

ÜBER AUTOMORPHIEFAKTOREN UND DIE DEDEKINDSCHEN SUMMEN

von ARMIN LEUTBECHER

(Received 15 November, 1968)

Einleitung. Bei der Betrachtung automorpher Formen zu diskreten Untergruppen Γ von $SL_2(\mathbf{R})$ mit nicht ganzzahligem Gewicht bzgl. des Automorphiefaktors $J(A, z) = (cz + d)^{-2}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, hat man einen Zweig $L(A, z)$ des Logarithmus von $J(A, z)$ zu fixieren. Durch

$$2\pi i W(A, B) = L(AB, z) - L(A, Bz) - L(B, z)$$

wird dann ein 2-Kozyklus W von $SL_2(\mathbf{R})$ mit Koeffizienten in \mathbf{Z} definiert. Die verschiedenen Zweige von $\log J(A, z)$ liefern gerade die sämtlichen Kozyklen einer Kohomologiekategorie. Indes existieren Fixierungen von $L(A, z)$, für die W symmetrisch, d.h. stets $W(A, B) = W(B, A)$, ist. Das folgt aus einem allgemeinen Kriterium in Lemma 1. Die explizite Konstruktion von $L(A, z)$ mit symmetrischem W bringt Abschnitt 2. Anwendungen auf automorphe Formen werden im dritten Abschnitt gegeben. Insbesondere ergibt sich eine einigermaßen handliche Form für die "Periode"

$$\omega(\eta, A) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_z^{Az} \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} dt + \frac{1}{4} L(A, z) \right\}, \quad A \in SL_2(\mathbf{Z}),$$

der Dedekindschen Funktion

$$\eta(z) = e^{2\pi iz/24} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi imz}).$$

Den wesentlichen Bestandteil in $\omega(\eta, A)$ bilden bekanntlich die Dedekindschen Summen $s(d, c)$. Da W symmetrisch gewählt wurde, wird $\omega(\eta, A)$ eine Klassenfunktion auf $SL_2(\mathbf{Z})$. Daraus folgen die meisten der bekannten Identitäten für die Dedekindschen Summen.

Die Existenz einer Abbildung $\omega: \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ mit der Eigenschaft

$$\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B) + W(A, B),$$

wie sie durch $\omega(A) = 4\omega(\eta, A)$ gegeben wird—bedeutet nichts anderes als das Zerfallen einer durch W definierten zentralen Gruppenerweiterung. Daß sie im Falle $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$ zerfällt, ist eine Konsequenz elementarer Sätze der Kohomologietheorie. Weil $\Gamma / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ freies Produkt von zyklischen Gruppen endlicher Ordnung ist, ist die Abbildung ω eindeutig bestimmt. Man hat dadurch eine von der Dedekindschen Funktion unabhängige Definition für ω .

Mit Hilfe der Dedekindschen Summen hat Wohlfahrt [10] eine Serie von Nichtkongruenzuntergruppen in $SL_2(\mathbf{Z})$ gefunden. In unserer Terminologie gesprochen betrachtet er für verschiedene Primzahlen p, q den durch

$$\chi(A) = \exp\left(\frac{12\pi i}{q}\right)\{\omega(PAP^{-1}) - \omega(A)\}, \quad P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

auf der Gruppe $\Gamma_0(p)$ der Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ mit $c \equiv 0 \pmod{p}$ definierten Charakter χ und zeigt, daß der Kern von χ eine Nichtkongruenzuntergruppe von $SL_2(\mathbf{Z})$ ist, wenn q kein Teiler von $p^2 - 1$ ist. Dieses Resultat ergänzen wir im letzten Abschnitt durch die folgende Feststellung: Für natürliche Zahlen $n > 1$ sei $N = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma_0(n)$ die Gruppe der $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ mit $c \equiv 0 \pmod{n}$ und $\Omega_n(A) = 6\{\omega(NAN^{-1}) - \omega(A)\}$. $\Omega_n: \Gamma_0(n) \rightarrow \mathbf{Z}$ ist offenbar ein Homomorphismus, und es gilt: $\Omega_n^{-1}(m\mathbf{Z})$ ist dann und nur dann eine Kongruenzuntergruppe von $SL_2(\mathbf{Z})$, wenn m ein Teiler von 24 ist.

1. Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element I und M eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe, aufgefaßt als trivialer G -Modul. $Z^2(G, M) = Z^2$ bezeichne die additive Gruppe der Abbildungen $w: G \times G \rightarrow M$, welche der Identität genügen

$$(1.1) \quad w(A, B) + w(AB, C) = w(A, BC) + w(B, C) \quad \text{für alle } A, B, C \in G;$$

ferner sei $B^2(G, M) = B^2$ die Untergruppe der $w \in Z^2$, für die mit einer passenden Abbildung $\alpha: G \rightarrow M$ gilt

$$w(A, B) = \alpha(A) - \alpha(AB) + \alpha(B).$$

Die Faktorgruppe Z^2/B^2 ist bekanntlich isomorph zur zweiten Kohomologiegruppe $H^2(G, M)$ von G mit Koeffizienten in M . Aus (1.1) kommt für alle $w \in Z^2$ und alle $A, B \in G$

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{(a) } w(A, I) = w(I, A) = w(I, I), \\ \text{(b) } w(A, A^{-1}) = w(A^{-1}, A), \\ \text{(c) } w(AB, B^{-1}A^{-1}) + w(A, B) + w(B^{-1}, A^{-1}) = w(A, A^{-1}) + w(B, B^{-1}) + w(I, I). \end{cases}$$

Wir betrachten die Untergruppe S von Z^2 der ‘‘symmetrischen’’ w (d.h. $w(A, B) = w(B, A)$ für alle $A, B \in G$), die von ihr erzeugte Untergruppe $\tilde{S} = (S + B^2)/B^2$ von $H^2(G, M)$ und zeigen.

LEMMA 1. Für $w \in Z^2$ ist $\tilde{w} := w + B^2$ in \tilde{S} genau dann, wenn für alle vertauschbaren $A, B \in G$ gilt $w(A, B) = w(B, A)$.

Beweis. Die eine Richtung der Behauptung ist trivial. Ist nämlich $w_0 \in S$ und mit einer Abbildung $\alpha: G \rightarrow M$ $w(A, B) = w_0(A, B) + \alpha(A) - \alpha(AB) + \alpha(B)$, so ist offenbar für je zwei vertauschbare $A, B \in G$ auch $w(A, B) = w(B, A)$. Zum Beweis der anderen Richtung machen wir eine Vorbemerkung. $H^2(G, M)$ ist bekanntlich isomorph zur Gruppe $\text{Opext}(M, G, \chi_0)$

der zentralen Gruppenerweiterungen von M mit G (vgl. MacLane [5, Chapter IV]). Ein Isomorphismus läßt sich folgendermaßen beschreiben: Ist

$$E: 0 \rightarrow M \xrightarrow{q} \tilde{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$$

eine zentrale Gruppenerweiterung, also eine exakte Sequenz von Gruppenhomomorphismen, für welche $q(M)$ im Zentrum von \tilde{G} liegt, so hat man zu jeder Abbildung $v: G \rightarrow \tilde{G}$ mit der Eigenschaft $p \circ v = \text{Id}_G$ (wir nennen v dann ein Vertretersystem von G in \tilde{G} für E) durch

$$v(A)v(B)v(AB)^{-1} = q(w(A, B)) \quad (A, B \in G),$$

ein $w \in Z^2$ definiert; und die verschiedenen Vertretersysteme v' von G in \tilde{G} für E liefern die sämtlichen $w' \in w + B^2$. Ist andererseits $w \in Z^2$, so definiert

$$(a, A)(b, B) := (a + b + w(A, B), AB) \quad \text{für } a, b \in M \text{ und } A, B \in G$$

eine Gruppenstruktur auf $\tilde{G} := M \times G$ mit dem neutralen Element $(-w(I, I), I)$. Das durch $q(a) := (a - w(I, I), I), p(a, A) = A$ gegebene Paar von Abbildungen $q: M \rightarrow \tilde{G}, p: \tilde{G} \rightarrow G$ definiert eine zentrale Gruppenerweiterung $E: 0 \rightarrow M \xrightarrow{q} \tilde{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$, und w gehört zu dem Vertretersystem $v(A) = (0, A)$. Dem Nullelement von $H^2(G, M)$ entspricht die Klasse der zerfallenden Erweiterungen, das sind diejenigen, für die ein Homomorphismus v mit $p \circ v = \text{Id}_G$ existiert.

Sei nun für ein $w \in Z^2 E$ die so definierte Gruppenerweiterung und v das durch $v(a) = (0, A)$ definierte Vertretersystem. Für den Kommutator zweier Elemente $g = (a, A), h = (b, B) \in \tilde{G}$ hat man

$$\begin{aligned} ghg^{-1}h^{-1} &= (w(A, B) + w(A^{-1}, B^{-1}) + w(AB, A^{-1}B^{-1}) - w(A, A^{-1}) - w(B, B^{-1}) - 2w(I, I), ABA^{-1}B^{-1}). \end{aligned}$$

Daraus liest man mit (1.2) ab: Ist für vertauschbare A, B stets $w(A, B) = w(B, A)$, so gilt für $g, h \in \tilde{G}$ $ghg^{-1}h^{-1} \in q(M)$ nur, wenn $gh = hg$ ist. Anders ausgedrückt: Ist $p(ghg^{-1}h^{-1}) = p(h)$, so ist $ghg^{-1}h^{-1} = h$. Die Einschränkung von p auf jede Klasse K von in H konjugierten Elementen ist dann also injektiv. Daraus folgt leicht, daß ein Vertretersystem v_0 von G in \tilde{G} existiert, für welches $v_0(G)$ aus vollen Klassen in \tilde{G} konjugierter Elemente besteht: Sei \mathfrak{B} die Gesamtheit aller Teilmengen V von \tilde{G} mit den beiden Eigenschaften

- (1) Die Einschränkung von p auf V ist injektiv.
- (2) V besteht aus vollen Klassen konjugierter Elemente.

Nach dem Zornschen Lemma enthält \mathfrak{B} ein bzgl. der Inklusion \subset maximales Element V_0 . Es ist $p(V_0) = G$. Sonst gibt es nämlich ein $h \in \tilde{G}$ mit $p(h) \in G - p(V_0)$. Wegen (2) enthält dann V_0 kein Element der Klasse K zu h in \tilde{G} konjugierter Elemente, also ist $p(K) \cap p(V_0) = \emptyset$. Daraus folgt $K \cup V_0 \in \mathfrak{B}$ im Widerspruch zur Maximalität von V_0 . Also existiert ein Vertretersystem $v_0: G \rightarrow \tilde{G}$, für das $v_0(G) = V_0$ aus vollen Klassen konjugierter Elemente besteht. Sei w_0 das v_0 vermöge

$$v_0(A)v_0(B)v_0(AB)^{-1} = q(w_0(A, B))$$

zugeordnete Element von Z^2 . Es ist $w + B^2 = w_0 + B^2$ und für alle $A, B \in G$ gilt

$$\begin{aligned} v_0(BA) &= v_0(A^{-1})v_0(AB)v_0(A^{-1})^{-1}, \\ \text{also } q(w_0(BA, A^{-1})) &= v_0(BA)v_0(A^{-1})v_0(B)^{-1} \\ &= v_0(A^{-1})v_0(AB)v_0(B)^{-1} = q(w_0(A^{-1}, AB)). \end{aligned}$$

Aus (1.2) kommt deshalb

$$0 = w_0(BA, A^{-1}) - w_0(A^{-1}, AB) = w_0(A, B) - w_0(B, A).$$

Das beendet den Beweis von Lemma 1.

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Bemerkungen.

(1.3) Ist $w \in S$, so ist $w(A, B) = w(CAC^{-1}, CBC^{-1})$ für alle $A, B, C \in G$.

(1.4) Ist für ein $w \in Z^2$ und gegebene $A, B \in G$ $w(A, X) = w(X, A)$ und $w(B, X) = w(X, B)$ für alle $X \in G$, so gilt auch $w(AB, Y) = w(Y, AB)$ für alle $Y \in G$.

Beweis. Aus (1.1) kommt mit der Voraussetzung von (1.3)

$$\begin{aligned} w(C \cdot AC^{-1}, CBC^{-1}) &= w(C, ABC^{-1}) + w(AC^{-1}, C \cdot BC^{-1}) - w(AC^{-1}, C) \\ &= w(A \cdot BC^{-1}, C) + w(A, BC^{-1}) - w(BC^{-1}, C) = w(A, B). \end{aligned}$$

Entsprechend liefert die Voraussetzung von (1.4)

$$\begin{aligned} w(A \cdot B, Y) - w(Y, A \cdot B) &= w(A, BY) + w(B, Y) - w(YA, B) - w(Y, A) \\ &= w(BY, A) + w(B, Y) - w(B, YA) - w(Y, A) = 0. \end{aligned}$$

2. Sei für den Augenblick X ein einfach zusammenhängendes Gebiet im \mathbf{C}^n und G eine Gruppe mit neutralem Element I , welche als Gruppe analytischer Automorphismen auf X operiert, ferner J ein Automorphiefaktor zu (G, X) , d.h. $J(A, z)$ ist für jedes $A \in G$ eine holomorphe Funktion auf X , und es gilt

$$J(AB, z) = J(A, Bz)J(B, z), \quad J(I, z) = 1.$$

Dann ist $J(A, z)$ nullstellenfrei. Für jeden Zweig $L(A, z)$ des Logarithmus von $J(A, z)$ gilt

$$(2.1) \quad L(AB, z) = L(A, Bz) + L(B, z) + 2\pi i W(A, B), \quad A, B \in G,$$

worin $W \in Z^2(G, \mathbf{Z})$ ist. Die verschiedenen Zweige L' des Logarithmus liefern offenbar die sämtlichen W' der Klasse $W + B^2(G, \mathbf{Z})$. Wir betrachten hier $G = SL_2(\mathbf{R})$ als Gruppe linear gebrochener Transformationen der oberen Halbebene $X = \mathfrak{H} = \{z \in \mathbf{C}; \text{Im } z > 0\}$ und die beiden Automorphiefaktoren $j(A, z) := cz + d, J(A, z) := (cz + d)^{-2}$. Bei Petersson [7] wird ein Zweig $l_1(A, z)$ des Logarithmus von $j(A, z)$ fixiert durch

$$(2.2) \quad -\pi < \text{Im } l_1(A, z) \leq \pi.$$

w_1 sei der gemäß (2.1) zu l_1 gehörige 2-Kozyklus in $Z^2(G, \mathbf{Z})$. Für ihn gilt offenbar stets $|w_1(A, B)| \leq 1$. Für vertauschbare $A, B \in SL_2(\mathbf{R})$ ist

$$2\pi i(w_1(A, B) - w_1(B, A)) = l_1(A, z) - l_1(A, Bz) + l_1(B, Az) - l_1(B, z).$$

Die beiden Transformationen $z \rightarrow Az, z \rightarrow Bz$ der Riemannsphäre $\bar{\mathbb{C}}$ besitzen einen gemeinsamen Fixpunkt z_0 in \mathfrak{H} oder $\text{Rd } \mathfrak{H}$. Ist $z_0 \in \mathfrak{H}$, so ergibt sich für $z = z_0$ $w_1(A, B) = w_1(B, A)$. Ist $z_0 \in \text{Rd } \mathfrak{H}$, so lassen sich $l_1(A, z)$ und $l_1(B, z)$ stetig nach z_0 fortsetzen, und wieder folgt $w_1(A, B) = w_1(B, A)$. Lemma 1 ergibt also, daß $w_1 + Z^2(G, \mathbf{Z})$ einen symmetrischen 2-Kozyklus enthält. Allerdings folgt aus der Relation $(UT)^3 = I$ für die Matrizen $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R})$ leicht, daß jede Wahl von $l(A, z) = \log(cz + d)$, die außer von z nur von der zweiten Zeile (c, d) von A abhängt, keinen symmetrischen Kozyklus liefert.

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R})$ mit der Spur $\text{tr } A = a + d$ definieren wir drei Funktionen $\beta, \delta, \varepsilon$ durch

$$\beta(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{tr } A < 0 \text{ und } c < 0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \text{tr } A < 0 \text{ oder falls } \text{tr } A = 0 \text{ und } c > 0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\varepsilon(A) = \begin{cases} \text{sgn } c, & \text{falls } c \neq 0, \\ -\text{sgn } d, & \text{falls } c = 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Für sie gilt offenbar

$$(2.3) \quad 2\beta(A) = \delta(A)(1 - \varepsilon(A)),$$

und δ ist eine Klassenfunktion auf $SL_2(\mathbf{R})$, d.h. konstant auf den Klassen konjugierter Matrizen. Ein Zweig des Logarithmus von $j(A, z)$ bzw. von $J(A, z)$ wird festgelegt durch

$$(2.4) \quad \begin{cases} l(A, z) = l_1(A, z) + 2\pi i \beta(A), \\ L(A, z) = -2l_1((-1)^{\delta(A)} A, z). \end{cases}$$

Es ist $l_1(A, z) - l_1(-A, z) = \pi i \varepsilon(A)$, $A \in SL_2(\mathbf{R})$, also liefert (2.3)

$$(2.5) \quad L(A, z) = -2l_1(A, z) + 2\pi i \delta(A) \varepsilon(A) = -2l(A, z) + 2\pi i \delta(A).$$

Entsprechend gilt für die zu l und L nach (2.1) gehörigen 2-Kozyklen w und W

$$(2.6) \quad \begin{cases} (a) & w(A, B) = w_1(A, B) + \beta(AB) - \beta(A) - \beta(B), \\ (b) & W(A, B) = -2w_1(A, B) + \delta(AB)\varepsilon(AB) - \delta(A)\varepsilon(A) - \delta(B)\varepsilon(B) \\ (c) & W(A, B) = -2w(A, B) + \delta(AB) - \delta(A) - \delta(B). \end{cases}$$

Wir zeigen jetzt

LEMMA 2. Für alle $A_1, A_2 \in SL_2(\mathbf{R})$ ist $W(A_1, A_2) \in \{-1, 0, 1\}$.

Beweis. Sei $A_0 = A_1 A_2$, $A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, 2$. Aus der Definition (2.4) hat man für $A \in SL_2(\mathbb{R})$, $z \in \mathfrak{H}$:

$$L(A, z) = L(-A, z), \quad |\operatorname{Im} L(A, z)| < 2\pi$$

und, falls $A\infty = \infty$, sogar $\operatorname{Im} L(A, z) = 0$. Deshalb ist stets $|W(A_1, A_2)| \leq 2$, und $|W(A_1, A_2)| \leq 1$, falls $A_k\infty = \infty$ für ein k ist. Wegen (2.6) (b) genügt also zu zeigen: Ist $\delta(A_1) = \delta(A_2) = 0$, $c_0 c_1 c_2 \neq 0$ und $w_1(A_1, A_2) \neq 0$, so ist $\operatorname{tr}(A_1 A_2) < 0$. Nun bedeutet hier $w_1(A_1, A_2) \neq 0$ wegen (2.2), daß $c_0 c_1 < 0$ und $c_1 c_2 > 0$ ist. Dann haben wir

$$\frac{c_0}{c_2} = \frac{c_1}{c_2} a_2 + d_1 < 0 \quad \text{und} \quad a_1 + \frac{c_1}{c_2} d_2 = (a_1 + d_1) + \frac{c_1}{c_2} (a_2 + d_2) - \frac{c_0}{c_2} > 0.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tr} A_0 = a_1 a_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2 = \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{c_1}{c_2} a_2 + d_1 \right) \left(a_1 + \frac{c_1}{c_2} d_2 \right) - \left(\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_2}{c_1} \right) < 0.$$

Lemma 2 zusammen mit (2.6) (c) ergibt für alle A_1, A_2 : $-3 \leq 2w(A_1, A_2) \leq 2$; wegen $w(A_1, A_2) \in \mathbb{Z}$ haben wir also

KOROLLAR 1. Für alle $A_1, A_2 \in SL_2(\mathbb{R})$ ist $w(A_1, A_2) \in \{-1, 0, 1\}$.

KOROLLAR 2. $W(A, B) = 0$ gilt genau dann, wenn $\delta(A) + \delta(B) \equiv \delta(AB) \pmod{2}$ ist.

Als nächstes beweisen wir

$$(2.7) \quad \begin{cases} (a) & W(A, A^{-1}) = 0, \text{ falls } \operatorname{tr} A \neq 0. \\ (b) & w(A, A^{-1}) = 0 \text{ oder } -1, \text{ je nachdem } \operatorname{tr} A \geq 0 \text{ oder } \operatorname{tr} A < 0 \text{ ist.} \\ (c) & W(A, B) = -1, \text{ falls } \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0. \end{cases}$$

Aussage (a) ist eine unmittelbare Folgerung aus Korollar 2. Mit (2.6) (c) ergibt sich aus ihr die Aussage (b) für den Fall $\operatorname{tr} A \neq 0$. Im Fall $\operatorname{tr} A = 0$ ist $w(A, A^{-1}) = w_1(A, A^{-1}) = 0$ und $\delta(AA^{-1}) - \delta(A) - \delta(A^{-1}) = -1$, und (2.6) (c) zeigt $W(A, A^{-1}) = -1$. Bleibt also Aussage (c) für den Fall $B \neq A^{-1}$. Dann ist nach (1.2) (c) zusammen mit dem Bewiesenen

$$W(A, B) + W(B^{-1}, A^{-1}) = -W(AB, B^{-1}A^{-1}) + W(A, A^{-1}) + W(B, B^{-1}) = -2,$$

weil $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$ ist. Die Behauptung folgt damit aus Lemma 2.

LEMMA 3. Für alle $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$ ist $W(A, B) = W(B, A)$ und $w(A, B) = w(B, A)$.

Beweis. Aus (2.6) (c) kommt $W(A, B) - W(B, A) = -2(w(A, B) - w(B, A))$. Die Matrizen $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $U^r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, bilden ein Erzeugendensystem von $SL_2(\mathbb{R})$ als Halbgruppe. Wegen (1.4) genügt deshalb, für alle $A \in SL_2(\mathbb{R})$ zu zeigen

$$(1) \quad |W(A, U^r) - W(U^r, A)| < 2,$$

$$(2) \quad |W(A, T) - W(T, A)| < 2.$$

Aus der Definition von W hat man nun, da $L(U', z) = 0$ ist,

$$2\pi i(W(A, U') - W(U', A)) = L(AU', U'^{-1}z) - L(U'A, z).$$

Weil stets $|\operatorname{Im} L(X, z)| < 2\pi$ ist, folgt Aussage (1). Wegen

$$W(A, T) - W(T, A) = W(TA, T) - W(T, AT)$$

ist nach (2.7) (c) die Aussage (2) jedenfalls richtig, wenn $\operatorname{tr} A = 0$ oder $\operatorname{tr}(AT) = 0$ ist. Nun ist $\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(T^{-1}A^{-1})$, und (1.2), (2.7) liefern

$$W(T, A) - W(A, T) = W(T^{-1}, A^{-1}) - W(A^{-1}, T^{-1}).$$

Im Falle $\operatorname{tr} A \neq 0$, $\operatorname{tr}(AT) \neq 0$ ist ferner

$$\delta(A) + \delta(T) \equiv \delta(AT) \pmod{2} \text{ oder } \delta(T^{-1}) + \delta(A^{-1}) \equiv \delta(T^{-1}A^{-1}) \pmod{2}.$$

Also ist nach Lemma 2 und Korollar 2 die Aussage (2) auch in diesem Falle richtig.

Wir setzen für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R})$

$$A^* := \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.8) Für alle $A \in SL_2(\mathbf{R})$, $z \in \mathfrak{H}$ gilt

$$L(A^*, -\bar{z}) - \overline{L(A, z)} = -2\pi i W(A, A^{-1}) \text{ und } l(A^*, -\bar{z}) - \overline{l(A, z)} = -2\pi i w(A, A^{-1}).$$

Beweis. Im Falle $\operatorname{tr} A \geq 0$ ist $l(A, z) = l_1(A, z) = \overline{l_1(A^*, -\bar{z})}$. Also stimmt dann die zweite Behauptung. Aus (2.5) kommt ferner

$$L(A^*, -\bar{z}) - \overline{L(A, z)} = -2(l(A^*, -\bar{z}) - \overline{l(A, z)}) + 2\pi i(\delta(A) + \delta(A^*)).$$

Da stets $L(A, z) = L(-A, z)$ und $(-A)^* = -A^*$ ist, folgt mit (2.7) also die erste Behauptung. Und aus ihr gewinnt man unter nochmaliger Anwendung von (2.7) auch die zweite Behauptung für den Fall $\operatorname{tr} A < 0$.

Sei für $x \in \operatorname{Rd} \mathfrak{H} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ G_x die Untergruppe der $A \in SL_2(\mathbf{R})$ mit $Ax = x$. Sind $A, B \in G_\infty$, so ist $\delta(A) + \delta(B) \equiv \delta(AB) \pmod{2}$, also nach Korollar 2 zu Lemma 2 $W(A, B) = 0$. Unter Berücksichtigung von (1.3) hat man also

(2.9) Besitzen $A, B \in SL_2(\mathbf{R})$ einen gemeinsamen Fixpunkt auf $\operatorname{Rd} \mathfrak{H}$, so ist $W(A, B) = 0$.

(2.10) Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl und

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$$

Dann gilt $\sum_{k=1}^{n-1} W(A^k, A) = -1$.

Beweis. Für $n = 2$ ist die Behauptung in (2.7) (c) bewiesen. Sei also $n > 2$. Es ist

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi k}{n} & \sin \frac{\pi k}{n} \\ -\sin \frac{\pi k}{n} & \cos \frac{\pi k}{n} \end{pmatrix}$$

und $\delta(A^k) = 0$ für $1 \leq k \leq \frac{1}{2}n$, $\delta(A^k) = 1$ für $\frac{1}{2}n < k \leq n$. Nach Korollar 2 zu Lemma 2 besitzt die Summe also genau einen von 0 verschiedenen Summanden, nämlich für $k \leq \frac{1}{2}n < k + 1$. Dann ist aber $w_1(A^k, A) = 0$, also nach (2.6) (b) $W(A^k, A) = -\delta(A^{k+1}) = -1$.

3. Sei Γ eine diskrete Untergruppe von $SL_2(\mathbb{R})$. Als automorphe Form zu Γ bezeichnen wir jede in \mathfrak{H} meromorphe Funktion $f \neq 0$, welche einer Identität

$$(3.1) \quad f(Az)J(A, z)^g = \chi(A)f(z), \quad A \in \Gamma,$$

genügt. Darin sind das Gewicht g und der Multiplikator $\chi(A)$ von f komplexe Zahlen, und es ist $J(A, z)^g = \exp(gL(A, z))$. Wegen $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)\exp(2\pi i gW(A, B))$ ist χ eine Klassenfunktion auf Γ . Die Funktion $f = 0$ sei automorphe Form zu jeder Gruppe Γ , zu jedem Gewicht und zu jedem Multiplikator χ . Den \mathbb{C} -Modul aller automorphen Formen zu Γ, g, χ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\Gamma, g, \chi)$. Durch $f \rightarrow f^C, f^C(z) := f(Cz)J(C, z)^g$ hat man für jedes $C \in SL_2(\mathbb{R})$ einen Isomorphismus von $\mathcal{C}(\Gamma, g, \chi)$ auf $\mathcal{C}(C^{-1}\Gamma C, g, \chi_C)$, wo $\chi_C(C^{-1}AC) = \chi(A)$ für alle $A \in \Gamma$ ist. Die Abbildung $f \rightarrow f^*, f^*(z) = \overline{f(-\bar{z})}$ liefert, wie man an (2.8) sieht, einen Isomorphismus von $\mathcal{C}(\Gamma, g, \chi)$ auf $\mathcal{C}(\Gamma^*, \bar{g}, \chi^*)$, wo $\Gamma^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\chi^*(A^*) = \overline{\chi(A^{-1})}^{-1}$ ist.—

Die nullstellenfreien holomorphen automorphen Formen zu Γ bilden unter der Multiplikation eine Gruppe $\mathcal{E}(\Gamma)$. Für jedes $f \in \mathcal{E}(\Gamma) \cap \mathcal{C}(\Gamma, g, \chi)$ ist

$$(3.2) \quad 2\pi i \omega(f, A) := \int_z^{Az} \frac{f'(t)}{f(t)} dt + gL(A, z), \quad A \in \Gamma,$$

unabhängig von z . Offenbar ist $\chi(A) = \exp(2\pi i \omega(f, A))$. Es gelten für alle $A, B \in \Gamma; f, f_1, f_2 \in \mathcal{E}(\Gamma); C \in SL_2(\mathbb{R})$ die Formeln

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \omega(c, A) = 0, \text{ falls } c \in \mathbb{C} - \{0\} \\ \text{(b) } \omega(f_1 f_2, A) = \omega(f_1, A) + \omega(f_2, A) \\ \text{(c) } \omega(f, AB) = \omega(f, A) + \omega(f, B) + gW(A, B) \\ \text{(d) } \omega(f^C, C^{-1}AC) = \omega(f, A) \\ \text{(e) } \omega(f^*, A^*) = \overline{\omega(f, A^{-1})}. \end{array} \right.$$

(a), (b) und (c) sind direkt an der Definition von ω abzulesen. Um (d) zu zeigen, setzen wir $B = C^{-1}AC$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 2\pi i \omega(f, A) &= \int_{Cz}^{CBz} \frac{f'(t)}{f(t)} dt + gL(A, Cz) \\
 &= \int_z^{Bz} \frac{f'(Cx)}{f(Cx)} J(C, x) dx + gL(A, Cz) \text{ nach der Substitution } t = Cx \\
 &= \int_z^{Bz} \frac{(f^C)'(x)}{f^C(x)} dx - g \int_z^{Bz} \frac{J'(Cx)}{J(Cx)} dx + gL(A, Cz) \text{ nach Definition von } f^C \\
 &= 2\pi i \omega(f^C, B) + 2\pi i g(W(C, C^{-1}AC) - W(A, C)) \text{ nach Definition von } \omega \text{ und } W \\
 &= 2\pi i \omega(f^C, C^{-1}AC) \text{ wegen Lemma 3 und (1.3).}
 \end{aligned}$$

Formel (e) wird so eingesehen: Es ist $(f^*)(z) = -\overline{f'(-\bar{z})}$. Sei $t(s), 0 \leq s \leq 1$, eine differenzierbare Kurve in \mathfrak{S} mit $t(0) = -\bar{z}, t(1) = -\overline{Az} = A^*(-\bar{z})$. Dann ist $t^*(s) := -\overline{t(s)}$ die aus t durch Spiegelung an der imaginären Achse entstehende Kurve. Für sie gilt $t^*(0) = z, t^*(1) = Az, \frac{dt^*}{ds} = -\overline{\left(\frac{dt}{ds}\right)}$. Damit wird

$$\begin{aligned}
 2\pi i \omega(f^*, A^*) &= \int_0^1 \frac{(f^*)'(t(s))}{f^*(t(s))} \frac{dt}{ds} ds + \overline{gL(A^*, -\bar{z})} \\
 &= \int_0^1 \frac{f'(t^*(s))}{f(t^*(s))} \frac{dt^*}{ds} ds + \overline{gL(A, z)} - 2\pi i \overline{g} W(A, A^{-1}) \text{ nach (2.8)} \\
 &= 2\pi i \overline{\omega(f, A^{-1})} \text{ nach Definition von } \omega \text{ und (3.3) (c).}
 \end{aligned}$$

Das bekannteste Beispiel liefert die Dedekindsche Funktion η für den Fall $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Dedekind [1] hat einen expliziten Ausdruck für $\omega(\eta, A)$ berechnet, in dem als wesentlicher Bestandteil die nach ihm benannten Summen auftreten. Über sie existiert eine umfangreiche Literatur (vgl. Rademacher [9], Dieter [3]). Das Hauptinteresse liegt dort auf der arithmetischen Herleitung von Identitäten für die Dedekindschen Summen. Die meisten von ihnen sind Spezialfälle der Formeln (3.3). Man hat nur zu beachten, daß $\eta = \eta^*$ ist.

Für diskrete Untergruppen Γ von $SL_2(\mathbb{R})$ sei

$$E: 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \tilde{\Gamma} \xrightarrow[\quad p]{\quad q} \Gamma \rightarrow 1$$

die durch W definierte Gruppenerweiterung. Weil stets $W(A, B) = W(-A, B) = W(A, -B)$ ist, kann E auch als Gruppenerweiterung von \mathbb{C} mit $\hat{\Gamma} := \Gamma \langle -I \rangle / \langle -I \rangle$ anstelle von Γ aufgefaßt werden. Die Existenz einer Abbildung $\omega: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$(3.4) \quad \omega(AB) = \omega(A) + \omega(B) + W(A, B), \quad A, B \in \Gamma,$$

bedeutet dasselbe wie die Existenz eines Homomorphismus $\nu: \Gamma \rightarrow \hat{\Gamma}$ mit $p \circ \nu = \text{Id}_\Gamma$, also das Zerfallen von E (ν wird dann durch $\nu(A) = (\omega(A), A)$ gegeben). Ist $\hat{\Gamma}$ freies Produkt zyklischer Gruppen, so ist $H^2(\hat{\Gamma}, D) = 0$ für jede dividierbare abelsche Gruppe D , eine unmittelbare

D

Konsequenz der Tatsache, daß $H^2(Z, D) = 0$ ist für zyklische Gruppen Z (z.B. Huppert [4], Satz 16.20, p. 118). Dann ist also immer die Existenz einer Abbildung ω mit der Eigenschaft (3.4) gesichert.—Sind $\omega_1, \omega_2: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ zwei solche Abbildungen, so ist $\phi = \omega_1 - \omega_2$ ein Homomorphismus von Γ in die additive Gruppe von \mathbb{C} , in dessen Kern die Matrix $-I$ liegt. Ist nun $\hat{\Gamma}$ freies Produkt von zyklischen Gruppen endlicher Ordnung, so ist ϕ notwendigerweise trivial. Also existiert dann eine und nur eine Abbildung ω mit der Eigenschaft (3.4).

(3.5) Ist $\hat{\Gamma}$ freies Produkt von zyklischen Gruppen endlicher Ordnung und ist $\Gamma = \Gamma^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so gilt für die Abbildung ω mit der Eigenschaft (3.4) die Identität

$$\omega(A^*) = \omega(A^{-1}), \quad A \in \Gamma.$$

Beweis. Aus (2.8) und (1.2) (c) hat man für alle $A, B \in SL_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} W(A^*, B^*) &= \frac{1}{2\pi i} (L(A^*B^*, -\bar{z}) - L(A^*, -\overline{B(z)}) - L(B^*, -\bar{z})) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\overline{L(AB, z)} - \overline{L(A, Bz)} - \overline{L(B, z)}) + W(A, A^{-1}) - W(AB, B^{-1}A^{-1}) + W(B, B^{-1}) \\ &= W(B^{-1}, A^{-1}). \end{aligned}$$

Es genügt also, die Behauptung für die Elemente A eines Erzeugendensystems \mathcal{S} von Γ zu zeigen. Nach der Voraussetzung über $\hat{\Gamma}$ können die $A \in \mathcal{S}$ in der Form

$$A = B \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} B^{-1}, \quad B \in SL_2(\mathbb{R}), \quad n \in \mathbb{N},$$

gewählt werden. Dann ist nach (3.4)

$$0 = \omega(A^n) = n\omega(A) + \sum_{k=1}^{n-1} W(A^k, A),$$

also wegen (2.10) $\omega(A) = 1/n$. Da A^* in $SL_2(\mathbb{R})$ konjugiert ist zu A^{-1} , gilt $\omega(A^*) = \omega(A^{-1})$. Nebenbei ergibt sich, daß $\omega(\Gamma)$ in dem von den $\omega(A), A \in \mathcal{S}$, erzeugten \mathbb{Z} -Modul liegt.

Wir wenden das auf die rationale Modulgruppe $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ an. $\hat{\Gamma}$ ist dann freies Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 3. Also ist $\omega(\Gamma) \subset \frac{1}{6}\mathbb{Z}$.

LEMMA 4. Für die Abbildung $\omega: SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\omega(AB) = \omega(A) + \omega(B) + W(A, B)$ gilt

$$\omega(U^m) = m/6 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

und für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, falls $c \neq 0$,

$$\omega(A) = \frac{a+d}{6c} + \operatorname{sgn} c(\delta(A) - \frac{1}{2}) + \sigma(c, d).$$

Darin hat σ für teilerfremde $c, d \in \mathbf{Z}$ die Eigenschaften

$$\sigma(c, d) = \sigma(-c, -d) = -\sigma(-c, d) = \sigma(c, c+d);$$

$$\sigma(c, d) + \sigma(d, c) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} c \operatorname{sgn} d - \frac{c^2 + d^2 + 1}{6cd}$$

falls $cd \neq 0$ ist.

Beweis. Für

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad TU^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nach dem Beweis von (3.5) $\omega(T) = \frac{1}{2}$ und $\omega(TU^{-1}) = \frac{1}{2}$. Aus Korollar 2 zu Lemma 2 folgt $W(T, UT^{-1}) = 0$, also

$$\omega(U) = \omega(TUT^{-1}) = \omega(T) + \omega(UT^{-1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}.$$

Das liefert insbesondere $\omega(U^m) = m/6$. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \neq 0$ ist wegen $w_1(U^m, A) = 0$ nach (2.6) (b)

$$W(U^m, A) = \operatorname{sgn} c(\delta(U^m A) - \delta(A)).$$

Nun ist $\{U^m A; m \in \mathbf{Z}\}$ die Menge aller Matrizen aus $SL_2(\mathbf{Z})$ mit derselben zweiten Zeile wie A . Also hängt

$$\sigma(c, d) := \omega(A) - \frac{a+d}{6c} - \operatorname{sgn} c(\delta(A) - \frac{1}{2})$$

nur von der zweiten Zeile (c, d) von A ab. Wegen $\omega(A) = \omega(-A)$ gilt $\sigma(c, d) = \sigma(-c, -d)$, und $\omega(UA) = \omega(AU)$ liefert $\sigma(c, d) = \sigma(c, c+d)$. Ist $\operatorname{tr} A > 0$, so gilt wegen (3.5) und (2.7) (a)

$$0 = \omega(A) + \omega(A^*) = \sigma(c, d) + \sigma(-c, d).$$

Schließlich braucht die letzte Aussage nur für $c > 0, d > 0$ gezeigt zu werden. Man wählt dazu A so, daß $a+d > 0$ und $b-c > 0$ ist. Es gilt $A = BT$ mit $B = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$, also wegen Korollar 2 zu Lemma 2 $\omega(A) = \omega(B) + \frac{1}{2}$; und das ergibt mit dem Vorangehenden

$$\sigma(c, d) + \sigma(d, c) = \frac{b-c}{6d} - \frac{a+d}{6c} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{c^2 + d^2 + 1}{6cd}.$$

Wir greifen den Fall $\text{tr } A = 2$ heraus. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ setzt man

$$v(A) = \begin{pmatrix} -b \\ a-d \\ c \end{pmatrix}, \quad D(B) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}$$

und hat $v(BAB^{-1}) = D(B)v(A)$. Es folgt daraus, daß der (positive) größte gemeinsame Teiler $\text{ggT}(a-d, b, c)$ eine Klassenfunktion auf $SL_2(\mathbf{Z})$ ist, und im Falle $\text{tr } A = 2$ auch $\text{sgn}(b-c)$. Aus $\omega(U^m) = m/6$ für $m \in \mathbf{Z}$ gewinnt man deshalb

(3.6) Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ mit $\text{tr } A = 2$ gilt $\omega(A) = \frac{1}{6} \text{sgn}(b-c) \text{ggT}(a-d, b, c)$.

Dedekind [1] erhält für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ mit positivem c

$$\log \eta(Az) - \log \eta(z) = \frac{1}{2} \log \frac{cz+d}{i} + \pi i \left\{ \frac{a+d}{12c} - s(d, c) \right\}.$$

Darin ist der Logarithmus durch $-\pi/2 < \text{Im } \log x < \pi/2$ in $\text{Re } x > 0$ normiert, $s(d, c)$ ist die sog. Dedekindsche Summe

$$s(d, c) = \sum_{m(\bmod c)} B_1\left(\frac{m}{c}\right) B_1\left(\frac{md}{c}\right) \quad \text{und}$$

$$B_1(x) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}, & \text{falls } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

bezeichnet die durch das erste Bernoulli-Polynom definierte periodische Funktion. $s(d, c)$ hat für teilerfremde $c, d \in \mathbf{Z}, c > 0$, die beiden trivialen Eigenschaften $s(d, c) = -s(-d, c) = s(d+c, c)$, und erfüllt das Reziprozitätsgesetz

$$s(d, c) + s(c, d) = -\frac{1}{4} + \frac{c^2 + d^2 + 1}{12cd} \quad (c > 0, d > 0).$$

s ist dadurch eindeutig bestimmt. Insbesondere haben wir

(3.7) $\sigma(c, d) = -2s(d, c)$, falls $c > 0, d > 0$.

Es ist bemerkenswert, daß diese Identität ohne Benutzung der Dedekindschen Funktion bewiesen werden kann, weil elementar-arithmetische Beweise für das Reziprozitätsgesetz existieren (s. z.B. Mordell [6]).

4. In diesem Abschnitt sei stets $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, für natürliche Zahlen n $\Gamma(n)$ die Hauptkongruenzgruppe der Stufe n , d.i. die Untergruppe der $A \equiv I \pmod{n}$ von Γ , ferner $\Delta(n)$ der von U^n erzeugte Normalteiler von Γ . Wohlfahrt [10] hat mit Hilfe der Dedekindschen Summen eine Serie von Nichtkongruenzuntergruppen von Γ angegeben, die hier näher untersucht werden. Dazu ist der folgende Satz von zentraler Bedeutung.

SATZ 1. (Fricke–Wohlfahrt) Ist t ein positiver Teiler der natürlichen Zahl m , so gilt

$$\Gamma(m)\Delta(t) = \Gamma(t).$$

Der Vollständigkeit halber gebe ich noch einen Beweis, in Anlehnung an Wohlfahrt [11]. Es muß gezeigt werden, daß zu jedem $A \in \Gamma(t)$ ein $B \in \Delta(t)$ mit $A \equiv B \pmod{m}$ existiert. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $c \not\equiv 0 \pmod{m}$, so existieren $x, y \in \mathbf{Z}$ mit $cx + dy = 1$ und $\text{ggT}(y, m/t) = 1$. Man wähle dazu ein $g \in \mathbf{Z}$ mit $ygt \equiv c \pmod{m}$. Dann ist

$$C = \begin{pmatrix} 1 - x y g t & x^2 g t \\ -y^2 g t & 1 + x y g t \end{pmatrix} \text{ in } \Delta(t) \text{ und } AC \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{m}.$$

Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $c \equiv 0 \pmod{m}$, so gilt $ad - 1 \equiv 0 \pmod{m}$, also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1-a & 2-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (b+1)d-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & d+b(d-1) \end{pmatrix}$$

$\equiv A \pmod{m}$, und die drei Matrizen auf der linken Seite liegen in $\Delta(t)$. Das beweist den Satz 1.

Für Untergruppen Δ von endlichem Index in Γ wird nach Wohlfahrt [11] die Stufe von Δ definiert als kleinste natürliche Zahl t mit $\Delta(t) \subset \Delta$. Δ heißt eine Kongruenzuntergruppe von Γ , wenn für ein $m \in \mathbf{N}$ gilt $\Gamma(m) \subset \Delta$. Nach Satz 1 ist Δ Kongruenzuntergruppe genau dann, wenn $\Gamma(t) \subset \Delta$ ist.

Mit der Abbildung ω von Lemma 4 sei $\Omega = 6\omega$. Dann ist $\Omega(\Gamma) \subset \mathbf{Z}$. Für natürliche Zahlen $n > 1$ sei $\Gamma_0(n)$ die Untergruppe der $A \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{n}$ von Γ , $N = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$$\Omega_n(A) := \Omega(NAN^{-1}) - \Omega(A), A \in \Gamma_0(n).$$

Wegen (1.3) ist $\Omega_n: \Gamma_0(n) \rightarrow \mathbf{Z}$ ein Homomorphismus.

(4.1) Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n)$ und $c > 0, d > 0$, so gilt

$$\Omega_n(A) = \frac{n-1}{d} \left(b - \frac{c}{n} (4d^2 - 6d + 1) \right) + \frac{12}{d} L_n(c, d)$$

mit

$$L_n(c, d) = \sum_{m=1}^{d-1} m \left(\left[\frac{mc}{d} \right] - \left[\frac{mc}{nd} \right] \right).$$

Beweis. Wegen Lemma 4 gilt

$$\Omega_n(A) = \frac{(a+d)(n-1)}{c} + 6\sigma\left(\frac{c}{n}, d\right) - 6\sigma(c, d) = \frac{n-1}{d} \left(b + \frac{c}{n} \right) + 6\sigma(d, c) - 6\sigma\left(d, \frac{c}{n}\right).$$

Nach (3.7) wird unter Verwendung der Identität

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{d-1} B_1\left(\frac{mc}{d}\right) &= \sum_{m=1}^{d-1} B_1\left(\frac{mc}{nd}\right) = 0 \\ \sigma(d, c) - \sigma\left(d, \frac{c}{n}\right) &= 2s\left(\frac{c}{n}, d\right) - 2s(c, d) \\ &= \frac{2}{d} \sum_{m=1}^{d-1} m \left(\frac{mc}{nd} - \frac{mc}{d}\right) + \frac{2}{d} \sum_{m=1}^{d-1} m \left(\left[\frac{cm}{d}\right] - \left[\frac{mc}{nd}\right]\right) \\ &= \frac{2c}{nd} (1-n) \frac{(d-1)(2d-1)}{6} + \frac{2}{d} L_n(c, d). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(4.2) Sind $c, d \in \mathbb{N}$ koprim, $c \equiv 0 \pmod{n}$, $d \equiv 1 \pmod{2}$, so gilt mit dem Legendre-Symbol $\left(\frac{n}{d}\right)$

$$(-1)^{L_n(c,d)} = \left(\frac{n}{d}\right) (-1)^{c(d-1)(n-1)/2n}.$$

Zum Beweis wird ein Schluß von Rademacher [8] verwendet. Es ist

$$L_n(c, d) \equiv \sum_{m=1}^{d-1} \left(\left[\frac{mc}{d}\right] - \left[\frac{mc}{nd}\right]\right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{d-1} \left(\left[\frac{2mc}{d}\right] - \left[\frac{2mc}{nd}\right]\right) \pmod{2}.$$

Durch Abzählen der Gitterpunkte im Inneren der Dreiecke mit den Ecken $(0, 0)$, $(d, 0)$, (d, c) bzw. $(0, 0)$, $(d, 0)$, $(d, c/n)$ erhält man für die linke Summe $\frac{1}{2}(d-1)(c/n)(n-1)$. Nach Scherings Verallgemeinerung des Gaußschen Lemmas gilt für teilerfremde $c, d \in \mathbb{Z}$ mit positivem $d \equiv 1 \pmod{2}$ für

$$R = \sum_{m=1}^{\frac{1}{2}(d-1)} \left[\frac{2mc}{d}\right]; \quad (-1)^R = \left(\frac{c}{d}\right);$$

also ist die rechte Summe $\equiv 0$ oder $1 \pmod{2}$, jenachdem $\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c/n}{d}\right) = \left(\frac{n}{d}\right)$ gleich 1 oder -1 ist.

(4.3) Ist $n \equiv 1 \pmod{24}$, so gilt für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \quad \exp[2\pi i \Omega_n(A)/24] = \left(\frac{d}{n}\right)$.

Zum Beweis darf wegen $\Omega_n(A) = \Omega_n(-A) = -\Omega_n(A^*) \quad c > 0$ und $d > 0$ vorausgesetzt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \Omega_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= n-1 \equiv 0 \pmod{24}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weil d oder $c + d$ ungerade ist, darf weiterhin angenommen werden, daß d ungerade ist. Dann gilt wegen (4.1), (4.2) nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz

$$\exp\left(\frac{2\pi i \Omega_n(A)}{24}\right) = \left(\frac{n}{d}\right) = \left(\frac{d}{n}\right).$$

Aussage (4.3) wird für zu 6 prime Quadratzahlen n in der Theorie der komplexen Multiplikation zum Nachweis des Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie benötigt (vgl. Deuring [2]).

Wir definieren die natürlichen Zahlen γ_n, δ_n durch $\Omega_n(\Gamma(n)) = \gamma_n \mathbf{Z}$, $\Omega_n(\Delta(n)) = \delta_n \mathbf{Z}$. δ_n kann sofort explizit angegeben werden: Nach Definition wird $\Delta(n)$ erzeugt durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 + xyn & -x^2n \\ y^2n & 1 - xyn \end{pmatrix}$$

mit teilerfremden $x, y \in \mathbf{Z}$. Wegen (3.6) ist $\Omega_n(A) = n - t^2$, $t = \text{ggT}(n, y)$. Das liefert

$$(4.4) \quad \delta_n = \text{ggT}(n - t^2; t | n).$$

Im nächsten Satz wird γ_n berechnet und ein Überblick über die sämtlichen Kongruenzuntergruppen unter den Gruppen $\Omega_n^{-1}(m\mathbf{Z})$, $m \in \mathbf{N}$, gegeben.

SATZ 2. Für jede natürliche Zahl $n > 1$ gilt

$$\gamma_n = \text{ggT}(n - 1, 24) \quad \text{und} \quad \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \Omega_n(\Gamma(mn)) = 24\mathbf{Z}.$$

Beweis. Es sei $\alpha_2 = 4, \alpha_3 = 2$ und $\alpha_p = 1$ für Primzahlen $p > 3$; ferner $\delta_n = \prod_p p^{\beta_p}$.

Wegen $\Omega_n(\Delta(mn)) = m\delta_n \mathbf{Z}$ ist die Stufe von $\Omega_n^{-1}(p^\alpha \mathbf{Z})$ gleich n , falls $\alpha \leq \beta_p$, gleich $p^{\alpha - \beta_p} n$, falls $\alpha \geq \beta_p$ ist. Ist $\Omega_n^{-1}(m\mathbf{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe von Γ , so ist für jede Primzahlpotenz p^α , welche m teilt, auch $\Omega_n^{-1}(p^\alpha \mathbf{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Nach (4.1) und (4.2) ist sicher $\Omega_n(\Gamma(24n)) \subset 24\mathbf{Z}$. Es ist also neben der ersten Behauptung von Satz 2 zu zeigen, daß für jede Primzahl p $\Omega_n^{-1}(p^{\alpha_p} \mathbf{Z})$ eine Nichtkongruenzuntergruppe von Γ ist. Wir beginnen mit

(1) Ist $\delta_n \not\equiv 0 \pmod{p}$ und $\alpha \in \mathbf{N}$, so existiert eine Matrix

$$A \in \Gamma(p^\alpha n) \cap \Delta(n) \quad \text{mit} \quad \Omega_n(A) \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha_p}}.$$

Daraus folgt mit Satz 1 insbesondere, daß für $\beta_p = 0$ $\Omega_n^{-1}(p^{\alpha_p} \mathbf{Z})$ eine Nichtkongruenzuntergruppe ist. Zum Beweis setzen wir A an in der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y^2n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - xyn & x^2n \\ -y^2n & 1 + xyn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - xyn & x^2n \\ -xy^3n & 1 + xyn + x^2y^2n^2 \end{pmatrix}$$

mit teilerfremden $x, y \in \mathbf{Z}$, $x \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$. Dann ist $A \in \Gamma(p^\alpha n)$ und wegen (3.6) gilt

$$\Omega_n(A) = y^2(n - 1) - n + t^2, \quad t = \text{ggT}(n, y).$$

Ist p kein Teiler von $n-1$, so wählen wir $t = 1$ und $y^2 \not\equiv 1 \pmod{p^{\alpha p}}$. Dann wird $\Omega_n(A) = (n-1)(y^2-1) \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha p}}$. Ist $n-1 \equiv 0 \pmod{p}$, so existiert wegen $\delta_n \not\equiv 0 \pmod{p}$ ein Teiler t von n , für den $n-t^2$, und damit $\Omega_n(A)$, prim zu p wird. Das beweist die Behauptung.

(2) Ist $p = 2$ oder 3 und $n \equiv 1 \pmod{p}, n \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, so existiert ein $A \in \Gamma(p^{\alpha p-1}n) \cap \Delta(n)$ mit $\Omega_n(A) \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha p}}$.

(Insbesondere ist dann $\beta_p = 1$ und $\Omega_n^{-1}(p^{\alpha p}\mathbf{Z})$ eine Nichtkongruenzuntergruppe von Γ .)

Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & n^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n^3 & n^2 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\Omega_n(B) = (n-1)(n^2+1)$; also $\Omega_n(B) \not\equiv 0 \pmod{2^3}$, falls $p = 2, \Omega_n(B) \not\equiv 0 \pmod{3^2}$, falls $p = 3$ ist. Ferner gilt $B \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \pmod{8}$ für $n \equiv -1 \pmod{8}$, $B \equiv \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \pmod{8}$ für $n \equiv 3 \pmod{8}$. Jedenfalls ist dann $A := B^6 \in \Gamma(8n)$ und $\Omega_n(A) = 6\Omega_n(B) \not\equiv 0 \pmod{2^4}$. Ist $n \equiv 1 \pmod{3}$, so ist $B \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \pmod{3}$, also $A := B^4 \in \Gamma(3n)$ und $\Omega_n(A) \not\equiv 0 \pmod{3^2}$.

Zum Beweis der restlichen Behauptungen berechnen wir zu natürlichen Zahlen q, r, s, t , welche $rt \equiv 1 \pmod{q}$ und $st = n-1$ erfüllen, $\Omega_n(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s\left(\frac{rt-1}{q} + 1\right) - nr \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} nr-s & \frac{rt-1}{q} \\ qn & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -n & -s \end{pmatrix}.$$

Man prüft leicht nach, daß $A \in \Gamma((q-1)n)$ ist. Wir zeigen

$$(3) \quad \Omega_n(A) = (n-1) \left\{ s\left(\frac{rt-1}{q} + 1\right) - nr \right\} + s\left(\frac{rt-1}{q} + q\right).$$

Für jedes $X \in SL_2(\mathbf{R})$ ist $X' = TX^{-1}T^{-1}$ die zu X transponierte Matrix. Deshalb ist mit

$$C := \begin{pmatrix} t & -n \\ 1 & -s \end{pmatrix} \text{ wegen (3.4), (3.5)}$$

$$\Omega_n(C') = \Omega(C^*) - \Omega(C') = \Omega(C^{-1}) - \Omega(C^{-1}) = 0,$$

und für
$$B := \begin{pmatrix} nr-s & \frac{rt-1}{q} \\ qn & t \end{pmatrix}$$

gilt nach (4.1)
$$\Omega_n(B) = \frac{n-1}{t} \left\{ \frac{rt-1}{q} - q(4t^2 - 6t + 1) \right\} + \frac{12}{t} L_n(qn, t).$$
 Wegen

$$\left[\begin{matrix} mqn \\ t \end{matrix} \right]_{t-1} = mqs + \left[\begin{matrix} mq \\ t \end{matrix} \right]$$

wird

$$L_n(qn, t) = \sum_{m=1}^{t-1} qsm^2 = \frac{1}{6}qst(t-1)(2t-1),$$

und daraus ergibt sich die Behauptung.

Sind nun q und $n-1$ teilerfremd, so wird $\Omega_n(A) \equiv s(q^2-1)/q \pmod{(n-1)}$. Wählt man zu jedem Primteiler p von $n-1$ für t die maximale p -Potenz in $n-1$ und $q^2 \not\equiv 1 \pmod{p^{2t}}$, so hat man, daß γ_n ein Teiler von $n-1$ und 24 ist. Andererseits zeigen (4.1) und (4.2), daß für alle $A \in \Gamma(n)$ $\Omega_n(A) \equiv 0 \pmod{\text{ggT}(n-1, 24)}$ ist. Damit ist $\gamma_n = \text{ggT}(n-1, 24)$ bewiesen. Zusätzlich hat sich ergeben

(4) Ist $n \equiv 1 \pmod{p^{2t}}$, so existiert eine Matrix $A \in \Gamma(n)$ mit $\Omega_n(A) \not\equiv 0 \pmod{p^{2t}}$. Für $p = 2, 3$ kann A in $\Gamma(pn)$ gewählt werden.

Wegen (2) ist damit für $\delta_n \equiv 0 \pmod{p}$ gezeigt, daß $\Omega_n^{-1}(p^{2t}\mathbb{Z})$ eine Nichtkongruenzuntergruppe von Γ ist, abgesehen vom Fall $p = 2, n \equiv 1 \pmod{4}, n \not\equiv 1 \pmod{16}$. Es fehlt also noch der Nachweis von

(5) Ist $n \equiv 5 \pmod{8}$, so existiert ein $A \in \Gamma(4n)$ mit $\Omega_n(A) \not\equiv 0 \pmod{2^4}$. Ist $n \equiv 9 \pmod{16}$, so existiert ein $A \in \Gamma(2n)$ mit $\Omega_n(A) \not\equiv 0 \pmod{2^4}$.

Dazu wähle man in (3) $t = 4$ bzw. $8, rt = 16, q = 5$ bzw. 3 . Dann wird

$$\Omega_n(A) = (n-1) \left(\frac{n-1}{t} \left(\frac{15}{q} + 1 \right) - nr \right) + 8 \frac{n-1}{t} \equiv 8 \pmod{16}.$$

LITERATUR

1. R. Dedekind, Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann, *Gesammelte Werke*, Bd 1 (Braunschweig, 1930).
2. M. Deuring, Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation, *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd I2, Heft 10, Teil II (Stuttgart, 1958).
3. U. Dieter, Beziehungen zwischen Dedekindschen Summen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 21 (1957), 109–125.
4. B. Huppert, *Endliche Gruppen I* (Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1967).
5. S. MacLane, *Homology* (Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963).
6. L. J. Mordell, The reciprocity formula for Dedekind sums, *Amer. J. Math.* 73 (1951), 593–601.
7. H. Petersson, Analytische Theorie der Grenzkreisgruppen I, II, III, *Math. Ann.* 115 (1938), 23–67, 175–204, 518–572.
8. H. Rademacher, Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modul-funktionen, *J. London Math. Soc.* 7 (1932), 14–19.
9. H. Rademacher, Zur Theorie der Dedekindschen Summen, *Math. Z.* 63 (1955/56), 445–463.
10. K. Wohlfahrt, Über Dedekindsche Summen und Untergruppen der Modulgruppe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 23 (1959), 5–10.
11. K. Wohlfahrt, An extension of F. Klein's level concept, *Illinois J. Math.* 8 (1964), 529–535.

II. MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
 SCHLOBPLATZ 2
 44 MÜNSTER
 GERMANY