. On dit que $(N_p)_{p\geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N si l'on a, pour tous $p \geqq 0$, $q > 0$, $N_p - N_q = (q-p)N_p * N_q$ et $\lim_{p\to 0} N_p = N_0 = N$ (vaguement). Il est naturel que $(N_p)_{p\geqq 0}$ est unique. Si N est un noyau de convolution sur R^n de la forme $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$, alors, en posant $N_p = \int_0^\infty \alpha_t \exp(-pt)dt$ $(\forall p \geqq 0)$, $(N_p)_{p\geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N. Cela résulte facilement du fait que lorsque l'on pose

$$\kappa = \begin{cases} dt \text{ sur } \boldsymbol{R}^+ \\ 0 \text{ dans } \boldsymbol{R}^1 - \boldsymbol{R}^+ \end{cases} \quad \text{et} \quad \kappa_p = \begin{cases} \exp(-pt)dt \text{ sur } \boldsymbol{R}^+ \\ 0 \qquad\qquad \text{dans } \boldsymbol{R}^1 - \boldsymbol{R}^+ \end{cases} \quad (\forall p > 0)\ ,$$

$(\kappa_p)_{p\geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau κ. Le théorème de Bernstein (cf. par exemple, [8]) affirme la proposition suivante:

PROPOSITION 5. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *Pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m \dfrac{d^m}{dt^m}N$ est de $CP(\boldsymbol{R}^1)$ et $N = 0$ dans $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}^+$.*

(2) *N est de la forme $N = c\varepsilon + \int \kappa_p d\nu(p)$, où $c \in \boldsymbol{R}^+$ et $\nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$ à $\int_1^\infty \dfrac{1}{p} d\nu(p) < +\infty$.*

On remarque ici que pour une mesure positive ν sur $\boldsymbol{R}^+$, $\int \kappa_p d\nu(p)$ définit un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$ si et seulement si $\int_1^\infty \dfrac{1}{p} d\nu(p) < +\infty$, car

$$\int_0^1 \int \exp(-pt)d\nu(p)dt = \int \frac{1}{p}(1 - \exp(-p))d\nu(p)\ .$$

[2] Cela signifie que, quelle que soit f une fonction finie et continue dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact, $N * f * \check{f}(0) \geqq 0$, où $\check{f}(x) = f(-x)$. Dans ce cas, N n'est pas toujours symétrique par rapport à l'origine.

Soient $\tilde{N}, N$ et $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p}\in \bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m}$ deux noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et une famille de noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. On dit que $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p}\in \bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m}$ est la classe divisible associée au noyau N relativement au noyau $\tilde{N}$ si $(N_{(p)})_{p\in \boldsymbol{R}^+}$ est la résolvante associée au noyau N et si, pour tout $\tilde{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ de $\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m$, $N_{\tilde{p}} * N_{(p_1,p_2,\cdots,p_m,0)} = \tilde{N}$ et $(N_{(p_1,p_2,\cdots,p_m,p)})_{p\in \boldsymbol{R}^+}$ est aussi la résolvante associée au noyau $N_{(p_1,\cdots,p_m,0)}$.

PROPOSITION 6. *Soient $\tilde{N}$ et N deux noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ et supposons $\tilde{N} \neq 0$. S'il existe la classe divisible $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p}\in \bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m}$ associée au noyau N relativement au noyau $\tilde{N}$, alors elle est uniquement déterminée et pour tout $\tilde{p}$ de $\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m$, $N_{\tilde{p}}$ est un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$.*

Pour tout $\tilde{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ de $\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m$, on a $N_{\tilde{p}} * N_{(p_1,\cdots,p_m,0)} = \tilde{N}$, et par suite, d'après $\tilde{N} \neq 0$, $N_{\tilde{p}} \neq 0$. Donc cette proposition résulte immédiatement de la proposition suivante connue et du principe d'unicité pour les noyaux de convolution de Hunt[3].

PROPOSITION 7 (cf. [5]). *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. Alors pour que N soit un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$, il faut et il suffit que $N \neq 0$ et il existe la résolvante associée au noyau N.*

§ 3. Quelques lemmes

Commençons d'abord avec la définition du principe relatif de domination. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$. On dit que N_1 satisfait au principe de domination relatif au noyau N_2 si, quelles que soient f et g de C_K^+, $N_1 * f(x) \leqq N_2 * g(x)$ sur $\boldsymbol{R}^n$ dès que $N_1 * f(x) \leqq N_2 * g(x)$ sur le support supp (f) de f. Dans cette note, on note toujours $C_K = C_K(\boldsymbol{R}^n)$ et $C_K^+ = C_K^+(\boldsymbol{R}^n)$ l'espace de (LF) usuel des fonctions finies et continues dans $\boldsymbol{R}^n$ à support compact et son sous-ensemble des fonctions non-négatives, respectivement.

LEMME 1. *Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution $\neq 0$ sur $\boldsymbol{R}^n$. Si N_1 satisfait au principe de domination relatif au noyau N_2, alors on a* supp (N_1) + supp $(N_2) \subset$ supp (N_2).

(3) Un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ satisfait au principe d'unicité si, quelle que soit μ une mesure réelle dans $\boldsymbol{R}^n$, $\mu = 0$ dès que $N * \mu$ a un sens et $N * \mu = 0$.

Dans ce cas, la signe $+$ signifie la somme vectorielle dans $\boldsymbol{R}^n$. Voyons le lemme 1. Pour toute f de C_K^+ et pour toute g de C_K^+ à $\operatorname{supp}(g) \subset \{x \in \boldsymbol{R}^n\,;\, N_2 * f(x) > 0\}$. Alors il existe une constante $c_g > 0$ telle que $N_1 * g(x) \leqq c_g N_2 * f(x)$ sur $\operatorname{supp}(g)$, et par suite cette inégalité a lieu sur $\boldsymbol{R}^n$, d'où $\operatorname{supp}(N_1) + \operatorname{supp}(g) = \operatorname{supp}(N_1 * g) \subset \operatorname{supp}(N_2 * f)$. La fonction g étant quelconque, on obtient $\operatorname{supp}(N_1) + \operatorname{supp}(N_2 * f) \subset \operatorname{supp}(N_2 * f)$. La fonction f étant aussi quelconque, on obtient $\operatorname{supp}(N_1) + \operatorname{supp}(N_2) \subset \operatorname{supp}(N_2)$, d'où le lemme 1.

Dans le présent lemme, si $\operatorname{supp}(N_2) \ni 0$, alors $\operatorname{supp}(N_1) \subset \operatorname{supp}(N_2)$.

COROLLAIRE 1. *Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$ et N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ à* $\operatorname{supp}(N) \ni 0$. *S'il existe une mesure positive μ dans $\boldsymbol{R}^n$ telle que $N = N_0 * \mu$, alors* $\operatorname{supp}(N_0) \subset \operatorname{supp}(N)$.

En effet, on connaît bien que N_0 satisfait au principe de domination (c'est-à-dire, au principe de domination relatif à lui-même), et donc N_0 satisfait au principe de domination relatif au noyau N, d'où $\operatorname{supp}(N_0) \subset \operatorname{supp}(N)$.

De la même manière que dans § 2, on pose, pour une constante réelle a,

$$\kappa_a = \begin{cases} \exp(-at)dt & \text{sur } \boldsymbol{R}^+ \\ 0 & \text{dans } \boldsymbol{R}^1 - \boldsymbol{R}^+ \,. \end{cases}$$

Alors κ_a est un unique noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^1$ tel que, au sens des distributions, $\left(\dfrac{d}{dt} + a\right)\kappa_a = \varepsilon$.

LEMME 2. *Soient a une constante réelle et N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$. Alors les trois énoncés suivants sont équivalents:*

(1) *Pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m\left(\dfrac{d}{dt} + a\right)^m N$ est de $CP(\boldsymbol{R}^1)$ et N satisfait au principle de domination relatif au noyau κ_a.*

(2) *N est de la forme*

$$N = c\varepsilon + \int \kappa_p d\nu(p) \,,$$

où $c \in \boldsymbol{R}^+$ et ν est une mesure positive sur $[a, +\infty)$ à $\displaystyle\int_{a+1}^{\infty} \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

(3) *Il existe la classe divisible* $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p}\in \bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m}$ *associée au noyau* N *relativement au noyau* κ_a.

Montrons d'abord l'implication (1) ⇨ (2). D'après le lemme 1, on a $\operatorname{supp}(N) \subset \operatorname{supp}(\kappa_a) = \boldsymbol{R}^+$. Soit N_a le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$ défini par $dN_a = \exp(at)dN(t)$. Alors, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\dfrac{d^m}{dt^m}N_a = \exp(at)\left(\dfrac{d}{dt} + a\right)^m N$. Donc, d'après la proposition 5, il existe uniquement une constante $c \geqq 0$ et une mesure positive ν' sur $\boldsymbol{R}^+$ à $\int_1^\infty \frac{1}{p}d\nu'(p) < +\infty$ telles que $N_a = c\varepsilon + \int \kappa_p d\nu'(p)$. Soit ν la mesure positive obtenue de ν' par la translation de a; alors on obtient que N est de la forme dans (2).

Montrons ensuite l'implication (2) ⇨ (3). Il est déjà connu, dans [6], que pour une constante $c \geqq 0$ et pour une mesure positive ν sur $\boldsymbol{R}^+$ à $\int_1^\infty \frac{1}{p}d\nu(p) < +\infty$, il existe uniquement une constante $c' \geqq 0$ et une mesure positive ν' sur $\boldsymbol{R}^+$ à $\int_1^\infty \frac{1}{p}d\nu'(p) < +\infty$ telles que

$$\left(c\varepsilon + \int \kappa_p d\nu(p)\right) * \left(c'\varepsilon + \int \kappa_p d\nu'(p)\right) = \kappa\ .$$

On connaît aussi, d'après [6], que pour les mêmes c, ν que ci-dessus, il existe la résolvante $(\tilde{N}_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau $c\varepsilon + \int \kappa_p d\nu(p)$ et que $\tilde{N}_p$ est de la forme $\tilde{N}_p = c_p\varepsilon + \int \kappa_q d\nu_p(q)$ $(\forall p \geqq 0)$, où $c_p \in \boldsymbol{R}^+$ et $\nu_p \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$ à $\int_1^\infty \frac{1}{q}\, d\nu_p(q) < +\infty$.

Soit $N = c\varepsilon + \int \kappa_p d\nu(p)$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$ donné dans (2), et posons $N_a = c\varepsilon + \int \kappa_p d\tau_{-a}\nu(p)$, où $\tau_{-a}\nu$ est la mesure positive obtenue de ν par la translation de $-a$. Alors il existe la classe divisible $(N_{a,\tilde{p}})_{\tilde{p}\in \bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m}$ associée au noyau N_a relativement au noyau κ, et pour tout $\tilde{p}$, $N_{a,\tilde{p}}$ est de la forme $N_{a,\tilde{p}} = c_{a,\tilde{p}}\varepsilon + \int \kappa_p d\nu_{a,\tilde{p}}(p)$, où $c_{a,\tilde{p}} \in \boldsymbol{R}^+$ et

$\nu_{a,\tilde{p}} \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$ à $\int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu_{a,\tilde{p}}(p) < +\infty$. Soit $\nu_{\tilde{p}}$ la mesure positive obtenue de $\nu_{a,\tilde{p}}$ par la translation de a et posons

$$N_{\tilde{p}} = c_{\tilde{p}}\varepsilon + \int \kappa_p d\nu_{\tilde{p}}(p) ,$$

où $c_{\tilde{p}} = c_{a,\tilde{p}}$. Alors on peut montrer facilement que $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m}$ est la classe divisible associée au noyau N relativement au noyau κ_a.

Montrons finalement l'implication (3)$\Rightarrow$(1). Pour tout $\tilde{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ de $\bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m$, on a d'abord, d'après la proposition 6 et le corollaire 1, $\text{supp}\,(N_{\tilde{p}}) \subset \text{supp}\,(\kappa_a) = \boldsymbol{R}^+$. On a ensuite

$$\left(\left(\frac{d}{dt} + a\right) N_{\tilde{p}}\right) * N_{(p_1, \cdots, p_m, 0)} = \varepsilon$$

et

$$\lim_{p \to \infty} p(\varepsilon - pN_{(p_1, \cdots, p_m, p)}) * N_{(p_1, \cdots, p_m, 0)} = \varepsilon$$

vaguement dans $\boldsymbol{R}^1$, car $N_{(p_1, \cdots, p_m, 0)}$ est un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^1$. Donc on peut montrer facilement que $(p(\varepsilon - pN_{(p_1, \cdots, p_m, p)}))_{p>0}$ converge vers $\left(\frac{d}{dt} + a\right) N_{\tilde{p}}$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^1$ lorsque $p \to +\infty$. Par conséquent, $(-1)\left(\frac{d}{dt} + a\right) N_{\tilde{p}}$ est de $CP(\boldsymbol{R}^1)$.

Soit k un entier $\geqq 1$ et supposons que, quel que soit $\tilde{p}$ de $\bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m$, $(-1)^k \left(\frac{d}{dt} + a\right)^k N_{\tilde{p}}$ est de $CP(\boldsymbol{R}^1)$. Pour tout $\tilde{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ de $\bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m$, on a

$$\lim_{p \to \infty} p(pN_{(p_1, \cdots, p_m, p)} - \varepsilon) = (-1)\left(\frac{d}{dt} + a\right) N_{\tilde{p}}$$

au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^1$, et par suite on obtient la famille

$$\left(p(-1)^k \left(\frac{d}{dt} + a\right)^k N_{(p_1, \cdots, p_m, p)} - (-1)^k \left(\frac{d}{dt} + a\right)^k \varepsilon\right)_{p>0}$$

converge vers $(-1)^{k+1} \left(\frac{d}{dt} + a\right)^{k+1} N_{\tilde{p}}$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^1$

lorsque $p \to +\infty$. D'après notre hypothèse, $(-1)^{k+1}\left(\frac{d}{dt}+a\right)^{k+1} N_{\tilde{p}}$ est de $CP(\boldsymbol{R}^1)$, et par suite on obtient, par récurrence, (3) $\Rightarrow$ (1).

Considérons ensuite un opérateur différentiel elliptique d'ordre $\leqq 2$ sur $\boldsymbol{R}^n$ à coéfficients constants. On dit, d'après [6] et [7], qu'un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ est complètement L-sous-harmonique si, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $L^m N$ est de $CP(\boldsymbol{R}^n)$, où $L^0 N = N, L^1 = L$ et $L^{m+1} = L^m L$.

LEMME 3. *Soient* $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$ *un opérateur différentiel elliptique sur* $\boldsymbol{R}^n$ *à coéfficients constants,* $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n)$ *un point fixé de* $\boldsymbol{R}^n$ *et* N *un noyau de convolution sur* $\boldsymbol{R}^n$*. On désigne par* $N^{(\tilde{a})}$ *le noyau de convolution sur* $\boldsymbol{R}^n$ *défini par* $dN^{(\tilde{a})} = \exp(-\tilde{a}\cdot x) dN(x)$. *Si* N *est complètement* L*-sous-harmonique, alors* $N^{(\tilde{a})}$ *est aussi complètement* $L_{\tilde{a}}$*-sous-harmonique, où*

$$L_{\tilde{a}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\tilde{a}_i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+\tilde{a}_j\right) + \sum_{i=1}^n b_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\tilde{a}_i\right) + c\ .$$

En effet, on a, pour tout i avec $1 \leqq i \leqq n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\tilde{a}_i\right) N^{(\tilde{a})} = \exp(-\tilde{a}\cdot x)\frac{\partial}{\partial x_i} N$$

au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$, et donc on peut montrer, par récurrence, $N^{\tilde{a}}$ est complètement $L_{\tilde{a}}$-sous-harmonique.

On notera $S_{1,0}$ la sphère d'unité de centre 0.

LEMME 4. *Soient* a *une constante* $\geqq 0$ *et* $L = \Delta - a$, *où* Δ *est le laplacien ordinaire sur* $\boldsymbol{R}^n$*. Si un noyau de convolution* N *sur* $\boldsymbol{R}^n$ *est de masse totale finie et complètement* L*-sous-harmonique, alors il existe uniquement une constante* $c \geqq 0$ *et deux familles* $(\alpha_\sigma^{(1)})_{\sigma \in S_{1,0}}$, $(\alpha_\sigma^{(2)})_{\sigma\in S_{1,0}}$ *de mesures positives sur* $[\sqrt{a}, +\infty)$ *telle que la transformée de Fourier* $\hat{N}$ *de* N *soit de la forme*

$$\hat{N}(x) = \hat{N}(r, \sigma) = c + \int \frac{1}{p + 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(1)}(p) + \int \frac{1}{p - 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(2)}(p)\ .$$

En effet, d'après la proposition 1, pour tout l'entier $m \geqq 0$, la distribution $(-1)^m(4\pi^2|x|^2 + a)\hat{N}(x)dx$ dans $\boldsymbol{R}^n$ est de CTP. Posons, pour un point σ de $S_{1,0}$,

$$\psi_\sigma(t) = \begin{cases} \hat{N}(t, \sigma) & \text{si } t \geqq 0 \\ \hat{N}(-t, -\sigma) & \text{si } t < 0 \end{cases};$$

alors ψ_σ est finie, continue et de type positif dans $\boldsymbol{R}^1$. En considérant une certaine rotation de N, on obtient que, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m(4\pi^2|t|^2 + a)^m\psi_\sigma(t)dt$ est de $CTP(\boldsymbol{R}^1)$ (cf. le corollaire 1 dans [7]). Soit κ_σ un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$ de masse totale finie tel que $\hat{\kappa}_\sigma = \psi_\sigma$. En utilisant encore la proposition 1, on a, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\left(\frac{d^2}{dt^2} - a\right)^m \kappa_\sigma \in CP(\boldsymbol{R}^1)$, et par suite $\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\kappa_\sigma$ est encore de $CP(\boldsymbol{R}^1)$ (cf. par exemple, le lemme 5 dans [7]). Ayant $\int d\kappa_\sigma < +\infty$, on obtient facilement que, pour tout l'entier $m \geqq 1$, $\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}}\kappa_\sigma \leqq 0$ au sens des distributions dans $(0, +\infty)$ et $\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}}\kappa_\sigma \geqq 0$ au sens des distributions dans $(-\infty, 0)$. Donc il existe une constante $c_\sigma \geqq 0$, une fonction sommable $k_\sigma(t) \geqq 0$ dans $\boldsymbol{R}^1$ et deux fonctions infiniment derivables $\varphi_{1,\sigma} \geqq 0$, $\varphi_{2,\sigma} \geqq 0$ telles que $\kappa_\sigma = c_\sigma\varepsilon + k_\sigma(t)dt$, $k_\sigma(t) = \varphi_{1,\sigma}(t)$ presque partout (noté p.p.) dans $(0, +\infty)$, $k_\sigma(t) = \varphi_{2,\sigma}(-t)$ p.p. dans $(-\infty, 0)$ et pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\varphi_{i,\sigma}(t) \geqq 0$ dans $(0, +\infty)$ $(i = 1, 2)$. D'après le théorème de Bernstein, il existe une mesure positive $\alpha_{i,\sigma}$ sur $\boldsymbol{R}^+$, et une seule telle que l'on ait

$$\varphi_{i,\sigma}(t) = \int \exp(-pt)d\alpha_{i,\sigma}(p) \quad \text{dans} \quad (0, +\infty) \qquad (i = 1, 2)\,.$$

Ayant $\int_0^\infty \varphi_{i,\sigma}(t)dt < +\infty$, on a $\alpha_{i,\sigma}(\{0\}) = 0$ et $\int_0^\infty \frac{1}{p}d\alpha_{i,\sigma}(p) < +\infty$. Comme

$$(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{d^2}{dt^2} - a\right)\varphi_{i,\sigma}(t) \geqq 0 \quad \text{dans} \quad (0, +\infty)\,,$$

la mesure $(p^2 - a)d\alpha_{i,\sigma}(p)$ doit être positive sur $\boldsymbol{R}^+$, d'après le théorème de Bernstein, d'où $\operatorname{supp}(\alpha_{i,\sigma}) \subset [\sqrt{a}, +\infty)$ $(i = 1, 2)$. On a ensuite, pour tout $r \geqq 0$,

$$\hat{N}(r, \sigma) = \psi_\sigma(r) = c_\sigma + \int_0^\infty \int \exp(-(p + 2\pi\sqrt{-1}r)s)d\alpha_{1,\sigma}(p)ds$$

$$+\int_0^\infty \int \exp(-(p-2\pi\sqrt{-1}r)s)d\alpha_{2,\sigma}(p)ds\,.$$

Donc, d'après le théorème de Fubini,

$$\hat{N}(r,\sigma)=c_\sigma+\int\frac{1}{p+2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_{1,\sigma}(p)+\int\frac{1}{p-2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_{2,\sigma}(p)\,.$$

On a évidemment, pour tout σ de $S_{1,0}$, $c_\sigma=N(\{0\})$. En posant $c=c_\sigma$, $\alpha_\sigma^{(1)}=\alpha_{1,\sigma}$ et $\alpha_\sigma^{(2)}=\alpha_{2,\sigma}$, on obtient une constante c et deux familles $(\alpha_\sigma^{(1)})_{\sigma\in S_{1,0}}$, $(\alpha_\alpha^{(2)})_{\sigma\in S_{1,0}}$ demandées.

Soient c', $(\alpha_\sigma^{(3)})_{\sigma\in S_{1,0}}$ et $(\alpha_\sigma^{(4)})_{\sigma\in S_{1,0}}$ une autre constante $\geqq 0$ et deux familles de mesures positives sur $[\sqrt{a}, +\infty)$ telles que

$$\hat{N}(r,\sigma)=c'+\int\frac{1}{p+2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_\sigma^{(3)}(p)+\int\frac{1}{p-2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_\sigma^{(4)}(p)\,.$$

Ayant $c'=N(\{0\})$, on a $c=c'$. En considérant la transformation inverse de Fourier, on a

$$\int\exp(-pt)d\alpha_\sigma^{(i)}(p)=\int\exp(-pt)d\alpha_\sigma^{(i+2)}(p)\quad\text{dans}\quad(0,+\infty)\qquad(i=1,2)\,,$$

et par suite, pour tout σ de $S_{1,0}$, $\alpha_\sigma^{(1)}=\alpha_\sigma^{(3)}$ et $\alpha_\sigma^{(2)}=\alpha_\sigma^{(4)}$. La démonstration est ainsi complète.

LEMME 5. *Soient a et L les mêmes que ci-dessus; supposons qu'un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$ est complètement L-sous-harmonique et que, pour tout l'entier $m\geqq 0$, $\int_{|x|>0}d(L^mN)<+\infty$. Soit $N^{(m)}$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ defini par $\int f dN^{(m)}=\int_{|x|>0}f(x)d(L^mN)(x)$ pour toute $f\in C_k$, et soient $(\alpha_\sigma^{(1)})_{\sigma\in S_{1,0}}$ et $(\alpha^{(2)})_{\sigma\in S_{1,0}}$ les deux familles des mesures positives sur $[\sqrt{a}, +\infty)$ obtenues dans le présent lemme pour N. Alors, pour tout l'entier $m\geqq 0$, $\int\frac{(p^2-a)^m}{p}d\alpha_\sigma^{(1)}(p)<+\infty$, $\int\frac{(p^2-a)^m}{p}d\alpha_\sigma^{(2)}(p)<+\infty$ et*

$$\widehat{N^{(m)}}(r,\sigma)=\int\frac{(p^2-a)^m}{p+2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_\sigma^{(1)}(p)+\int\frac{(p^2-a)^m}{p-2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_\sigma^{(2)}(p)\,.$$

En effet, d'après le lemme 4,

$$\widehat{N^{(0)}}(r,\sigma)=\int\frac{1}{p+2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_\sigma^{(1)}(p)+\int\frac{1}{p-2\pi\sqrt{-1}r}d\alpha_\sigma^{(2)}(p)\,,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

$\int_0^\infty \frac{1}{p}\, d\alpha_\sigma^{(1)}(p) < +\infty$ et $\int_0^\infty \frac{1}{p} d\alpha_\sigma^{(2)}(p) < +\infty$. Il suffit de montrer

$$\widehat{N^{(1)}}(r, \sigma) = \int \frac{p^2 - a}{p + 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(1)}(p) + \int \frac{p^2 - a}{p - 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(2)}(p) ,$$

car si c'est vrai, il résulte de l'inégalité $\int dN^{(1)} < +\infty$ et du lemme 4 que, pour tout σ de $S_{1,0}$, $\int_0^\infty \frac{p^2 - a}{p} d(\alpha_\sigma^{(1)} + \alpha_\sigma^{(2)})(p) < +\infty$, et on peut montrer, par récurrence, notre lemme. On a

$$\begin{aligned} \widehat{LN^{(0)}}(r, \sigma) = &\int \Big(\frac{p^2 - a}{p + 2\pi\sqrt{-1}r} - p + 2\pi\sqrt{-1}r\Big) d\alpha_\sigma^{(1)}(p) \\ &+ \int \Big(\frac{p^2 - a}{p - 2\pi\sqrt{-1}r} - p - 2\pi\sqrt{-1}r\Big) d\alpha_\sigma^{(2)}(p) . \end{aligned}$$

Posons, pour un point σ de $S_{1,0}$,

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} \widehat{LN^{(0)}}(t, \sigma) & \text{si } t \geqq 0 \\ \widehat{LN^{(0)}}(-t, -\sigma) & \text{si } t < 0 \end{cases} ;$$

alors $\varphi_\sigma(t)dt$ est de $CTP(\boldsymbol{R}^1)$. Soit u_σ la distribution dans $\boldsymbol{R}^1$ telle que $\hat{u}_\sigma = \varphi_\sigma(t)dt$ (cf. la proposition 1). On a alors

$$u_\sigma = \begin{cases} \Big(\int \exp(-pt)(p^2 - a) d\alpha_\sigma^{(1)}(p)\Big) dt & \text{dans } (0, +\infty) \\ \Big(\int \exp(pt)(p^2 - a) d\alpha_\sigma^{(2)}(p)\Big) dt & \text{dans } (-\infty, 0) \end{cases} .$$

D'autre part, $N^{(1)}$ étant complètement L-sous-harmonique et ayant $\int dN^{(1)} < +\infty$ et $N^{(1)}(\{0\}) = 0$, on obtient, d'après le lemme 4, qu'il existe uniquement deux familles $(\alpha_{\sigma,1}^{(1)})_{\sigma \in S_{1,0}}$ et $(\alpha_{\sigma,1}^{(2)})_{\sigma \in S_{1,0}}$ de mesures positives sur $[\sqrt{a}, +\infty)$ telles que

$$\widehat{N^{(1)}}(r, \sigma) = \int \frac{1}{p + 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_{\sigma,1}^{(1)}(p) + \int \frac{1}{p - 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_{\sigma,1}^{(2)}(p) .$$

Dans ce cas, $\alpha_{\sigma,1}^{(1)}(\{0\}) = 0$, $\alpha_{\sigma,1}^{(2)}(\{0\}) = 0$ et $\int_0^\infty \frac{1}{p} d(\alpha_{\sigma,1}^{(1)} + \alpha_{\sigma,1}^{(2)})(p) < +\infty$. Soit $\kappa_{\sigma,1}$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$ de masse totale finie tel que $\widehat{\kappa_{\sigma,1}}(t) = \widehat{N^{(1)}}(t, \sigma)$ sur $\boldsymbol{R}^+$ et $\widehat{\kappa_{\sigma,1}}(t) = \widehat{N^{(1)}}(-t, -\sigma)$ dans $\boldsymbol{R}^1 - \boldsymbol{R}^+$. Ayant

$\mathrm{supp}(LN^{(0)} - N^{(1)}) \subset \{0\}$, on obtient que $\widehat{LN}^{(0)} - \widehat{N}^{(1)}$ est égale à un polynôme, et donc $\varphi_\sigma - \widehat{\kappa_{\sigma,1}}$ est aussi égale à un polynôme. Par conséquent, $u_\sigma = \kappa_{\sigma,1}$ en dehors de l'origine, et par suite

$$\int \exp(-pt)(p^2 - a)d\alpha_\sigma^{(i)}(p) = \int \exp(-pt)d\alpha_{\sigma,1}^{(i)}(p)$$

dans $(0, +\infty)$ $(i = 1, 2)$, d'où $d\alpha_{\sigma,1}^{(i)} = (p^2 - a)d\alpha_\sigma^{(i)}(p)$ $(i = 1, 2)$, d'après l'injectivité de la transformation de Laplace.

De la même manière que ci-dessus, si N est complètement L-sous-harmonique et s'il existe un entier $k \geqq 1$ tel que, pour tout l'entire m à $1 \leqq m \leqq k$, $\int_{|x|>0} d(L^m N) < +\infty$, alors $N^{(m)}$ est de la forme que ci-dessus $(1 \leqq {}^\forall m \leqq k)$.

LEMME 6. *Soient a une constante $\geqq 0$ et α_1, α_2 deux mesures positives sur $[\sqrt{a}, +\infty)$ telles que $\alpha_1(\{0\}) = \alpha_2(\{0\}) = 0$ et pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\int \left(p + \frac{1}{p}\right)^m d(\alpha_1 + \alpha_2)(p) < +\infty$. Posons, pour tout l'entier $m \geqq 0$,*

$$\lambda_m(t) = \int \frac{(p^2 - a)^m}{p + 2\pi\sqrt{-1}t} d\alpha_1(p) + \int \frac{(p^2 - a)^m}{p - 2\pi\sqrt{-1}t} d\alpha_2(p) ,$$

où l'on suppose ici $(p^2 - a)^0 = 1$ pour tout p. Si, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $(4\pi^2|t|^2 + a)\lambda_m(t)$ est bornée sur $\boldsymbol{R}^1$, alors $\alpha_1 = \alpha_2$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} -(4\pi^2|t|^2 + a)\lambda_m(t) = & \int \frac{(p^2 - a)^{m+1}}{p + 2\pi\sqrt{-1}t} d\alpha_1(p) + \int \frac{(p^2 - a)^{m+1}}{p - 2\pi\sqrt{-1}t} d\alpha_2(p) \\ & - \int p(p^2 - a)^m d(\alpha_1 + \alpha_2)(p) \\ & + 2\pi\sqrt{-1}t \int (p^2 - a)^m d(\alpha_1 - \alpha_2)(p) , \end{aligned}$$

et par suite $\int (p^2 - a)^m d\alpha_1(p) = \int (p^2 - a)^m d\alpha_2(p)$. Donc, pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\int p^{2m} d\alpha_1(p) = \int p^{2m} d\alpha_2(p) < +\infty$. Par conséquent, pour tout t de $\boldsymbol{R}^+$,

$$\int \exp(-p^2 t)d\alpha_1(p) = \int \exp(-p^2 t)d\alpha_2(p) ,$$

d'où $\alpha_1 = \alpha_2$.

Pour considérer le noyau de convolution divisible, on définit, pour tout l'entier $m \geqq 2$, une famille $(d_i^{(m)})_{i=1}^{m-1}$ de fonctions positives, finies et continues dans $\mathrm{In.}\,(\boldsymbol{R}^+)^m$, où $\mathrm{In.}\,(\boldsymbol{R}^+)^m$ désigne l'intérieur de $(\boldsymbol{R}^+)^m$ dans $\boldsymbol{R}^m$. On pose $d_1^{(2)}(t_1, t_2) = t_1$ dans $\mathrm{In.}\,(\boldsymbol{R}^+)^2$. Supposons que, pour un entier $m \geqq 2$, $(d_i^{(m)})_{i=1}^{m-1}$ est définie. Soit $(t_1, \cdots, t_{m+1})$ un point quelconque dans $\mathrm{In.}\,(\boldsymbol{R}^+)^{m+1}$; alors on pose, pour tout l'entier i à $1 \leqq i \leqq m$,

$$\begin{aligned} d_i^{(m+1)}(t_1, \cdots, t_{m+1}) = &\frac{t_1 \cdots t_{m+1}}{t_2 \cdots t_{i+1}} \\ &+ t_1^2 \sum_{j=1}^{i} d_j^{(m)}(t_2, \cdots, t_{m+1}) \frac{t_{j+1} \cdots t_{m+1}}{(t_{j+1} \cdots t_{m+1})(t_{j+1} \cdots t_{i+1})}, \end{aligned}$$

où l'on suppose $d_m^{(m)} = 0$. On obtient ainsi une famille $((d_i^{(m)})_{i=1}^{m-1})_{m=2}^{\infty}$.

LEMME 7. *Soient $\tilde{N}$ un noyau de convolution de Hunt borné sur $\boldsymbol{R}^n$ et $\tilde{u}$ la laplacien généralisé sur $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant $\tilde{u} * \tilde{N} = -\varepsilon$. Supposons que, pour un noyau de convolution donné N sur $\boldsymbol{R}^n$, il existe la classe divisible $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m}$ associée au noyau N relativement au noyau $\tilde{N}$ et posons, pour un point $\tilde{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ de $\bigcup_{m \geqq 2} \mathrm{In.}\,(\boldsymbol{R}^+)^m$,*

$$\begin{aligned} M_{\tilde{p}} = &\, p_1 \cdots p_m N * N_{(0, p_1)} * \cdots * N_{(0, p_1, \cdots, p_m)} \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} d_i^{(m)}(p_1, \cdots, p_m) N_{(0, p_1, \cdots, p_i)} * \cdots * N_{(0, p_1, \cdots, p_m)}\,. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \tilde{u} * M_{\tilde{p}} = &\, p_1^2 (p_2 \cdots p_m N_{(0, p_1)} * \cdots * N_{(0, p_1, \cdots, p_m)} \\ &+ \sum_{i=1}^{m-2} d_i^{(m-1)}(p_2, \cdots, p_m) N_{(0, p_1, \cdots, p_{i+1})} * \cdots * N_{(0, p_1, \cdots, p_m)}) \end{aligned}$$

en dehors de l'origine.

En effet, on remarque d'abord que, pour tout $\tilde{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ de $\bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m$, d'après $N_{\tilde{p}} * N_{(p_1, \cdots, p_m, 0)} = \tilde{N}$, $N_{\tilde{p}}$ est aussi un noyau de convolution de Hunt borné sur $\boldsymbol{R}^n$. On a donc, pour tout i à $1 \leqq i \leqq m$, $p_i \int dN_{(0, p_1, \cdots, p_i)} \leqq 1$, et par suite $M_{\tilde{p}}$ définit un noyau de convolution borné sur R^n, d'où $\tilde{u} * M_{\tilde{p}}$ est définie. Ayant

$$N_{(0, p_1, \cdots, p_i)} * N_{(0, p_1, \cdots, p_{i+1})} = \tilde{N} * (\varepsilon - p_{i+1} N_{(0, p_1, \cdots, p_{i+1})})\,,$$

où dans le cas où $i=0$, $N_{(0,p_1,\cdots,p_i)}$ signifie N, on obtient donc

$$\begin{aligned}\tilde{u}*M_{\tilde{p}} &= p_1\cdots p_m((p_1N_{(0,p_1)}-\varepsilon)*N_{(0,p_1,p_2)}*\cdots*N_{(0,p_1,\cdots,p_m)})\\ &\quad+\sum_{i=1}^{m-1}d_i^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)((p_{i+1}N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+1})}-\varepsilon)*N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+2})}\\ &\quad *\cdots*N_{(0,p_1,\cdots,p_m)})\\ &= p_1^2(p_2\cdots p_mN_{(0,p_1)}*\cdots*N_{(0,p_1,\cdots,p_m)}\\ &\quad+\frac{1}{p_1^2}(d_1^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)p_2-p_1\cdots p_m)N_{(0,p_1,p_2)}*\cdots*N_{(0,p_1,\cdots,p_m)}\\ &\quad+\frac{1}{p_1^2}\sum_{i=2}^{m-1}(d_i^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)p_{i+1}-d_{i-1}^{(m)}(p_1,\cdots,p_m))N_{(0,p_1,\cdots,p_{i+1})}\\ &\quad *\cdots*N_{(0,p_1,\cdots,p_m)})-d_{m-1}^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)\varepsilon\,.\end{aligned}$$

D'après la définition de $((d_i^{(m)})_{i=1}^{m-1})_{m=2}^{\infty}$, on a

$$d_1^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)p_2-p_1\cdots p_m=p_1^2d_1^{(m-1)}(p_2,\cdots,p_m)$$

et pour tout l'entier i à $2\leqq i\leqq m-1$,

$$d_i^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)p_{i+1}-d_{i-1}^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)=p_1^2d_i^{(m-1)}(p_2,\cdots,p_m)\,.$$

Par conséquent on obtient immédiatement notre lemme.

On dira que $((d_i^{(m)})_{i=1}^{m-1})_{m=2}^{\infty}$ est la famille de fonctions associée à la classe divisible. D'après le lemme 7, $d_i^{(m)}(p_1,\cdots,p_m)$ est égale à la constante positive $c_i((p_j)_{j=1}^m)$, qui a été déjà introduite dans [7].

LEMME 8. *Pour tout* $(t_1,\cdots,t_m)$ *de* $\bigcup_{m\geqq 2}\mathrm{In.}\,(\boldsymbol{R}^+)^m$ *et pour tout l'entier* i *à* $1\leqq i\leqq m$,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\,d_i^{(m+1)}(t_1,\cdots,t_m,t)=d_i^{(m)}(t_1,\cdots,t_m)\,.$$

Cela est immédiatement obtenu par récurrence. On remarque ici que si, pour un noyau de convolution de Hunt $\tilde{N}$ sur $\boldsymbol{R}^n$ et pour un noyau de convolution N sur $\boldsymbol{R}^n$, il existe la classe divisible $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p}\in\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m}$ associée au noyau N relativement au noyau $\tilde{N}$, alors pour un point $\tilde{p}=(p_1,\cdots,p_m)$ de $\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m$, en posant

$$N_{\tilde{p},\tilde{q}}=N_{(p_1,\cdots,p_m+q_1,q_2,\cdots,q_k)}(\forall\tilde{q}=(q_1,\cdots,q_k)\in\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m)\,,$$

$(N_{\tilde{p},\tilde{q}})_{\tilde{q}\in\bigcup_{m\geqq 1}(\boldsymbol{R}^+)^m}$ est aussi la classe divisible associée au noyau $N_{\tilde{p}}$ relativement au noyau $\tilde{N}$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

Rappelons finalement la définition du cone convexe divisible relatif au noyau de convolution de Hunt donné.

LEMME 9. *Soient* $\tilde{N}$ *un noyau de convolution de Hunt sur* $\boldsymbol{R}^n$ *et* $C_R(\tilde{N})$ *un cône convexe divisible relatif au noyau* $\tilde{N}$. *Alors, pout tout* $N \neq 0$ *de* $C_R(\tilde{N})$, *il existe la classe divisible associée au noyau* N *relativement au noyau* $\tilde{N}$ *et elle est contenue dans* $C_R(\tilde{N})$.

Cela résulte du fait que, pour tout $N \neq 0$ de $C_R(\tilde{N})$, la résolvante associée au noyau N est contenue dans $C_R(\tilde{N})$ et de la condition (b) dans § 1. Voir [6] et [7].

§ 4. Notre théorème principal

Rappelons notre théorème principal qui a été introduit dans § 1.

THÉORÈME 1. *Soit* L *un opérateur différential elliptique d'ordre* $\leqq 2$ *sur* $\boldsymbol{R}^n$ *à coéfficients constants tel qu'il existe le noyau de convolution de Hunt* G_L *sur* $\boldsymbol{R}^n$ *vérifiant* $LG_L = -\varepsilon$. *Alors un cône convexe divisible relatif au noyau* G_L *est uniquement déterminé et cela est égal à*

$$\left\{c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p)\,;\, c \in \boldsymbol{R}^+, \nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+) \text{ à } \int_1^\infty \frac{1}{p}\, d\nu(p) < +\infty\right\},$$

où $(G_{L,p})_{p \geqq 0}$ *est la résolvante associée au noyau* G_L.

On connaît déjà que l'ensemble $\tilde{C}_R(G_L) = \Big\{c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p)\,;\, c \in \boldsymbol{R}^+,$ $\nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$ à $\int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty\Big\}$ est le plus petit cône convexe divisible relatif au noyau G_L (cf. [6] et [7]). Par conséquent, le théorème 1 résulte immédiatement du lemme 9 et du théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soient* L, G_L *les mêmes que ci-dessus et* N *un noyau de convolution sur* $\boldsymbol{R}^n$. *Alors les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(1) *Il existe la classe divisible associée au noyau* N *relativement au noyau* G_L.

(2) N *est de la forme*

$$N = c\varepsilon + \int G_{L,p} d\nu(p)\,,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

où $c \in \boldsymbol{R}^+$ *et* $\nu \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$ *à* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty$.

Démonstration. L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est déjà connue, d'après le lemme 9, car $N \in \tilde{C}_R(G_L)$. Donc on montrera seulement l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). On désigne par $(N_{\tilde{p}})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m}$ la classe divisible associée au noyau N relativement au noyau G_L. Alors, pour tout $\tilde{p} \in \bigcup_{m \geq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m$, $N_{\tilde{p}}$ est un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^n$. On remarque d'abord que, pour une mesure positive ν sur $\boldsymbol{R}^+$, $\displaystyle\int G_{L,p} d\nu(p)$ définisse un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ si et seulement si $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{p} d\nu(p) < +\infty$. Cela est obtenu dans [7] dans le cas où L est auto-adjoint. Le cas général peut être montré aussi de la même manière, car $(pG_{L,p})_{p>0}$ converge vaguement vers ε lorsque $p \to +\infty$.

Notons $L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + c$; alors, d'après l'existence de G_L, on a, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geqq 0$. Alors il existe une constante $a > 0$, un entier k à $0 \leqq k \leqq n$ et une transformation linéaire T de $\boldsymbol{R}^n$ à lui-même à $|T| = 1$ tels que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ soit transformé en $a \sum_{i=1}^k \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ par T, où $|T|$ est le déterminant de T. Soient $L^{(T)}$, $G_L^{(T)}$ et $N_{\tilde{p}}^{(T)}$ les transformées de L, G_L et de $N_{\tilde{p}}$ par $T(\forall p \in \bigcup_{m \geq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m)$, respectivement. Alors il est facile de voir que $L^{(T)} G_L^{(T)} = -\varepsilon$ et $(N_{\tilde{p}}^{(T)})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m}$ est la classe divisible associée au noyau $N^{(T)}$ relativement au noyau $G_L^{(T)}$, où $N^{(T)} = N_0^{(T)}$. Écrivons $L^{(T)} = a \sum_{i=1}^k \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i' \dfrac{\partial}{\partial x_i} + c'$, et posons $\tilde{a} = \left(-\dfrac{b_1'}{2a}, \cdots, -\dfrac{b_k'}{2a}, 0, \cdots, 0\right) \in \boldsymbol{R}^n$. On désigne par $L_{\tilde{a}}^{(T)}$ l'opérateur différentiel défini par $L^{(T)}$ dans le lemme 3 et par $G_L^{(T,\tilde{a})}$, $N^{(T,\tilde{a})}$, $N_{\tilde{p}}^{(T,\tilde{a})}$ les noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ définis par $G_L^{(T)}$, $N^{(T)}$ et $N_{\tilde{p}}^{(T)}$ dans le lemme 3, respectivement. Alors il est facile de voir que $L_{\tilde{a}}^{(T)} G_L^{(T,\tilde{a})} = -\varepsilon$ et $(N_{\tilde{p}}^{(T,\tilde{a})})_{\tilde{p} \in \bigcup_{m \geq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m}$ est la classe divisible associée au noyau $N^{(T,\tilde{a})}$ relativement au noyau $G_L^{(T,\tilde{a})}$. Si $k = n$, on a évidemment $c' - \sum_{i=1}^k \dfrac{b_i'^2}{4a} \leqq 0$.

Si $k < n$ et pour tout l'entier i à $k+1 \leqq i \leqq n$, $b'_i = 0$, alors $c' - \sum_{i=1}^{k} \dfrac{b_i'^2}{4a} < 0$. Si $k < n$ et $(b'_{k+1}, \cdots, b'_n) \neq (0, \cdots, 0)$, il existe un autre point $\tilde{a}' = (\tilde{a}'_1, \cdots, \tilde{a}'_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\tilde{a}'_i = -\dfrac{b'_i}{2a}$ $(i = 1, \cdots, k)$ et le terme constant de $L_{\tilde{a}'}^{(T)}$ est < 0. Par conséquent, si notre théorème est vrai dans le cas où

$$L = a \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=\ell+1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} - c\,,$$

où a, b_i $(i = \ell+1, \cdots, n)$ et c sont de constantes vérifiant $a > 0$ et $c \geqq 0$ ou bien $c > 0$ d'accord avec $\ell = n$ ou bien $0 \leqq \ell < n$, alors, d'après la discussion inverse avec la présente réduction, on se comprend que, en général, notre théorème a lieu. Donc on suppose, dès maintenant, que L est de la présente forme, et alors G_L s'annule à l'infini. Pour tout $\tilde{p} = (p_1, \cdots, p_m)$ de $\bigcup_{m \geqq 1} (\boldsymbol{R}^+)^m$, $N_{\tilde{p}}$ s'annule aussi à l'infini, car $N_{\tilde{p}} * N_{(p_1, \cdots, p_m, 0)} = G_L$, et par suite, pour tout $p > 0$, $p \int dN_{(p_1, \cdots, p_m, p)} \leqq 1$. On connaît bien que $\tilde{C}_R(G_L)$ est vaguement fermé et que, pour tout l'élément N_p de la résolvante associée au noyau N, il existe la classe divisible associée au noyau N_p relativement au noyau G_L. Par conséquent, on peut supposer $\int dN < +\infty$. On désigne par $C_0 = C_0(\boldsymbol{R}^n)$ l'espace de Banach constitué par toutes les fonctions finies et continues dans $\boldsymbol{R}^n$ s'annulant à l'infini et muni de la norme $\|\cdot\|$ de convergence uniforme. On note ensuite $\|\cdot\|'$ la norme dans l'espace dual C'_0 de C_0. Soit δ un nombre quelconque > 0 donné. On peut montrer qu'il existe une suite croissante $(p_m)_{m=1}^{\infty}$ de nombres positifs vérifiant les deux conditions suivantes:

(a) Pour tout l'entier $m \geqq 1$, on a

$$p_1 > \frac{1}{\delta}\,, \qquad \frac{p_m}{p_{m+1}} < \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{2^m}\right)^{1/2}$$

(b) $d_2^{(1)}(p_1, p_2)/p_1 p_2 < \delta/2$ et pour tous les entiers $k \geqq 0$ et $m \geqq 2$,

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{d_i^{(m)}(p_{k+1}, \cdots, p_{k+m})}{p_{k+i} \cdots p_{k+m}} - \frac{d_i^{(m+1)}(p_{k+1}, \cdots, p_{k+m+1})}{p_{k+i} \cdots p_{k+m+1}} \right| < \delta/2^m\,,$$

où $d_m^{(m)}(p_{k+1}, \cdots, p_{k+m}) = 0$.

Cela est obtenu par récurrence, en utilisant le lemme 8.

On note, pour deux entiers $k \geqq 0$ et $m \geqq 1$, $\tilde{p}_{k,m} = (p_{k+1}, \cdots, p_{k+m})$,

$$M^{(1)}_{\tilde{p}_{k,m}} = p_{k+1} \cdots p_{k+m} N_{(0,p_1,\cdots,p_k)} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+m})} ,$$

$$M^{(2)}_{\tilde{p}_{k,m}} = \sum_{i=1}^{m-1} d_i^{(m)}(p_{k+1}, \cdots, p_{k+m}) N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+i})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+m})}$$

et

$$M_{\tilde{p}_{k,m}} = M^{(1)}_{\tilde{p}_{k,m}} + M^{(2)}_{\tilde{p}_{k,m}} ,$$

où $p_0 = 0$. On a alors, pour tout $m \geqq 2$,

$$\begin{aligned}\|N_{(0,p_1,\cdots,p_{m-1})} * N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} * (\varepsilon - p_{m+1} N_{(0,p_1,\cdots,p_{m+1})})\|' \\ = \|N_{(0,p_1,\cdots,p_m)} * N_{(0,p_1,\cdots,p_{m+1})} * (\varepsilon - p_m N_{(0,p_1,\cdots,p_m)})\|' < \frac{2}{p_m p_{m+1}} ,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\|M_{\tilde{p}_{k,m+1}} - M_{\tilde{p}_{k,m}}\|' \leqq \|M^{(1)}_{\tilde{p}_{k,m+1}} - M^{(1)}_{\tilde{p}_{k,m}}\|' \\ + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{d_i^{(m+1)}(p_{k+1}, \cdots, p_{k+m+1})}{p_{k+i} \cdots p_{k+m+1}} \|p_{k+i} \cdots p_{k+m} N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+i})} \\ * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+m})} * (\varepsilon - p_{k+m+1} N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+m+1})})\|' \\ + \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{d_i^{(m+1)}(p_{k+1}, \cdots, p_{k+m+1})}{p_{k+i} \cdots p_{k+m+1}} - \frac{d_i^{(m)}(p_{k+i}, \cdots, p_{k+m})}{p_{k+i} \cdots p_{k+m}} \right| \\ \times \|p_{k+i} \cdots p_{k+m} N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+i})} \cdots N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+m})}\|' \\ < \left(\frac{1}{2^k} \int dN_{(0,p_1,\cdots,p_k)} + \frac{\delta}{2^k} + 1\right) \frac{\delta}{2^m} .\end{aligned}$$

Donc, pour tout l'entier $k \geqq 0$, il existe une constante $a_{\delta,k} \geqq 0$ et un noyau de convolution $M_{\delta,k}$ sur $\boldsymbol{R}^n$ tels que

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i^{(m)}(p_{k+1}, \cdots, p_{k+m})}{p_{k+i} \cdots p_{k+m}} = a_{\delta,k} \quad \text{et} \quad \lim_{m\to+\infty} \|M_{\tilde{p}_{k,m}} - M_{\delta,k}\|' = 0 .$$

On a encore $M_{\tilde{p}_{0,1}} = p_1 N * N_{(0,p_1)}$ et

$$\begin{aligned}\|M_{\tilde{p}_{0,1}} - M_{\delta,0}\|' = \lim_{m\to\infty} \|M_{\tilde{p}_{0,1}} - M_{\tilde{p}_{0,m}}\|' \\ \leqq \overline{\lim_{m\to\infty}} \Big(\sum_{\ell=2}^{\infty} \|M^{(1)}_{\tilde{p}_{0,\ell}} - M^{(1)}_{\tilde{p}_{0,\ell+1}}\|' + \|M^{(1)}_{\tilde{p}_{0,1}} - M^{(1)}_{\tilde{p}_{0,2}}\|' \\ + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{d_i^{(m)}(p_1, \cdots, p_m)}{p_i \cdots p_m} \Big) \\ \leqq \left(\frac{1}{2} \int dN + 2\right) \delta .\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

On obtient donc que $M_{\delta,0}$ converge vaguement vers N lorsque $\delta \downarrow 0$, et par suite il suffit de voir que $M_{\delta,0}$ est de la forme

$$M_{\delta,0} = c_\delta \varepsilon + \int G_{L,p} d\nu_\delta(p) ,$$

où $c_\delta \in \boldsymbol{R}^+$ et $\nu_\delta \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$. On a, pour tous les entiers $k \geqq 0$ et $m \geqq 3$,

$$M_{\tilde{p}_k,m} = (p_{k+1})^2 \sum_{i=1}^{m-2} \frac{d_i^{(m-1)}(p_{k+2}, \cdots, p_{k+m})}{p_{k+i+1} \cdots p_{k+m}} G_L + p_{k+1} G_L * (\varepsilon - p_{k+1} M_{\tilde{p}_{k+1},m-1}) ,$$

qui résulte de l'égalité

$$\begin{aligned} G_L * (\varepsilon - p_{k+i} \cdots p_{k+m} N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+i})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+m})}) \\ = \sum_{s=0}^{m-i} \frac{p_{k+i} \cdots p_{k+m}}{p_{k+i} \cdots p_{k+i+s}} N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+i+s-1})} * \cdots * N_{(0,p_1,\cdots,p_{k+m})} \end{aligned}$$

$(1 \leqq {}^\forall i \leqq m)$ (cf. le lemme 7). G_L s'annulant à l'infini, on a, pour tout l'entier $k \geqq 0$,

$$M_{\delta,k} = (p_{k+1})^2 a_{\delta,k+1} G_L + p_{k+1} G_L * (\varepsilon - p_{k+1} M_{\delta,k+1}) .$$

On obtient donc, pour tout l'entier $k \geqq 1$,

$$0 \leqq L^k M_{\delta,0} = p_1^2 \cdots p_k^2 M_{\delta,k}$$

en dehors de l'origine. D'après la proposition 1, pour tout l'entier $k \geqq 0$, la distribution

$$(-1)^k \left(4\pi^2 a \sum_{i=1}^{\ell} |x_i|^2 + 2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=\ell+1}^{n} b_i x_i + c\right)^k \widehat{M_{\delta,0}}(x) dx$$

est de $CTP(\boldsymbol{R}^n)$. On note, pour un entier $k \geqq 1$, $\tilde{M}_{\delta,0}^{(k)}$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ définie par $\int f d\tilde{M}_{\delta,0}^{(k)} = \int_{|x|>0} f(x) d(L^k M_{\delta,0})(x)$ pour toute f de C_K. On peut supposer que L n'est pas constant, et donc $G_L(\{0\}) = 0$, d'où $M_{\delta,k}(\{0\}) = 0$. Par conséquent, $\tilde{M}_{\delta,0}^{(k)} = p_1^2 \cdots p_k^2 M_{\delta,k}$. On obtient d'autre part,

$$\begin{aligned} \left(4\pi^2 a \sum_{i=1}^{\ell} |x_i|^2 + 2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=\ell+1}^{n} b_i x_i + c\right) \widehat{M_{\delta,k}}(x) \\ = (p_{k+1})^2 a_{\delta,k+1} + p_{k+1}(1 - p_{k+1} \widehat{M_{\delta,k+1}}(x)) . \end{aligned}$$

De la même manière que dans le lemme 4, il existe uniquement une constante $c_\ell \geqq 0$ et deux familles $(\alpha_\sigma^{(1)})_{\sigma \in S_{1,0}^{(\ell)}}$, $(\alpha_\sigma^{(2)})_{\sigma \in S_{1,0}^{(\ell)}}$ de mesures positives

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

sur $[\sqrt{c/a}, +\infty)$ telle que, pour tout σ de $S_{1,0}^{(\ell)} = \{\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in S_{1,0};\ \sigma_{\ell+1} = \cdots = \sigma_n = 0\}$,

$$\widehat{M_{\delta,0}}(r, \sigma) = c_\ell + \int \frac{1}{p + 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(1)}(p) + \int \frac{1}{p - 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(2)}(p)$$

sur $\boldsymbol{R}^+$. De la même manière que dans le lemme 5, on a, pour tout l'entier $k \geqq 1$ et pour tout σ de $S_{1,0}^{(\ell)}$,

$$\widehat{M_{\delta,0}^{(k)}}(r, \sigma) = \int \frac{(p^2 - c/a)^k}{p + 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(1)}(p) + \int \frac{(p^2 - c/a)^k}{p - 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha_\sigma^{(2)}(p)$$

sur $\boldsymbol{R}^+$. Evidemment, pour tout l'entier $k \geqq 0$, $\int \left(p + \dfrac{1}{p}\right)^k d(\alpha_\sigma^{(1)} + \alpha_\sigma^{(2)})(p) < +\infty$. D'après le lemme 6, on a, pour tout σ de $S_{1,0}^{(\ell)}, \alpha_\sigma^{(1)} = \alpha_\sigma^{(2)}$, et donc, pour tout σ de $S_{1,0}^{(\ell)}$, il existe une mesure positive ν_σ appartenant à $M^+(\boldsymbol{R}^+)$ telle que

$$\widehat{M_{\delta,0}}(r, \sigma) = c_\ell + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 a r^2 + c} d\nu_\sigma(p) \qquad \text{sur } \boldsymbol{R}^+ .$$

Posons, pour un point σ de $S_{1,0}$,

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} \widehat{M_{\delta,0}}(t, \sigma) & \text{si } t \geqq 0 \\ \widehat{M_{\delta,0}}(-t, -\sigma) & \text{si } t < 0 \end{cases};$$

alors, pour un point $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ de $S_{1,0}$ vérifiant $\sigma_1 = \cdots = \sigma_\ell = 0$, la distribution $(-1)^k \left(2\pi\sqrt{-1}\left(\sum_{i=k+1}^{n} b_i\sigma_i\right)t + c\right)^k \varphi_\sigma(t)dt$ est de $CTP(\boldsymbol{R}^1)$ pour tout l'entier $k \geqq 0$. La fonction φ_σ étant finie, continue et de type positif, on obtient, d'après la proposition 1 et le lemme 2, il existe une constante $c_\sigma \geqq 0$ et une mesure positive ν_σ sur $\boldsymbol{R}^+$ telles que

$$\widehat{M_{\delta,0}}(r, \sigma) = \varphi_\sigma(r) = c_\sigma + \int \frac{1}{p + 2\pi\sqrt{-1}\left(\sum_{i=\ell+1}^{n} b_i\sigma_i\right)r + c} d\nu_\sigma(p)$$

sur R^+. Soient $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ de $S_{1,0}$; posons $a_\sigma = a \sum_{i=1}^{\ell} |\sigma_i|^2$ et $b_\sigma = \sum_{i=\ell+1}^{n} b_i\sigma_i$ et supposons $a_\sigma \neq 0$. Si $b_\sigma = 0$, alors, de la même manière que ci-dessus, on peut écrire

$$\widehat{M}^{\eta}_{\delta,0}(r,\sigma) = c_{\ell} + \int \frac{1}{p + a_{\sigma}r^2 + c} d\nu_{\sigma}(p)\ ,$$

où $\nu_{\sigma} \in M^+(\boldsymbol{R}^+)$. Supposons $b_{\sigma} \neq 0$; alors, d'après notre hypothèse concernant L, on a $c > 0$. Pour tout l'entier $m \geqq 0$, on note

$$\varphi^{(m)}_{\sigma}(t) = \begin{cases} \widehat{M}^{(m)}_{\delta,0}(t,\sigma) & \text{si } t \geqq 0 \\ \widehat{M}^{(m)}_{\delta,0}(-t,-\sigma) & \text{si } t < 0 \end{cases},$$

où $\varphi^{(0)}_{\sigma} = \varphi_{\sigma}$. Soit $\kappa^{(m)}_{\sigma}$ le noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$ de masse totale finie tel que $\widehat{\kappa^{(m)}_{\sigma}} = \varphi^{(m)}_{\sigma}$. D'après le corollaire 1 dans [7], pour tous les entiers $m \geqq 0$ et $k \geqq 0$, la distribution $(-1)^k(4\pi^2 a_{\sigma}t^2 + 2\pi\sqrt{-1}b_{\sigma}t + c)^k \varphi^{(m)}_{\sigma} dt$ est de $CTP(\boldsymbol{R}^1)$, et donc, d'après la proposition 1, $\left(a_{\sigma}\dfrac{d^2}{dt^2} + b_{\sigma}\dfrac{d}{dt} - c\right)^k \kappa^{(m)}_{\sigma}$ est de $CP(\boldsymbol{R}^1)$. On a $\kappa^{(m)}_{\sigma} = \left(a_{\sigma}\dfrac{d^2}{dt^2} + b_{\sigma}\dfrac{d}{dt} - c\right)\kappa^{(m-1)}_{\sigma}$ en dehors de l'origine ($\forall m \geqq 1$). D'après $c > 0$, il existe un noyau de convolution de Hunt $G_{(\sigma)}$ sur $\boldsymbol{R}^1$ de masse totale finie telle que $\left(a_{\sigma}\dfrac{d^2}{dt^2} + b_{\sigma}\dfrac{d}{dt} - c\right)G_{(\sigma)} = -\varepsilon$. Soient $\kappa^{(m)\prime}_{\sigma}$ et $G'_{(\sigma)}$ les noyaux de convolution sur $\boldsymbol{R}^1$ définis par $d\kappa^{(m)\prime}_{\sigma} = \exp\left(\dfrac{b_{\sigma}}{2a_{\sigma}}t\right)d\kappa^{(m)}_{\sigma}(t)$ et $dG'_{(\sigma)} = \exp\left(\dfrac{b_{\sigma}}{2a_{\sigma}}t\right)dG_{(\sigma)}(t)$, respectivement. Alors $G'_{(\sigma)}$ est un noyau de convolution de Hunt sur $\boldsymbol{R}^1$ et on a $\left(a_{\sigma}\dfrac{d^2}{dt^2} - \dfrac{b^2_{\sigma}}{4a_{\sigma}} - c\right)G'_{(\sigma)} = -\varepsilon$. Donc $\int dG'_{(\sigma)} < +\infty$. Pour tout l'entier $m \geqq 0$, $\kappa^{(m)}_{\sigma}$ satisfaisant au principe de domination relatif au noyau $G_{(\sigma)}$, $\kappa^{(m)\prime}_{\sigma}$ satisfait aussi au principe de domination relatif au noyau $G'_{(\sigma)}$, et par suite $\int d\kappa^{(m)\prime}_{\sigma} < +\infty$. D'après le lemme 3, pour tout l'entier $k \geqq 0$, $\left(a_{\sigma}\dfrac{d^2}{dt^2} - \left(\dfrac{b^2_{\sigma}}{4a_{\sigma}} + c\right)\right)^k \kappa^{(m)\prime}_{\sigma}$ est de $CP(\boldsymbol{R}^1)$. On a encore $\left(a_{\sigma}\dfrac{d^2}{dt^2} - \left(\dfrac{b^2_{\sigma}}{4a_{\sigma}} + c\right)\right)\kappa^{(m+1)\prime}_{\sigma} = \kappa^{(m)\prime}_{\sigma}$ en dehors de l'origine ($\forall m \geqq 0$). D'après les lemmes 4, 5, il existe uniquement une constante $c_{\sigma} \geqq 0$ et deux mesures positives $\alpha^{(1)}_{\sigma}, \alpha^{(2)}_{\sigma}$ sur $\left[\left(\dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a}\right)^{1/2}, +\infty\right)$ telles que

$$\widehat{\kappa^{(0)\prime}_{\sigma}}(t) = c_{\sigma} + \int \frac{1}{p + 2\pi\sqrt{-1}r} d\alpha^{(1)}_{\sigma}(p) + \int \frac{1}{p - 2\pi\sqrt{-1}t} d\alpha^{(2)}_{\sigma}(p)$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

et que pour tout l'entier $m > 0$, $\int\left(p + \dfrac{1}{p}\right)^m d(\alpha_\sigma^{(1)} + \alpha_\sigma^{(2)})(p) < +\infty$,

$$\widehat{\kappa_\sigma^{(m)\prime}}(t) = \int \frac{(p^2 - d_\sigma)^m}{p + 2\pi\sqrt{-1}t} d\alpha_\sigma^{(1)}(p) + \int \frac{(p^2 - d_\sigma)^m}{p - 2\pi\sqrt{-1}t} d\alpha_\sigma^{(2)}(p) ,$$

où $d_\sigma = \dfrac{c}{a_\sigma} + \dfrac{b_\sigma^2}{4a_\sigma^2}$. Ayant $M_{\delta,0}^{(m)} = p_1^2 \cdots p_m^2 M_{\delta,m}$, on obtient

$$\begin{aligned}(4\pi^2 a_\sigma t^2 + 2\pi\sqrt{-1}b_\sigma t + c)\widehat{\kappa_\sigma^{(m)}}(t)\\ = p_1^2 \cdots p_m^2\left((p_{m+1})^2 a_{\delta,m+1} + p_{m+1}\left(1 - \frac{p_{m+1}}{p_1^2 \cdots (p_{m+1})^2}\widehat{\kappa_\sigma^{(m+1)}}(t)\right)\right)\end{aligned}$$

sur $\boldsymbol{R}^1$, et par suite

$$\begin{aligned}(4\pi^2 a_\sigma t^2 + a_\sigma d_\sigma)\widehat{\kappa_\sigma^{(m)\prime}}(t)\\ = p_1^2 \cdots (p_{m+1})^2\left(a_{\delta,m+1} + \left(\frac{1}{p_{m+1}} - \frac{1}{p_1^2 \cdots (p_{m+1})^2}\right)\widehat{\kappa_\sigma^{(m+1)\prime}}(t)\right) .\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout l'entier $m \geqq 0$, la fonction $(4\pi^2 a_\sigma t^2 + d_\sigma)\widehat{\kappa_\sigma^{(m)\prime}}(t)$ est bornée sur $\boldsymbol{R}^1$. D'après le lemme 6, on a $\alpha_\sigma^{(1)} = \alpha_\sigma^{(2)}$, et par suite il existe une mesure positive ν_σ sur $\boldsymbol{R}^+$ telle que

$$\widehat{\kappa_\sigma^{(0)\prime}}(t) = c_\sigma + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 a_\sigma t^2 + c + b_\sigma^2/4a_\sigma} d\nu_\sigma(p) ,$$

d'où

$$\widehat{\kappa_\sigma^{(0)}}(t) = c_\sigma + \int \frac{1}{p + 4\pi^2 a_\sigma t^2 + 2\pi\sqrt{-1}b_\sigma t + c} d\nu_\sigma(p) .$$

On obtient ainsi qu'il existe une famille $(c_\sigma)_{\sigma\in S_{1,0}}$ de constantes $\geqq 0$ et une famille $(\nu_\sigma)_{\sigma\in S_{1,0}}$ dans $M^+(\boldsymbol{R}^+)$ telles que

$$\widehat{M_{\delta,0}}(r,\sigma) = c_\sigma + \int \frac{1}{4\pi^2 a \sum_{i=1}^{\ell} |\sigma_i|^2 r^2 + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=\ell+1}^{n} b_i\sigma_i r + c + p} d\nu_\sigma(p) ,$$

où $\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Ayant $M_{\delta,0}(\{0\}) = 0$, on a, pour tout σ de $S_{1,0}$, $c_\sigma = 0$. On a

$$\widehat{LM_{\delta,0}}(r,\sigma) = \int \left(\frac{p}{4\pi^2 a \sum_{i=1}^{\ell} |\sigma_i|^2 r^2 + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=\ell+1}^{n} b_i\sigma_i r + c + p} - 1\right) d\nu_\sigma(p) ,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017645 Published online by Cambridge University Press

et d'après le lemme 7 et l'unicité de la décomposition dans le théorème de Levy-Khinchine, on a $\int d\nu_\sigma < +\infty$ ($\forall\sigma \in S_{1,0}$) et

$$\widehat{M}^{(1)}_{\delta,0}(r,\sigma) = \int \frac{p}{4\pi^2 a \sum_{i=1}^{\ell} |\sigma_i|^2 r^2 + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=\ell+1}^{n} b_i\sigma_i r + c + p} d\nu_\sigma(p) .$$

Par récurrence, on a, pour tout l'entier $m \geqq 1$,

$$\widehat{M}^{(m)}_{\delta,0}(r,\sigma) = \int \frac{p^m}{4\pi^2 a \sum_{i=1}^{\ell} |\sigma_i|^2 r^2 + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=\ell+1}^{n} b_i\sigma_i r + c + p} d\nu_\sigma(p) .$$

D'après $\int dM^{(m)}_{\delta,0} < +\infty$, $\widehat{M}^{(m)}_{\delta,0}$ est finie et continue, et par suite $\int \frac{p^m}{c+p} d\nu_\sigma(p)$ est finie et ne depend pas de σ. De la même manière que dans le lmeme 6, ν_σ ne depend pas de σ. Posons $\nu = \nu_\sigma$; alors on obtient

$$\widehat{M}_{\delta,0}(x) = \int \frac{1}{4\pi^2 a \sum_{i=1}^{\ell} |x_i|^2 + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=\ell+1}^{n} b_i x_i + c + p} d\nu(p)$$

sur $\boldsymbol{R}^n$, où $x = (x_1, \cdots, x_n)$. Par conséquent on a $M_{\delta,0} = \int G_{L,p} d\nu(p)$. La démonstration est ainsi complète.

On désigne par $C_R(G_L)$ le cône convexe divisible relatif au noyau G_L. De la même manière que dans [6], l'ensemble des points extrêmes dans $C_R(G_L)$ est égal à $\{\varepsilon\} \cup \{0\} \cup \{G_{L,p}\,; p \geqq 0\}$. D'après le théorème 1, si L est uniformément elliptique, alors tout l'élément de $C_R(G_L)$ est analytique en dehors de l'origine.

Bibliographie

[1] G. Choquet et J. Deny: Aspects linéaires de la théorie du potentiel, Noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert, C. R. Acad. Sci. Paris, **250** (1960), p. 4260–4262.

[2] J. Deny: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), p. 643–667.

[3] C. S. Herz: Analyse harmonique à plusieurs variables, Sém. Math. d'Orsay, 1965/66.

[4] M. Itô: Sur le principe de domination pour les noyaux de convolution, Nagoya Math. J., **50** (1973), p. 149–173.

[5] ——: Une caracterisation du principe de domination pour les noyaux de convolution, Japan. J. Math., **1** (1975), p. 5–35.

[6] ——: Sur les cônes convexes de Riesz et les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques, Nagoya Math. J., **55** (1974), p. 111–144.

[7] ——: Sur L'unicuté du cône convexe divisible constitué par de noyaux de convolution de Dirichlet, Nagoya Math. J., **57** (1975), p. 127–152.

[8] D. Widder: The Laplace Transform, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.

Université de Nagoya