SUR LES SURFACES A COURBURE MOYENNE ISOTHERME

VICTOR LALAN

NOUS nous occupons dans ce travail d'une classe de surfaces dont l'équation différentielle est du cinquième ordre, et qui jouissent de la propriété que, sur elles, les lignes d'égale courbure moyenne forment, avec leurs trajectoires orthogonales, un système isotherme. Dans cette classe rentrent les surfaces admettant un groupe de déplacements à un paramètre (cylindres, surfaces de révolution et hélicoïdes), ainsi que les surfaces admettant une infinité de déformations avec conservation des courbures principales (surfaces d'Ossian Bonnet).

Notre méthode repose essentiellement sur l'emploi de certaines formes différentielles qui se sont présentées à nous dans l'étude des lignes minima des surfaces, mais qui sont susceptibles aussi d'une définition simple dans le domaine réel, comme nous le montrons au n° **1.** On pourra consulter à ce sujet diverses Notes que nous avons communiquées à l'Académie des Sciences,[1] et aussi un mémoire qui doit paraître dans le Bulletin de la Société Mathématique de France de 1947. Nous supposons le lecteur initié aux méthodes développées par M. E. Cartan dans ses divers ouvrages.[2]

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

1. Nous appelons *surfaces à courbure moyenne isotherme*, ou, plus brièvement, *surfaces HI*, les surfaces sur lesquelles les lignes d'égale courbure moyenne forment, conjointement avec leurs trajectoires orthogonales, un système isotherme. Leur étude, qui ne semble pas avoir été systématiquement entreprise, se trouve grandement facilitée par l'emploi de certaines formes différentielles, que nous avons appelées les *formes minima* de la surface, et qui ne sont autres que les différentielles des pseudo-arcs des lignes de longueur nulle de la surface. On peut d'ailleurs définir ces formes sans faire appel à la théorie des lignes minima, en opérant comme suit.

Si ds^2 et ϕ désignent les deux formes quadratiques de la surface, a et c les courbures principales, ϖ_1 et ϖ_2 les arcs élémentaires des lignes de courbure, on a

$$ds^2 = \varpi_1^2 + \varpi_2^2, \quad \phi = a\varpi_1^2 + c\varpi_2^2,$$

donc

$$\phi - c\,ds^2 = (a - c)\varpi_1^2, \quad \phi - a\,ds^2 = (c - a)\varpi_2^2.$$

Received February 11, 1948.

[1] *Comptes rendus*, 1946, 1947, 1948, *passim*.

[2] *La théorie des groupes finis et la géométrie différentielle* (Paris, 1937). *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, 1945). Voir aussi, sur les surfaces d'O. Bonnet, un mémoire de M. E. Cartan paru dans le *Bull. des Sciences Math.*, vol. **66** (**1942**), **55-85**, où l'on trouvera des indications bibliographiques.

Supposons $a > c$, ce qui est loisible en tout point qui n'est pas un ombilic, et posons

(1) $$\theta_1 = \sqrt{\phi - c ds^2} = \sqrt{a - c}\,\varpi_1,\ \theta_2 = \sqrt{a ds^2 - \phi} = \sqrt{a - c}\,\varpi_2.$$

Les formes minima, ω_1 et ω_2, se définissent à partir de là

(2) $$2\omega_1 = \theta_1 - i\theta_2, \quad 2\omega_2 = \theta_1 + i\theta_2.$$

Il est donc parfaitement équivalent d'utiliser les formes réelles θ_1, θ_2, que nous appellerons les *formes principales*, ou les formes imaginaires conjuguées ω_1, ω_2. En revanche, nombre de propriétés apparaissent quand on emploie θ_1 et θ_2 (ou ω_1 et ω_2), qui restent cachées tant qu'on s'en tient aux formes de Darboux-Cartan ϖ_1 et ϖ_2.

Nous poserons

$$H = \frac{a + c}{2}, \quad A = \frac{a - c}{2}.$$

H est la courbure moyenne, A sera appelée l'*asphéricité*; on suppose la région étudiée dépourvue de singularités et d'ombilics, et l'on s'arrange pour que A soit positive.

Les formes quadratiques de la surface s'écrivent, comme on le voit immédiatement,

(3) $$ds^2 = \frac{2\omega_1\omega_2}{A}, \quad \phi = \omega_1^2 + 2\frac{H}{A}\omega_1\omega_2 + \omega_2^2.$$

Définissons en outre les invariants minima r et s par

(4) $$d\omega_1 = r[\omega_1\omega_2], \quad d\omega_2 = s[\omega_2\omega_1]$$

et les invariants principaux ρ et σ par

(5) $$d\theta_1 = \rho[\theta_1\theta_2], \quad d\theta_2 = \sigma[\theta_2\theta_1].$$

On vérifie sans peine que

(6) $$r = \sigma - i\rho, \quad s = \sigma + i\rho.$$

2. Le premier résultat important que nous obtenons grâce à l'emploi des formes principales, c'est l'expression des équations classiques de Codazzi sous la forme d'une équation unique aux différentielles totales.

Dans la méthode du trièdre mobile de M. E. Cartan, on a

$$\varpi_{12} = h\varpi_1 + k\varpi_2$$

avec

(7) $$d\varpi_1 = h[\varpi_1\varpi_2], \quad d\varpi_2 = k[\varpi_1\varpi_2]$$

et

$$\varpi_{13} = a\varpi_1, \quad \varpi_{23} = c\varpi_2.$$

Or, deux des conditions d'intégrabilité s'écrivent

(8) $$a_2 = h(a - c), \quad c_1 = k(a - c).$$

Dans ces formules, les indices 1 et 2 qui affectent c et a désignent des dérivées relatives à ϖ_1, ϖ_2, suivant le schéma

$$df = f_1\varpi_1 + f_2\varpi_2.$$

Introduisons pareillement les dérivées T_1f, T_2f relatives à θ_1, θ_2, vérifiant

$$df = T_1f\theta_1 + T_2f\theta_2,$$

de sorte que, compte tenu de (1),

$$(9)\qquad T_1f = \frac{f_1}{\sqrt{a-c}}, \quad T_2f = \frac{f_2}{\sqrt{a-c}}.$$

La différentiation extérieure de (1) donne

$$(10)\qquad \rho = +\frac{1}{a-c}\left(\frac{h\sqrt{a-c}}{2} + \frac{c_2}{2\sqrt{a-c}}\right),$$

$$\sigma = -\frac{1}{a-c}\left(\frac{k\sqrt{a-c}}{2} + \frac{a_1}{2\sqrt{a-c}}\right),$$

d'où, en résolvant,

$$a_1 = -k(a-c) - 2(a-c)^{\frac{3}{2}}\sigma, \quad c_2 = -h(a-c) + 2(a-c)^{\frac{3}{2}}\rho.$$

Par conséquent, en tenant compte de (8),

$$(11)\qquad T_1(a+c) = -2(a-c)\sigma, \quad T_2(a+c) = 2(a-c)\rho,$$

et, puisque $a + c = 2H$, les deux équations de Codazzi se condensent, comme annoncé, en une équation aux différentielles totales,

$$(12)\qquad dH = 2A(-\sigma\theta_1 + \rho\theta_2),$$

que nous utiliserons plutôt sous la forme équivalente,

$$(13)\qquad dH = -2A(r\omega_1 + s\omega_2).$$

3. Supposons que les lignes $H = C$ forment une famille de courbes isothermes sur la surface. Il existe, en conséquence, des paramètres isotropes u, v, respectivement intégrales premières de ω_1, ω_2, tels que l'on ait $H = f(u+v)$. Nous prenons u et v imaginaires conjuguées, si bien que $u + v$ est une fonction harmonique réelle sur la surface. La variable complexe v sera dite *attachée* aux courbes $H = C$, en ce sens que les courbes $H = C$ s'obtiennent en égalant à une constante la partie réelle de v. Puisque $H = f(u + v)$, l'équation $dH = 0$, équivalente d'après (13) à $r\omega_1 + s\omega_2 = 0$, doit être équivalente à $du + dv = 0$. Or, posons $\omega_1 = \alpha(u, v)du$, $\omega_2 = \beta(u, v)dv$, nous aurons, d'après (4),

$$r = -\frac{\alpha_v}{\alpha\beta}, \quad s = -\frac{\beta_u}{\alpha\beta}$$

et

$$r\omega_1 + s\omega_2 = -\frac{\alpha_v}{\beta}du - \frac{\beta_u}{\alpha}dv;$$

cette dernière expression ne contiendra $du + dv$ en facteur que si

$$\frac{\alpha_v}{\beta} = \frac{\beta_u}{\alpha}, \text{ ou } \alpha\alpha_v = \beta\beta_u,$$

c'est-à-dire, si la forme $\alpha^2du + \beta^2dv$ est une différentielle exacte $d\psi$, si, par conséquent, $\alpha = \sqrt{\psi_u}$, $\beta = \sqrt{\psi_v}$, et

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

(14) $$\omega_1 = \sqrt{\psi_u}\, du\,, \quad \omega_2 = \sqrt{\psi_v}\, dv\,,$$

d'où cette proposition: *si les lignes d'égale courbure moyenne d'une surface forment une famille de courbes isothermes, il existe des coordonnées isotropes u, v, et une fonction $\psi(u, v)$ telles que les formes minima s'écrivent $\omega_1 = \sqrt{\psi_u}\, du$, $\omega_2 = \sqrt{\psi_v}\, dv$, tandis que la courbure moyenne est $H = f(u+v)$.*

Nous appellerons $\psi(u, v)$ la *fonction primitive* de la surface HI, pour rappeler que les formes minima d'une telle surface se déduisent de ψ par des dérivations.

4. Désignons par ϕ_1 la forme $r\omega_1 + s\omega_2$, et par ϕ_2, $i(r\omega_1 - s\omega_2)$, les lignes $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ sont orthogonales, car

(15) $$\phi_1^2 + \phi_2^2 = (2Ars)\left(\frac{2\omega_1\omega_2}{A}\right),$$

et le second facteur du second membre est l'élément linéaire de la surface (formule (3)). Posons ensuite

(16) $$d\phi_1 = R\,[\phi_1\,\phi_2]\,, \qquad d\phi_2 = S\,[\phi_2\,\phi_1]\,.$$

La forme

(17) $$\chi = S\phi_1 + R\phi_2$$

est importante à considérer, comme nous allons le voir; elle s'écrit, en tenant compte des formules

(18) $$S = \frac{r^2 + s^2 - s_1 - r_2}{2rs}\,, \quad R = i\,\frac{r^2 - s^2 + s_1 - r_2}{2rs}\,,$$

qui s'obtiennent par différentiation extérieure,

(19) $$\chi = \left(s - \frac{s_1}{s}\right)\omega_1 + \left(r - \frac{r_2}{r}\right)\omega_2.$$

(Dans les deux formules précédentes, les indices 1 et 2 affectant r et s désignent des dérivées relatives à ω_1 et ω_2; il en sera de même par la suite.)

Si $H = f(u+v)$, ce qui entraîne (14), on trouve que χ est une différentielle exacte, à savoir

(20) $$\chi = d\,\log\frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}.$$

Réciproquement, si χ est une différentielle exacte, $e^{\int\chi}$ est facteur intégrant à la fois pour ϕ_1 et ϕ_2, car on vérifie sans peine que

$$d(e^{\int\chi}\phi_1) = 0, \quad d(e^{\int\chi}\phi_2) = 0.$$

On peut donc poser

$$e^{\int\chi}\phi_1 = dp, \quad e^{\int\chi}\phi_2 = dq,$$

et, par suite, l'élément linéaire de la surface devient, d'après (15),

$$\frac{e^{-2\int\chi}}{2Ars}\,(dp^2 + dq^2)\,,$$

ce qui montre que les lignes $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$, c'est-à-dire les lignes $H = C$ et leurs trajectoires orthogonales, forment un système isotherme. D'où la proposition: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit à courbure moyenne isotherme* (*surface HI*), *c'est que la forme* χ, *de la formule* (19), *soit une différentielle exacte.*

Les formules spéciales aux surfaces HI sont résumées ci-dessous:

$$(21)\quad \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\psi_u}\, du, \qquad \omega_2 = \sqrt{\psi_v}\, dv, \\ r = -\dfrac{\psi_{uv}}{2\psi_u\sqrt{\psi_v}}, \qquad s = -\dfrac{\psi_{uv}}{2\psi_v\sqrt{\psi_u}}, \\ r\omega_1 + s\omega_2 = \phi_1 = -\dfrac{\psi_{uv}}{2\sqrt{\psi_u\psi_v}}(du + dv), \ \chi = d\log\dfrac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}, \\ H = f(u+v), \qquad A = \dfrac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}} f'(u+v). \end{cases}$$

5. Les deux formes quadratiques d'une surface HI s'écrivent

$$(22)\qquad ds^2 = 2\frac{\psi_{uv}}{f'(u+v)}(du + dv),\ \phi = \psi_u du^2 + 2f\frac{\psi_{uv}}{f'}dudv + \psi_v dv^2$$

Elles ne contiennent que les deux fonctions $\psi(u, v)$ et $f(u + v)$. Ces deux fonctions sont d'ailleurs liées par la 3^e condition d'intégrabilité, qui traduit le *theorema egregium* de Gauss. Quand on écrit les formes

$$ds^2 = 2\,F\,dudv,\ \phi = Ldu^2 + 2\,Mdudv + Ndv^2,$$

ce théorème s'exprime par

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(\log F) \qquad (\mathbf{K} = H^2 - A^2 \text{ courbure totale}).$$

Cette formule devient ici, compte tenu des expressions de H, A et F,

$$(23)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\log|f'(t)| = \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\log|\psi_{uv}| + \psi_{uv}\frac{f^2}{f'} - \frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}f' \qquad (t = u + v).$$

On remarquera que, sur une surface réelle, ψ_{uv} et $f'(u + v)$ sont de même signe, d'après la première équation (22), mais ce signe peut être quelconque.

Dans ce qui précède, nous avons supposé implicitement que $\psi(u, v)$ n'était pas une fonction harmonique sur la surface; au cas contraire, on aurait $\psi = U + V$, $\omega_1 = \sqrt{U'}du$, $\omega_2 = \sqrt{V'}dv$, ω_1 et ω_2 seraient des différentielles exactes, d'où, d'après (4), r et s seraient nuls, et, d'après (13), H serait constant. Quand nous parlerons de surfaces HI, nous supposerons toujours que H n'est pas constant, et, partant, que ψ n'est pas une fonction harmonique sur la surface.

6. La fonction primitive $\psi\,(u, v)$ n'est pas invariante, car la fonction harmonique $t = u + v$, qui intervient dans sa définition, n'est pas définie univoquement; elle n'est assujettie qu'à la condition d'être constante sur les lignes $H = C$. On peut la remplacer par $\bar{t} = at + b$ (a, b, constantes). Dans ce changement, $\psi_u du^2$, qui est ω_1^2, devient $a\psi_{\bar{u}}\,.\,\dfrac{d\bar{u}^2}{a^2} = \psi_{\bar{u}}\dfrac{d\bar{u}^2}{a}$, ce qui peut bien s'écrire $\bar{\psi}_{\bar{u}}d\bar{u}^2$, mais à condition de poser $\bar{\psi} = \dfrac{\psi}{a}$. Ainsi, quand on remplace t par $at + b$, ψ doit être remplacé par $\dfrac{\psi}{a}$, de sorte que ψdt reste invariant.

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

Les *courbes primitives*, $\psi(u, v) = C$, de la surface *HI*, sont dans une relation remarquable avec les courbes $H = C$ et les lignes de courbure. De leur équation différentielle, $\psi_u du + \psi_v dv = 0$, qui s'écrit aussi $\sqrt{\psi_u}\omega_1 + \sqrt{\psi_v}\omega_2 = 0$, on déduit qu'elles coupent les premières lignes de courbure sous un angle α donné par

$$e^{2i\alpha} = -\frac{\sqrt{\psi_u}}{\sqrt{\psi_v}};$$

or, les lignes $H = C$ ont pour équation $r\omega_1 + s\omega_2 = 0$, c'est-à-dire, $\sqrt{\psi_v}du + \sqrt{\psi_u}dv = 0$; elles coupent donc les premières lignes de courbure sous un angle β qui vérifie

$$e^{2i\beta} = -\frac{\sqrt{\psi_v}}{\sqrt{\psi_u}} = e^{-2i\alpha},$$

donc $\beta = -\alpha$, et nous avons la proposition: *sur une surface HI, les lignes primitives et les lignes d'égale courbure moyenne sont bissectées par les lignes de courbure.*

7. La proposition énoncée au n° 4 nous permet d'obtenir sous forme invariante l'équation différentielle des surfaces *HI*. La condition que la forme χ soit une différentielle exacte s'exprime en effet par une relation du 5^e ordre, qui n'est autre que l'équation cherchée. Elle s'écrit

$$r_1 - [(\log r)_{21} - s(\log r)_2] = s_2 - [(\log s)_{12} - r(\log s)_1].$$

Introduisons le second paramètre différentiel de Beltrami, dont l'expression, pour une fonction f quelconque, est

$$\Delta_2 f = 2A(f_{21} - sf_2)\text{, et aussi, } 2A(f_{12} - rf_1).$$

L'équation précédente devient

$$r_1 - \frac{\Delta_2(\log r)}{2A} = s_2 - \frac{\Delta_2(\log s)}{2A}$$

ou enfin

$$\Delta_2\left(\log\frac{r}{s}\right) = 2A(r_1 - s_2), \tag{24}$$

qui est, en définitive, l'équation des surfaces *HI*. On peut du reste la formuler autrement.

β étant toujours l'angle sous lequel les courbes $H = C$ coupent les premières lignes de courbure, on a

$$e^{2i\beta} = -\frac{r}{s},$$

donc

$$\Delta_2\left(\log\frac{r}{s}\right) = 2i\Delta_2\beta.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

Par ailleurs, la forme $s\omega_1+r\omega_2$ a pour différentielle extérieure $(r_1-s_2)[\omega_1\omega_2]$, donc

$$r_1 - s_2 = \frac{d(s\omega_1 + r\omega_2)}{[\omega_1\omega_2]}$$

et l'équation (24) devient

$$i\Delta_2\beta = A\,\frac{d(s\omega_1 + r\omega_2)}{[\omega_1\omega_2]}. \tag{25}$$

Nous retrouverons la forme $s\omega_1+ r\omega_2$ au paragraphe suivant.

II. Surfaces HI isothermiques

8. Une surface est isothermique si les arcs élémentaires des lignes de courbure ont un facteur intégrant commun. D'après (1) et (2), les formes minima en auront un aussi. Appelons-le μ, et exprimons que $\mu\omega_1$ et $\mu\omega_2$ sont des différentielles exactes; il vient

$$\mu_2 - r\mu = 0, \quad \mu_1 - s\mu = 0$$

d'où

$$\frac{d\mu}{\mu} = s\omega_1 + r\omega_2,$$

ce qui s'énonce: *sur toute surface isothermique, la forme $s\omega_1+ r\omega_2$ est une différentielle exacte, et $e^{\int s\omega_1+r\omega_2}$ est un facteur intégrant à la fois pour ω_1 et pour ω_2.*

Pour rappeler ce rôle de $s\omega_1+ r\omega_2$, nous l'appellerons la *forme isothermique* de la surface. L'équation différentielle des surfaces isothermiques se déduit de ce qui précède; en exprimant que $s\omega_1+ r\omega_2$ est une différentielle exacte, on trouve l'équation

$$r_1 - s_2 = 0\,;$$

elle est du quatrième ordre.

Les lignes de courbure des surfaces isothermiques forment un réseau isotherme; on peut donc leur attacher une variable complexe z. Pour cela, posons

$$e^{\int s\omega_1+r\omega_2}\,\omega_1 = dz_0, \quad e^{\int s\omega_1+r\omega_2}\,\omega_2 = dz \tag{26}$$

$$(z_0 = x - iy, \ z = x + iy).$$

La variable complexe z répond à la question, car on voit, d'après (1) et (2), que

$$dx = \sqrt{\frac{A}{2}}\,e^{\int s\omega_1+r\omega_2}\,\varpi_1, \quad dy = \sqrt{\frac{A}{2}}\,e^{\int s\omega_1+r\omega_2}\,\varpi_2, \tag{27}$$

ce qui montre qu'on obtient bien les premières lignes de courbure, $\varpi_2 = 0$, en égalant à une constante la partie imaginaire de z, et les secondes, la partie réelle.

9. Soit maintenant une surface à la fois HI et isothermique. La formule (25) montre qu' alors, l'angle β sous lequel les lignes $H = C$ coupent les premières lignes de courbure est une fonction harmonique, ce qui s'explique, puisque les lignes $H = C$ sont isothermes. Il s'ensuit que, dans ce cas, les courbes primitives $\psi(u\,,v) = C$ sont isothermes, elles aussi, car elles coupent les premières lignes de courbure sous un angle α qui, d'après le n° **6**, vaut $-\beta$, et,

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

par conséquent, est harmonique. ψ est donc une fonction de fonction harmonique: $\psi = g(U + V)$.

Ce résultat se vérifie facilement par le calcul. En effet, la forme isothermique, sur une surface HI, s'écrit d'après (21),

$$s\omega_1 + r\omega_2 = -\frac{1}{2}\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}\,d\psi. \tag{28}$$

Pour que la surface soit isothermique, il faut donc, et il suffit, que $\dfrac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}$, ou $\dfrac{\Delta_2\psi}{\Delta_1\psi}$, soit fonction de ψ. Or cela signifie précisément que les courbes $\psi = C$ sont isothermes, que ψ, par conséquent, est de la forme $g(U + V)$. Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface HI soit isothermique, c'est que la fonction primitive ψ puisse s'écrire* $g(U + V)$.

U et V sont imaginaires conjuguées. On peut regarder V comme la variable complexe attachée au réseau isotherme formé des courbes primitives et de leurs trajectoires orthogonales.

Les trois variables complexes v, z, et V sont trois intégrales premières de ω_2, elles sont donc fonction l'une de l'autre. En particulier, V est fonction de $x + iy$:

$$V = P(x, y) + iQ(x, y) \qquad (\text{et } U = P(x, y) - iQ(x, y))$$

de telle sorte que

$$U + V = 2P \quad \text{et} \quad \psi = g(2P).$$

Pour une surface HI isothermique, les formules (26) se simplifient. Exprimons d'abord le facteur intégrant $e^{\int s\omega_1 + r\omega_2}$. On a vu que

$$s\omega_1 + r\omega_2 = -\frac{1}{2}\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}\,d\psi.$$

Or, puisque $\psi = g(U + V)$, on a, inversement, $U + V = G(\psi)$, et

$$\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v} = \frac{g''}{g'^2} = -\frac{G''(\psi)}{G'(\psi)};$$

donc, à un facteur constant près,

$$e^{\int s\omega_1 + r\omega_2} = \sqrt{G'(\psi)}$$

et, par suite,

$$e^{\int s\omega_1 + r\omega_2}\,\omega_2 = \sqrt{G'(\psi)}\cdot\sqrt{\psi_v}\,dv = \sqrt{G_v}\,dv = \sqrt{V'}\,dv.$$

Les formules (26) deviennent donc

$$dz_0 = \sqrt{U'}\,du, \quad dz = \sqrt{V'}\,dv. \tag{29}$$

Cette dernière formule peut s'écrire

$$dz^2 = dV dv,$$

ce qui met en évidence le fait, énoncé au n° **6**, que les lignes de courbure bissectent les lignes $H = C$ et $\psi = C$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

III. Surfaces HI isothermiques et W

10. Si la surface est W, c'est-à-dire, s'il existe une relation entre H et A, la formule (13) montre que $r\omega_1 + s\omega_2$ est une différentielle exacte, et réciproquement. De là découle l'équation différentielle des surfaces W: en exprimant que $r\omega_1 + s\omega_2$ a une différentielle extérieure nulle, on trouve l'équation du 4^e ordre

$$s_1 - r_2 + r^2 - s^2 = 0,$$

qui peut s'écrire aussi

$$\frac{s - \dfrac{s_1}{s}}{r} = \frac{r - \dfrac{r_2}{r}}{s};$$

sur les surfaces W, χ et ϕ_1 ne sont donc pas indépendantes; c'est ce qui ressort de la relation (n° **4**)

$$d\phi_1 = [\phi_1 \chi].$$

11. Si une surface est à la fois W et isothermique, les formes $r\omega_1 + s\omega_2$ et $s\omega_1 + r\omega_2$ sont, l'une et l'autre, des différentielles exactes. Posons donc

$$s\omega_1 + r\omega_2 = \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad r\omega_1 + s\omega_2 = \frac{d\mu}{\mu}.$$

Par addition, puis par soustraction, il vient

$$(s + r)(\omega_1 + \omega_2) = d \log(\lambda\mu), \quad (s - r)(\omega_1 - \omega_2) = d \log \frac{\lambda}{\mu}.$$

Or, $\omega_1 + \omega_2$ est proportionnel à ϖ_1, lui-même proportionnel à dx, d'après (27). Donc $\lambda\mu$ ne dépend que de x et, de même, $\dfrac{\lambda}{\mu}$ ne dépend que de y. Par conséquent

$$\lambda = X(x)\,Y(y), \qquad \mu = \frac{X(x)}{Y(y)}$$

d'où cette proposition: *sur toute surface W isothermique, la forme isothermique est la différentielle logarithmique d'une fonction $X(x)\,Y(y)$, et la forme $\phi_1 = r\omega_1 + s\omega_2$ est la différentielle logarithmique d'une fonction $X(x)/Y(y)$, x et y étant les variables harmoniques associées qui restent constantes le long des lignes de courbure.*

12. Passons à l'examen du cas où la surface serait à la fois HI, isothermique, et W. Nous avons obtenu le résultat suivant, que nous croyons nouveau: *les seules surfaces qui soient à la fois HI, isothermiques, et W sont, outre les surfaces de révolution, les cylindres, et certains cônes, celles sur lesquelles la fonction primitive ψ est de la forme k $\log$ $(U + V)$, U et V étant telles que $\dfrac{U'V'}{(U+V)^2}$ ne dépende que de $u + v$.* Ces dernières surfaces, nous le verrons par la suite, sont les surfaces d'Ossian Bonnet de troisième classe.

La condition que la surface HI soit isothermique se traduit par $\psi = g(U + V)$ (n° **9**); celle que cette surface soit W, si l'on tient compte de l'expression de A (formule 21), s'exprime par

$$\frac{\psi_{uv}}{\sqrt{\psi_u \psi_v}} = \rho(u + v).$$

En combinant ces deux conditions, on obtient

$$\sqrt{U'V'} = \rho(u + v) \cdot \frac{g'(U + V)}{g''(U + V)}. \tag{30}$$

On satisfait à cette équation en supposant que $U + V$ est fonction de $u + v$, une fonction linéaire naturellement. A cause de l'indétermination qui subsiste dans la définition de u et v (n° **6**), on peut alors prendre simplement $U = u$ $V = v$. Les formes quadratiques d'une telle surface seraient

$$ds^2 = 2\frac{g''(u + v)}{f'(u + v)} dudv,$$

$$\phi = g'(u + v)du^2 + 2f(u + v)\frac{g''(u + v)}{f'(u + v)} dudv + g'(u + v)dv^2.$$

Tous les coefficients sont fonction de $u + v$. Les surfaces correspondantes admettent donc une infinité de déplacements sur elles-mêmes, par $u' = u + ia$, $v' = v - ia$, et une infinité de symétries par $u' = v + ib$, $v' = u - ib$. Les lignes $u + v =$ const., qui glissent sur elles-mêmes et admettent des symétries par rapport à des plans, ne peuvent être que des droites ou des cercles. Si ce sont des cercles, on a des *surfaces de révolution*, c'est le cas général. Si ce sont des droites, c'est-à-dire si $g' = Cf$, on a des *cylindres*. Nous n'insistons pas davantage sur ce cas simple.

13. Pour écarter la solution précédente, supposons que $U + V = \tau$ et $u + v = t$ soient des fonctions *indépendantes*. On doit déterminer $g(\tau)$ et les fonctions $U(u)$ et $V(v)$ pour que (30) soit satisfaite, mais il faut en outre que l'équation de Gauss (23) soit vérifiée; celle-ci s'écrit, en appelant $\mathbf{K}$ la courbure totale,

$$\frac{d^2}{dt^2} \log |f'| = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log |\psi_{uv}| + \frac{\psi_{uv}}{f'} \mathbf{K}. \tag{31}$$

La courbure totale $\mathbf{K}$ est, ici, fonction de t. Par ailleurs, $\psi = g(\tau)$ donne $\psi_{uv} = g''U'V'$, si bien que

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log |\psi_{uv}| = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log |g''| = \frac{d^2}{d\tau^2} \log |g''| \cdot U'V',$$

ou, en tenant compte de (30)

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log |\psi_{uv}| = \rho^2(t) \cdot \frac{g'^2}{g''^2} (\log |g''|)''.$$

L'équation (31) devient donc, en utilisant de nouveau (30) pour exprimer ψ_{uv},

$$\frac{d^2}{dt^2} \log |f'| = \rho^2 \cdot \frac{g'^2}{g''^2} (\log |g''|)'' + \frac{g'^2}{g''} \cdot \frac{\rho^2}{f'} \mathbf{K}. \tag{32}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

Dérivons par rapport à τ qui, par hypothèse, est indépendant de t:

$$(33) \qquad 0 = \left\{\frac{g'^2}{g''^2}(\log|g''|)''\right\}'_\tau + \frac{\mathbf{K}(t)}{f'(t)}\left(\frac{g'^2}{g''}\right)'_\tau .$$

Nous avons divisé par ρ^2 qui ne peut être nul, d'après (30), sans que g'' le soit, c'est-à-dire, sans que ψ soit harmonique, ce qui est exclu.

A. L'équation (33) est satisfaite si $\left(\frac{g'^2}{g''}\right)'_\tau = 0$; cela donne, en effet, $\frac{g'^2}{g''} = \frac{1}{m}$, d'où, comme le montre un calcul facile, $\frac{g'^2}{g''^2}(\log|g''|)'' = 2$. Cette solution s'écrit aussi $\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v} = m$: c'est une condition qui, nous le verrons plus loin, caractérise les surfaces d'Ossian Bonnet. En l'intégrant, on trouve

$$\psi = -\frac{1}{m}\log(U+V).$$

L'équation (30) donne alors

$$\frac{\sqrt{U'V'}}{U+V} = -\rho(u+v),$$

et nous montrerons (n° **24**) que cette condition détermine U, V, et ρ. L'équation de Gauss (32) devient

$$\frac{d^2}{dt^2}\log|f'| = 2\rho^2 + \frac{1}{m}\frac{\rho^2}{f'}\left(f^2 - \frac{f'^2}{\rho^2}\right).$$

Quand ψ, (c'est-à-dire U et V), a été déterminé, et ρ en conséquence, f n'est assujettie qu'à vérifier cette équation différentielle du troisième ordre: il y a donc une triple infinité de surfaces essentiellement différentes correspondant à la même fonction primitive ψ.

14. B. Cherchons à satisfaire (33) autrement, en supposant $\left(\frac{g'^2}{g''}\right) \neq 0$; elle peut alors s'écrire

$$(34) \qquad \frac{\left\{\frac{g'^2}{g''^2}(\log|g''|)''\right\}'_\tau}{\left(\frac{g'^2}{g''}\right)'_\tau} = -\frac{\mathbf{K}(t)}{f'(t)}.$$

La valeur commune de ces rapports ne peut être qu'une constante, soit a, d'où en intégrant ce qui concerne g,

$$(35) \qquad \frac{g'^2}{g''^2}(\log|g''|)'' = a\frac{g'^2}{g''} + b.$$

Mais, de l'équation (30), on peut déduire une autre équation différentielle

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

que doit vérifier g. Prenons le logarithme des deux membres, et dérivons d'abord par rapport à u, puis par rapport à v, il vient

$$0 = (\log\ \rho)''_{t^2} + \left(\log \frac{g'}{g''}\right)''_{\tau^2} U'V',$$

ou, en remplaçant $U'V'$ au moyen de (30), et séparant les variables,

$$\frac{\left(\log \frac{g''}{g'}\right)''_{\tau^2}}{\frac{g''^2}{g'^2}} = \frac{(\log \rho)''_{t^2}}{\rho^2}. \tag{36}$$

Comme précédemment, la valeur commune de ces rapports est une constante, c, d'où, pour g,

$$\left(\log \frac{g''}{g'}\right)'' = c\frac{g''^2}{g'^2}. \tag{37}$$

Il faut chercher les solutions communes à (35) et (37). Eliminant $(\log |g''|)''$ entre ces deux équations, il vient

$$(\log |g'|)'' = ag'' + (b - c)\frac{g''^2}{g'^2}, \tag{38}$$

qui peut s'écrire

$$\frac{g'''}{g''} = ag' + (b - c + 1)\frac{g''}{g'},$$

ou encore

$$(\log |g''|)' = ag' + (b - c + 1)(\log |g'|)'.$$

Dérivons en tenant compte de (35) et de (38):

$$ag'' + b\frac{g''^2}{g'^2} = ag'' + (b - c + 1)\left[ag'' + (b - c)\frac{g''^2}{g'^2}\right],$$

et, en divisant par g'', qui n'est pas nul, puisque ψ n'est pas harmonique,

$$[c - (b - c)^2]\frac{g''}{g'^2} = a(b - c + 1). \tag{39}$$

Or notre hypothèse actuelle est que $\frac{g''}{g'^2}$ n'est pas une constante; il faut donc que (39) s'évanouisse, c'est-à-dire qu'on ait

$$c = (b - c)^2 \text{ et } a(b - c + 1) = 0,$$

d'où deux hypothèses possibles:

$$(a) \qquad c = (b - c)^2, \quad b - c + 1 = 0,$$

$$(b) \qquad c = (b - c)^2, \quad a = 0.$$

15. L'hypothèse (a) équivaut à $c = 1, b = 0$. L'équation (35) donne alors $(\log |g''|)'' = ag''$, d'où $\log |g''| = ag + p\tau + q$. L'équation (37) devient

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

$(\log|g''|)'' = (\log|g'|)'' + \dfrac{g''^2}{g'^2}$. Portons-y la valeur trouvée pour $\log|g''|$, et développons le second membre:

$$ag'' = \frac{g'''}{g'}, \text{ d'où } \log|g''| = ag + q,$$

ce qui est compatible avec l'expression antérieure, en y faisant $p = 0$. Ainsi g peut être déterminée de façon à satisfaire (35) et (37).

Cherchons maintenant à déterminer $f(t)$. L'équation (34) donne

$$\mathbf{K} = -af'.$$

Or $\mathbf{K} = H^2 - A^2 = f^2 - \dfrac{f'^2}{\rho^2}$; l'équation ci-dessus donne donc $\rho^2 = \dfrac{f'^2}{f^2 + af'}$.

Mais on a, d'après (36), $(\log \rho)'' = \rho^2$, ce qui, exprimé en f, devient

$$(40) \qquad (\log f'^2)'' - [\log (f^2 + af')]'' = \frac{2f'^2}{f^2 + af'}.$$

Par ailleurs, f doit satisfaire à l'équation (32), qui, compte tenu de l'expression trouvée pour $\log|g''|$, se réduit à

$$(41) \qquad \frac{d^2}{dt^2} \log|f'| = 0.$$

Les équations (40) et (41) n'ont aucune solution commune, comme on s'en assure sans peine: l'hypothèse (a) ne donne donc rien.

16. Dans l'hypothèse (b), on a

$$c = (b - c)^2, \quad a = 0.$$

De $a = 0$, on déduit que, dans (33), le premier terme du second membre est nul (d'après (35)); il faut donc que le second soit nul aussi, donc $\mathbf{K} = 0$, les surfaces seront *développables*. Ce seront des développables sans arête de rebroussement, puisqu'elles doivent être isothermiques; ce ne seront pas des cylindres, pour lesquels τ et t ne seraient pas indépendants (n° **12**): ce seront donc des *cônes*. L'équation (35) se réduit à

$$\frac{g'^2}{g''^2}(\log|g''|)'' = b;$$

on calcule c par (37). Portant ces expressions de b et c dans $c = (b - c)^2$, on trouve, après simplification,

$$\frac{g''^2}{g'^2}\left(\log \frac{g''}{g'}\right)'' = [(\log g')'']^2,$$

d'où l'on tire $g' = (p\tau + q)^\alpha$, ou plus simplement, puisque τ n'est défini qu'à une transformation linéaire près,

$$g' = \tau^\alpha. \qquad \left(b = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}, \; c = \frac{1}{\alpha^2}\right).$$

On doit écarter $\alpha = -1$, car cela entraînerait $\dfrac{g''}{g'^2} = \text{const.}$, ce qui est exclu.

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

Donc $g = \dfrac{1}{\alpha+1}\tau^{\alpha+1}$, c'est-à-dire, $\psi = \dfrac{1}{\alpha+1}(U+V)^{\alpha+1}$.

Voyons si l'on peut déterminer $f(t)$. Puisque $\mathbf{K} = 0$, on a $f^2 - \dfrac{f'^2}{\rho^2} = 0$, donc $\rho^2 = \dfrac{f'^2}{f^2}$. L'équation de Gauss (32) devient

$$\frac{d^2}{dt^2}\log|f'| = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\frac{f'^2}{f^2}, \tag{42}$$

et (36) donne, puisque $c = \dfrac{1}{\alpha^2}$, $(\log\rho)'' = \dfrac{\rho^2}{\alpha^2}$, ou, en remplaçant ρ par sa valeur

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\left|\frac{f'}{f}\right| = \frac{1}{\alpha^2}\frac{f'^2}{f^2}. \tag{43}$$

Retranchant (42) de (43), on obtient $\dfrac{d^2}{dt^2}\log|f| = -\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{f'^2}{f^2}$, d'où, par un choix convenable de l'origine des t, $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{\alpha}{t}$, ce qui donne

$$f = \left(\frac{t}{h}\right)^{\alpha} \text{ et } \rho^2 = \frac{\alpha^2}{t^2}.$$

Reste à déterminer la forme de $U(u)$ et $V(v)$, par (30), qui, étant donné que $g' = \tau^{\alpha}$ et $\rho^2 = \dfrac{\alpha^2}{t^2}$, s'écrit

$$\frac{U'V'}{(U+V)^2} = \frac{1}{t^2}. \tag{44}$$

Cette équation sera étudiée plus loin (n° **24**); contentons-nous d'indiquer ici le résultat. La solution $U = u$, $V = v$ n'étant pas acceptable, puisque $U+V$ doit être indépendant de $u+v$, on doit prendre

$$U = \frac{1}{ku}, \qquad V = \frac{1}{kv}$$

d'où

$$\psi = \frac{1}{k^{\alpha+1}(\alpha+1)}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^{\alpha+1}, \quad f = \left(\frac{t}{h}\right)^{\alpha}.$$

On peut remplacer u et v par hu et hv, à condition de remplacer ψ par $\dfrac{\psi}{h}$, et l'on obtient ainsi

$$\psi = \frac{m}{\alpha+1}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^{\alpha+1}, \quad f = t^{\alpha}, \text{ avec } m = \frac{1}{(\alpha+1)k^{\alpha+1}h^{\alpha}}.$$

Les formes quadratiques de la surface sont

$$ds^2 = 2m\frac{dudv}{(uv)^{\alpha+1}}, \quad \phi = -m\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^{\alpha}\left(\frac{du}{u}-\frac{dv}{v}\right)^2. \tag{45}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

Pour la réalité il faut $m > 0$. Introduisons des paramètres réels r et θ par

$$u = re^{i\theta}, \quad v = re^{-i\theta} \qquad (r > 0)$$

les formes deviennent

$$(45') \qquad ds^2 = 2m\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^{2\alpha+2}}, \quad \phi = 4m\frac{(2\cos\theta)^\alpha}{r^\alpha}d\theta^2.$$

En posant

$$Z_0 = \frac{\sqrt{2m}}{|\alpha|}\frac{1}{u^\alpha}, \qquad Z = \frac{\sqrt{2m}}{|\alpha|}\frac{1}{v^\alpha},$$

on applique la surface sur un plan, car le ds^2 devient $dZdZ_0$, ou, en coordonnées polaires $Z = Re^{i\Omega}$, $ds^2 = dR^2 + R^2d\Omega^2$, avec les relations

$$R = \frac{\sqrt{2m}}{|\alpha| r^\alpha}, \quad \Omega = -\alpha\theta,$$

et la seconde forme s'écrit $\phi = \dfrac{2\sqrt{2m}}{|\alpha|}R\left(2\cos\dfrac{\Omega}{\alpha}\right)^\alpha d\Omega^2$. Les génératrices $\Omega = C$ de la surface sont représentées sur le plan par les demi-droites issues de l'origine, ce qui montre bien qu'il s'agit de cônes. Les droites $\Omega = \pm\pi\dfrac{\alpha}{2}$ du plan représentent des génératrices d'inflexion, si $\alpha > 0$, des génératrices de rebroussement, si $\alpha < 0$. Nous n'envisageons qu'une portion du cône comprise entre deux génératrices de cette sorte, portion qui, sur le plan (v), serait représentée sur le demi-plan de droite; le cône entier s'obtient à partir d'une telle portion par des symétries relativement à des plans ou à des droites.

Si l'on coupe le cône par la sphère unité centrée à son sommet, on trouve une courbe dont la courbure géodésique, relativement à la sphère, est identique à la courbure normale de la même courbe relativement au cône, c'est-à-dire à $\dfrac{2\sqrt{2m}}{|\alpha|}\left(2\cos\dfrac{\Omega}{\alpha}\right)^\alpha$. Comme l'arc élémentaire de cette courbe est $ds = d\Omega$, son équation intrinsèque est

$$(46) \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{2\sqrt{2m}}{|\alpha|}\left(2\cos\frac{s}{\alpha}\right)^\alpha.$$

On constate bien qu' elle présente, pour $s = \pm\dfrac{\pi\alpha}{2}$, des inflexions si $\alpha > 0$, des rebroussements si $\alpha < 0$.

Nous savons que, sur ce cône, les lignes $H = C$, $\psi = C$ sont des courbes isothermes. Dans l'application, elles deviennent des courbes isothermes du plan, qu'il est facile de déterminer. Les courbes $H = C$ ont pour équation $u + v = C$, ou $r\cos\theta = C$, ce qui devient, en coordonnées R et Ω, $R^{-\frac{1}{\alpha}}\cos\dfrac{\Omega}{\alpha} = C$; ce sont les courbes obtenues en égalant à une constante la partie réelle de la fonction analytique $Z^{-\frac{1}{\alpha}}$. L'équation des courbes $\psi = C$ est $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = C$, ou

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

$\frac{1}{r}\cos\theta = 0$, c'est-à-dire $R^{\frac{1}{a}}\cos\frac{\Omega}{a} = C$. Sur le plan, les courbes $\psi = C$ sont les inverses des courbes $H = C$, dans une inversion de pôle 0. Cette inversion conserve les droites passant par 0 et les cercles centrés en 0, images des lignes de courbure: on vérifie que les lignes de courbure bissectent les lignes $H = C$ et $\psi = C$.

En rapprochant l'équation des courbes $\psi = C$ de l'expression de $\frac{1}{\rho_g}$ pour la courbe sphérique directrice du cône, on voit que, sur ces courbes, R varie proportionnellement à ρ_g, d'où cette proposition: *si l'on porte, à partir du sommet, sur chaque génératrice du cône, une longueur égale au rayon de courbure géodésique de la courbe sphérique intersection du cône et de la sphère unité, on obtient une courbe primitive du cône; les autres courbes primitives sont homothétiques à celle-là, les courbes d'égale courbure moyenne sont les inverses des précédentes, le centre d'homothétie et le pôle d'inversion étant le sommet du cône.*

On peut d'ailleurs remarquer que, sur tout cône, si l'on porte à partir du sommet, sur chaque génératrice, une longueur inverse du rayon de courbure géodésique de la courbe sphérique déterminée par le cône sur la sphère unité, la courbe obtenue est une ligne d'égale courbure moyenne. Il y a là un moyen de déterminer directement les cônes à courbure moyenne isotherme, et, par conséquent, de contrôler nos calculs. La fonction $f(s)$, qui figure dans l'équation intrinsèque $\rho_g = f(s)$ de la courbe sphérique directrice du cône, doit être telle que, dans le plan $Z = Re^{i\Omega}$, les courbes $Rf(\Omega) = C$, soient isothermes; on retrouve bien, comme le montre un calcul facile, $\frac{1}{\rho_g} = k\left(\cos\frac{s}{a}\right)^a$.

IV. Surfaces W applicables sur des surfaces de révolution

17. Le ds^2 d'une surface applicable sur une surface de révolution peut s'écrire $ds^2 = 2\ F(u+v)dudv$. La courbure totale $\mathbf{K}$ sera donc, elle aussi, fonction de $u + v$; nous supposerons que $\mathbf{K}$ n'est pas une constante.

Supposons en outre que la surface soit W; la courbure moyenne sera fonction de $\mathbf{K}$, donc de $u + v$, ce qui revient à dire que la surface sera à courbure moyenne isotherme, ou constante. N'examinons que le cas où la courbure moyenne est variable, $H = f(u + v)$. La fonction primitive de la surface sera donc telle que $\psi_{uv} = Ff'$; donc ψ_{uv} ne dépendra que de $u + v$. Par ailleurs, l'asphéricité A, dont l'expression est $\frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}f'$, dépend, elle aussi, uniquement de $u + v$; donc, le produit $\psi_u\psi_v$ est fonction de $u + v$. D'où ce premier résultat: *si une surface W, à courbure totale et à courbure moyenne variables, est applicable sur une surface de révolution, c'est une surface HI, sur laquelle ψ_{uv} et $\psi_u\psi_v$ sont fonction de $u + v$, comme H.*

Il est facile de trouver toutes les surfaces HI dont la fonction primitive jouit de ces deux propriétés; il suffit d'utiliser l'identité suivante, que nous avons déjà signalée ailleurs:

$$\psi_u\left(\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}\right)_v + \psi_v\left(\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}\right)_u = (\log \psi_u\psi_v)_{uv} - 2\frac{\psi_{uv}^2}{\psi_u\psi_v}. \tag{47}$$

18. Supposons que les deux fonctions de $u+v$, ψ_{uv} et $\psi_u\psi_v$ soient linéairement indépendantes, autrement dit, que le rapport $\dfrac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}$ ne soit pas constant. La formule (47) fournit alors une relation linéaire entre ψ_u et ψ_v, dont les coefficients ne dépendent que de $u+v$. Cette relation, jointe à l'expression de $\psi_u\psi_v$ en $u+v$, montre que ψ_u et ψ_v sont séparément fonction de $u+v$. Comme ψ_{uv} ne dépend, lui non plus, que de $u+v$, on a nécessairement des expressions telles que

$$\psi_u = g(u+v) - ia, \quad \psi_v = g(u+v) + ia.$$

On montre que ces surfaces sont, en général, des *hélicoïdes*, ou, si $a = 0$, des *surfaces de révolution*. Le cas particulier où l'on aurait $\psi_{uv} = Cf'$ correspondrait à un *cylindre* (n° **12**), mais il ne doit pas être retenu, puisque nous supposons la surface à courbure totale variable.

19. Supposons au contraire que le rapport $\dfrac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}$ soit constant; c'est une condition déjà rencontrée (n° **13** A), qui caractérise, comme nous le verrons, les surfaces d'Ossian Bonnet. Nous obtenons donc le théorème: *si une surface W, à courbures totale et moyenne variables, est applicable sur une surface de révolution, c'est, ou bien un hélicoïde, ou bien une surface de révolution, ou bien une surface d'Ossian Bonnet.*

V. Surfaces d'Ossian Bonnet

20. Les surfaces d'Ossian Bonnet sont les surfaces susceptibles d'une infinité de déformations avec conservation des courbures principales. Nous établissons d'abord leurs équations différentielles.

Soient S et $\overline{S}$ deux surfaces applicables l'une sur l'autre avec conservation des courbures principales. Leurs éléments linéaires respectifs sont $\dfrac{2\omega_1\omega_2}{A}$ et $\dfrac{2\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2}{\overline{A}}$. Comme $\overline{A} = A$, par hypothèse, l'isométrie exige

$$\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2 = \omega_1\omega_2. \tag{48}$$

La formule de Codazzi (13) donne d'autre part, puisque $\overline{H} = H$

$$\overline{r\omega_1} + \overline{s\omega_2} = r\omega_1 + s\omega_2. \tag{49}$$

Une surface est surface d'O. Bonnet si ces deux équations en $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ ont une infinité de solutions. L'équation (48) exige, compte tenu de la réalité, que

(50) $$\bar{\omega}_1 = e^{i\theta}\omega_1, \qquad \bar{\omega}_2 = e^{-i\theta}\omega_2,$$

où θ est l'angle que fait, après application, la première ligne de courbure de $\bar{S}$ avec la première ligne de courbure de S. (49) donne ensuite

(51) $$\bar{r} = re^{-i\theta}, \qquad \bar{s} = se^{i\theta}.$$

Mais en différentiant extérieurement (50), et remarquant que $[\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2] = [\omega_1\omega_2]$, on obtient

$$\bar{r} = (r - i\theta_2)e^{i\theta}, \quad \bar{s} = (s + i\theta_1)e^{-i\theta}$$

d'où, en éliminant $\bar{r}$ et $\bar{s}$ à l'aide de (51),

$$i\theta_1 = s(e^{2i\theta} - 1) \quad i\theta_2 = r(1 - e^{-2i\theta})$$

et enfin

(52) $$id\theta = s(e^{2i\theta} - 1)\omega_1 + r(1 - e^{-2i\theta})\,\omega_2.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer que cette équation de Pfaff est complètement intégrable, ce qui donne

(53) $$r_1 + rs = 0, \qquad s_2 + rs = 0;$$

telles sont les deux équations, du 4^e ordre, des surfaces d'O. Bonnet.

21. Le théorème d'O. Bonnet, d'après lequel ses surfaces sont isothermiques, se lit sur les formules (53), car on en tire $r_1 = s_2$, ce qui est l'équation des surfaces isothermiques (n° **8**). On en tire aussi $s = -\dfrac{r_1}{r}$, $r = -\dfrac{s_2}{s}$. Notre forme χ (n° **4**) s'écrit donc

$$\chi = \left(-\frac{r_1}{r} - \frac{s_1}{s}\right)\omega_1 + \left(-\frac{s_2}{s} - \frac{r_2}{r}\right)\omega_2 = -\,d\log rs.$$

C'est une différentielle exacte, donc (n° **4**), les surfaces en question sont des surfaces HI. En se reportant aux formules (21) on voit que

$$\chi = d\log\frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}} = -\,d\log rs \text{ et } \frac{1}{rs} = 4\,\frac{(\psi_u\psi_v)^{\frac{3}{2}}}{\psi_{uv}{}^2}$$

d'où, en éliminant rs,

(54) $$\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v} = m.$$

Réciproquement, toute surface HI dont la fonction primitive a ses deux paramètres différentiels proportionnels est une surface d'O. Bonnet. En effet, de (54) on déduit $r = -\dfrac{m}{2}\sqrt{\psi_v}$, $s = -\dfrac{m}{2}\sqrt{\psi_u}$ d'où

$$r_1 = -\frac{m^2}{4}\sqrt{\psi_u\psi_v} = s_2 = -\,rs.$$

En définitive, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit surface d'O. Bonnet, c'est qu'elle soit une surface HI et que sa fonction primitive ait ses deux paramètres différentiels proportionnels.*

On doit remarquer que les équations (53) sont satisfaites si $r = 0, s = 0$; (52) donne alors θ = const. Les surfaces d'O. Bonnet correspondantes sont ***à courbure moyenne constante***: ce sont les surfaces d'O. Bonnet *de première classe*; nous ne nous en occuperons pas.

22. Revenons sur la propriété que possède toute surface d'O. B. d'être isothermique. De (54), on tire par intégration

$$\psi = -\frac{1}{m}\log (U + V), \tag{55}$$

où U et V sont, pour la réalité, imaginaires conjuguées. La forme isothermique $s\omega_1 + r\omega_2$ s'écrit donc $-\frac{1}{2}\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}d\psi = -\frac{m}{2}d\psi$, et le facteur intégrant commun à ω_1 et ω_2, qui est en général $e^{\int s\omega_1 + r\omega_2}$, devient $e^{-\frac{m}{2}\psi} = \sqrt{U + V}$. Nous poserons $U = P - iQ$, $V = P + iQ$, et nous nous restreindrons à une région de la surface où $P > 0$. $P = \dfrac{U + V}{2}$ est une fonction harmonique sur la surface, et l'on a

$$s\omega_1 + r\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{dP}{P}. \tag{56}$$

Réciproquement, s'il existe une fonction harmonique P telle que la forme isothermique puisse s'écrire ainsi, on aura

$$P_1 = 2sP,\ P_2 = 2rP,\ P_{12} = 2s_2P + 4rsP,$$

et enfin

$$P_{12} - rP_1 = 2(s_2 + rs)P.$$

Or, puisque P est harmonique, $P_{12} - rP_1 = 0$; donc, sur de telles surfaces, $s_2 + rs = 0$; on montrerait de même, en formant $P_{21} - sP_2$, que $r_1 + rs = 0$, donc *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit surface d'O. Bonnet, c'est que la forme isothermique soit la demi-différentielle logarithmique d'une fonction harmonique.*

23. Les surfaces à courbure moyenne constante sont, nous l'avons dit, les surfaces d'O.B. de première classe. Les autres surfaces d'O.B, à courbure moyenne variable, se répartissent en deux classes, comme le montre l'étude de l'équation de Gauss. Puisqu'ici, $\psi = -\dfrac{1}{m}\log (U + V)$, on a

$$\psi_{uv} = \frac{U'V'}{m(U + V)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\log|\psi_{uv}| = -2\psi_{uv}.$$

L'équation (23) devient alors

$$\frac{d^2}{dt^2}\log|f'| = \psi_{uv}\left(\frac{f^2}{f'} + 2m\right) - \frac{f'}{m}. \tag{57}$$

Si on lui applique l'opération $D = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$, on obtient

(58) $$0 = D\psi_{uv} \cdot \left(\frac{f^2}{f'} + 2m\right)$$

d'où deux possibilités:

ou bien $\frac{f^2}{f'} + 2m = 0$, qui donne $f = \frac{2m}{t + C}$. Cette fonction satisfait à (57) sans qu'aucune condition soit imposée aux fonctions U et V: ce sont les surfaces d'O.B. *de deuxième classe*. On peut déterminer complètement l'expression de leurs coordonnées en fonction de u, v et de deux fonctions arbitraires, mais elles sont imaginaires, comme l'a montré M. E. Cartan;

ou bien $D\psi_{uv} = 0$: ψ_{uv} n'est fonction que de $u + v$: ce sont les surfaces d'O.B. *de troisième classe*, que nous allons étudier.

24. Les surfaces d'O. Bonnet de troisième classe jouissent de plusieurs propriétés qui sont évidentes sur nos formules. Leur élément linéaire étant $2\frac{\psi_{uv}}{f'}\,dudv$, comme pour toute surface HI, et ψ_{uv} ne dépendant que de $u + v$, comme f', *elles sont applicables sur des surfaces de révolution* (n° **17**). En outre, en se reportant à l'expression (21) de A, et en tenant compte que $\psi_u\psi_v = \frac{\psi_{uv}}{m}$, on voit que A n'est fonction que de $u + v$, comme H, si bien que A est fonction de H et que, par conséquent, *ces surfaces sont des surfaces W*. Ces propriétés sont du reste bien connues.

D'après la formule (55), les courbes primitives $\psi = C$ sont des courbes isothermes. Conjointement avec leurs trajectoires orthogonales, elles forment un réseau auquel est attachée la variable complexe V, en ce sens qu'on obtient les courbes $\psi = C$ et leurs trajectoires orthogonales en égalant à une constante soit la partie réelle, soit la partie imaginaire de V. Nous poserons $V = P + iQ$; cette variable, qui est attachée aux courbes primitives dans le même sens que la variable $v = p + iq$ est attachée aux lignes d'égale courbure moyenne, sera appelée la ***variable primitive***. Puisque V et v sont deux intégrales premières de $\omega_2 = 0$, il y a une relation analytique $V(v)$, que nous appellerons la ***relation primitive***.

Sur ces surfaces, on a, d'après (55).

(59) $$\psi_{uv} = \frac{U'V'}{m(U + V)^2};$$

ce doit être une fonction de $u + v$, donc les dérivées logarithmiques par rapport à u et par rapport à v sont égales, ce qui donne

(60) $$\frac{U''}{U'} - \frac{2U'}{U + V} = \frac{V''}{V'} - \frac{2V'}{U + V}$$

ou, en posant, pour abaisser l'ordre, $U' = \lambda(U)$, $V' = \mu(V)$,

(61) $$(\lambda' - \mu')(U + V) = 2(\lambda - \mu).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

Des dérivations par rapport à U, puis par rapport à V, donnent

(62) $$\lambda''(U+V) = \mu''(U+V) = \lambda' + \mu'.$$

On en déduit

$$\lambda'' = \mu'' = 2a \qquad (a, \text{ constante réelle})$$

d'où

$$\lambda' = 2aU + b_1, \; \mu' = 2aV + b_2 \qquad (b_1, b_2 \text{ imaginaires conjuguées}).$$

Portant dans (62), on obtient $b_1 + b_2 = 0$, donc

$$b_1 = 2ib, \quad b_2 = -2ib \qquad (b, \text{ constante réelle})$$

et (61) donne ensuite

$$\lambda - aU^2 - 2ibU = \mu - aV^2 + 2ibV,$$

d'où

$$\lambda = aU^2 + 2ibU + c, \; \mu = aV^2 - 2ibV + c \qquad (c, \text{ constante réelle}).$$

La relation différentielle primitive est donc

(63) $$\frac{dV}{dv} = aV^2 - 2ibV + c.$$

25. Nous distinguerons trois types de surfaces, suivant la nature des racines V_1, V_2 du trinôme $aV^2 - 2ibV + c$, où a, b et c sont réels:

type **A** : $b^2 + ac > 0$, 2 racines distinctes, imaginaires pures;

type **B** : $b^2 + ac < 0$, 2 racines distinctes, symétriques par rapport à l'axe imaginaire;

type **C** : $b^2 + ac = 0$, 2 racines confondues sur l'axe imaginaire.

Les types **A** et **C** ont deux réalisations: la ***normale***, $a \neq 0$, et la ***spéciale***, $a = 0$. Dans le type **A** spécial, une des racines est rejetée à l'infini; dans le type **C** spécial, les deux racines sont infinies.

On peut simplifier la relation primitive différentielle (63) en utilisant le fait que les variables complexes V et v ne sont pas parfaitement définies. Pour V, c'est seulement par sa partie réelle qu'elle intervient, puisque, seule, figure dans les formules la somme $U + V = 2P$; on peut ajouter à V une constante imaginaire pure, à condition de retrancher de U la même quantité. De plus, si l'on multiplie U et V par une même constante positive, ψ est simplement augmentée d'une quantité constante, ce qui ne change rien à la surface. Quant à v, on peut la remplacer par $av + b + ic$ (a, b, c réels), à condition de remplacer u par $au + b - ic$, ce qui remplacera $u + v$ par $a(u + v) + 2b$. Il ne faut pas oublier que, dans ce changement, ψ ne reste pas invariante (n° **6**), mais devient $\bar{\psi} = \dfrac{\psi}{a}$; en particulier, si u et v sont remplacées par $-u$ et $-v$, ψ devient $-\psi$. On obtient de la sorte les formes réduites:

A normal, $\quad dv = \dfrac{dV}{1 + V^2}, \qquad V = \operatorname{tg} v$

A spécial, $\quad dv = \dfrac{dV}{2iV}, \qquad V = -ie^{2iv}$

https://doi.org/10.4153/CJM-1949-002-8 Published online by Cambridge University Press

$$\mathbf{B}, \qquad dv = \frac{dV}{1-V^2}, \qquad V = \operatorname{th} v$$

$$\mathbf{C} \text{ normal}, \qquad dv = -\frac{dV}{V^2}, \qquad V = \frac{1}{v}$$

$$\mathbf{C} \text{ spécial}, \qquad dv = dV, \qquad V = v.$$

On a intégré de façon que les axes imaginaires se correspondent, ainsi que les demi-plans positifs, dans les plans complexes (v) et (V).

Les expressions correspondantes de ψ_{uv} sont

$$\mathbf{A}, \ \frac{1}{m\sin^2 t}; \quad \mathbf{B}, \ \frac{1}{m \operatorname{sh}^2 t}; \quad \mathbf{C}, \ \frac{1}{mt^2}; \tag{64}$$

et l'équation de Gauss (57), que doit vérifier $H = f(t)$, revêt aussi trois formes différentes, suivant le type considéré.

26. La relation (63) montre que les lignes du plan (V) le long desquelles dv est réel sont des cercles (ou droites) orthogonaux à l'axe imaginaire. Donc, quel que soit le type considéré, *si l'on fait la carte de la surface d'O.B. sur le plan* (V), *les trajectoires orthogonales des lignes* $H = C$ *ont pour image un faisceau de cercles (ou droites) orthogonaux à l'axe imaginaire; les courbes* $H = C$ *elles-mêmes sont représentées par le faisceau orthogonal au précédent.*

Le faisceau de cercles qui représente les trajectoires orthogonales des lignes d'égale courbure moyenne peut avoir ses points de Poncelet sur l'axe imaginaire, distincts (type **A**), ou bien ses points de base symétriques par rapport à l'axe imaginaire (type **B**), ou bien ses points de base confondus sur l'axe imaginaire, l'axe radical étant perpendiculaire à l'axe imaginaire (type **C**). Dans le type **A** normal, les courbes $H = C$ sont représentées par des arcs de cercle limités aux points V_1, V_2; dans le type **A** spécial, elles sont représentées par des droites rayonnant de V_1, V_2 étant à l'infini. Dans le type **B**, les courbes $H = C$ ont pour image un faisceau de cercles ayant comme points de Poncelet V_1 et V_2, symétriques par rapport à l'axe imaginaire. Enfin, dans le type **C**, les courbes $H = C$ sont des cercles tangents en $V_1 = V_2$ à l'axe imaginaire, ou, si le type est spécial, des droites parallèles à l'axe imaginaire.

27. Cherchons maintenant la carte des lignes de courbure sur le plan (V). Nous savons (6) qu'elles bissectent les courbes primitives et les courbes $H = C$. Or, sur le plan (V), les lignes $\psi = C$ sont les parallèles à l'axe imaginaire, et les lignes $H = C$ forment un faisceau de cercles comme on vient de le voir. Des considérations élémentaires montrent qu'en conséquence *les lignes de courbure seront, sur la carte, des coniques homofocales*, les foyers étant les points V_1 et V_2. Ce seront des coniques à centre dans le type **A** normal et dans le type **B**, des paraboles homofocales, ayant pour axe l'axe imaginaire, dans le type **A** spécial; dans le type **C** normal, ce seront les demi-droites issues du point $V_1 = V_2$ de l'axe imaginaire, et les cercles centrés en ce point; dans le type **C** spécial, ce seront des parallèles aux axes.

Nous avons montré (n° **8**) comment on attache une variable complexe z au réseau des lignes de courbure d'une surface isothermique. Ici, comme

$$e^{\int s\omega_1 + r\omega_2} = \sqrt{U + V}, \text{ et que } \omega_2 = \sqrt{\psi_v}dv = \sqrt{-\frac{1}{m}\frac{V'}{U+V}}\, dv,$$

on pourra prendre

$$dz = \sqrt{V'}\, dv \text{ ou } dz = i\sqrt{V'}\, dv, \tag{65}$$

suivant que m est négatif ou positif; en toute hypothèse, on a $dz^2 = \pm\, dVdv$, Si, dans (65), on remplace dv au moyen de (63) on obtient

$$dz = \frac{dV}{\sqrt{aV^2 - 2ibV + c}} \text{ (si } m<0), \quad dz = \frac{idV}{\sqrt{aV^2 - 2ibV + c}} \text{ (si } m > 0), \tag{66}$$

ce qui confirme que les lignes de courbure, $y = C$, $x = C$, ont pour carte, dans le plan (V), des coniques homofocales. Les formules (66) donnent en outre, dans chaque cas, par intégration, l'expression de V en z, c'est-à-dire, de P et Q en x, y.

28. La forme de la fonction $P(x, y)$ est remarquable: *P est le produit d'une fonction de x par une fonction de y.* Cette propriété, dont M. E. Cartan a tiré un grand parti, découle d'une proposition plus générale établie antérieurement (n° **11**). Ici, on a (n° **22**),

$$s\omega_1 + r\omega_2 = \frac{1}{2}\frac{dP}{P},$$

donc, en vertu de la propriété rappelée, $P = X(x)Y(y)$. Comme P est une fonction harmonique, les formes possibles de $X(x)$ et $Y(y)$ sont très limitées.

Nous ne développerons pas davantage la théorie des surfaces d'Ossian Bonnet qui, étant donné son grand intérêt, mérite une étude à part. Notre intention était seulement de les présenter ici à titre de spécimen remarquable des surfaces à courbure moyenne isotherme.

Issy-les-Moulineaux (*Seine*)