Canad. Math. Bull. Vol. **40** (2), 1997 pp. 129–132

SUR LES CARACTÈRES D'UNE ALGÈBRE DE BANACH

CATALIN BADEA

RÉSUMÉ. A new proof for the Gleason-Kahane-Żelazko theorem concerning the characters of a Banach algebra is given. A theorem due to Pólya and Saxer is used instead of the Hadamard factorization theorem.

1. **Introduction.** Soit A une algèbre de Banach avec l'unité e. Pour toute application linéaire et multiplicative T de A, on a $T(e) = 1$ et $T(x) \neq 0$, où $x \in A^{-1}$ est un élément inversible de A. La réciproque

(GKZ) Chaque forme linéaire T vérifiant $T(e) = 1$ et $T(A^{-1}) \subseteq \mathbf{C}^*$, est multiplicative

a été conjecturé par W. Żelazko et montré indépendamment par A. Gleason [G] et J.-P. Kahane et W. Żelazko [KZ]. Maintenant on sait montrer cette affirmation pour les algèbres spectrales avec unité (*cf.* [P, p. 242] pour la définition et pour plusieurs exemples). La preuve de Gleason et de Kahane-Żelazko utilise d'une manière essentielle le théorème de factorisation d'Hadamard [T]. Plusieurs démonstrations pour le théorème de Gleason-Kahane-Żelazko (GKZ), qui n'utilisent pas le théorème d'Hadamard, sont maintenant connues [S], [RS]. Chacune de ces démonstrations s'appuie sur des résultats d'analyse complexe : [S] utilise la formule

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda$$

pour les coefficients d'une fonction entière $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ (et d'autres résultats d'analyse complexe), tandis que la démonstration (plus algébrique) de [RS] n'utilise que le théorème fondamental de l'algèbre. Deux autres preuves pour les algèbres de Banach commutatives et avec une involution symétrique ont été données par Wille [W] ; *cf.* aussi [M]. Plusieurs informations sur le Théorème GKZ se trouvent dans [P].

Le but de cette note est de donner une autre (courte) démonstration pour le Théorème GKZ dans le cas des algèbres de Banach (et même pour des algèbres normées plus générales). Cette fois-ci le substitut du théorème d'Hadamard est un théorème énoncé par Pólya et montré par Saxer. Le théorème Pólya-Saxer est énoncé dans la deuxième section et utilisé pour donner une preuve du Théorème GKZ pour les algèbres de Banach. On donne à la fin une preuve du Théorème GKZ pour les algèbres ayant une norme spectrale.

Reçu par les éditeurs le 11 janvier 1996.
Classification (AMS) par sujet : Primary: 46H05; secondary: 32A15.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-015-1 Published online by Cambridge University Press

2**. Le théorème de Pólya et Saxer et le Théorème GKZ.** Le théorème qu'on va utiliser est une caractérisation de la fonction exponentielle.

THÉORÈME 1 (PÓLYA-SAXER). *Si f est une fonction entière et f, f' et f'' ne s'annulent pas, alors $f(z) = \exp(az + b)$ pour deux constantes a et b.*

Le Théorème 1 a été énoncé par G. Pólya dans les années vingt et montré par Saxer, Varopoulos et Csillag. Par une généralisation remarquable de Tumura et Clunie, deux dérivées sont suffisantes :

THÉORÈME 2 (TUMURA-CLUNIE). *Si f est une fonction entière et f et $f^{(n)}$, pour un $n \geq 2$, ne s'annulent pas, alors $f(z) = \exp(az + b)$ pour deux constantes a et b.*

En fait, pour nos besoins, la version suivante (plus faible) du Théorème 1 sera suffisante.

THÉORÈME 3 (PÓLYA-SAXER, VERSION FAIBLE). *Si f est une fonction entière et f et toutes les dérivées $f^{(n)}$, $n \geq 1$, ne s'annulent pas, alors $f(z) = \exp(az + b)$ pour deux constantes a et b.*

Une courte preuve pour le cas $n = 2$ du Théorème 2 a été donnée par Yang [Y]. Plus d'informations et des références bibliographiques exactes sur le théorème de Pólya et Saxer se trouvent dans le Chapitre 12 de [B].

On commence par la preuve du Théorème GKZ pour les algèbres de Banach.

THÉORÈME 4 (GKZ-LE CAS DES ALGÈBRES DE BANACH). *Soit A une algèbre de Banach avec l'unité e et $T\colon A \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonctionnelle linéaire, bornée, telle que $T(e) = 1$ et $T(x) \neq 0$ pour chaque $x \in A^{-1}$. Alors T est multiplicative.*

PREUVE. Soit x un élément inversible de A. On considère la fonction entière $f(z) = T\big(\exp(zx)\big)$, où exp est l'exponentielle. Par hypothèse, la fonction entière f ne s'annule pas. La continuité de T permet d'écrire

$$f(z) = T\Big(\sum_{n\geq 0}(1/n!)(zx)^n\Big) = \sum_{n\geq 0}(1/n!)T(x^n)z^n.$$

On obtient

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n\geq 1} n(1/n!)T(x^n)z^{n-1} = \sum_{k\geq 0}(1/k!)T(x^{k+1})z^k \\ &= \sum_{k\geq 0} T\big((1/k!)x^{k+1}z^k\big) = T\big(x\exp(zx)\big). \end{aligned}$$

D'une manière similaire, on a $f^{(n)}(z) = T\big(x^n \exp(zx)\big)$, pour tout $n \geq 2$, $z \in \mathbf{C}$. Mais $x \in A^{-1}$, donc $x^n \in A^{-1}$. Comme $\exp(y)$ est un élément inversible pour chaque $y \in A$, on obtient $x^n \exp(zx) \in A^{-1}$, pour tout $z \in \mathbf{C}$ et tout $x \in A^{-1}$. Donc f et toutes les dérivées $f^{(n)}$, $n \geq 1$, ne s'annulent pas. En utilisant le Théorème 3, on obtient

$f(z) = \exp(az + b)$, pour deux constantes a et b. Comme $f(0) = T(e) = 1$, on a $b = 0$. Donc $T\big(\exp(zx)\big) = f(z) = \exp(az)$, c'est-à-dire

$$\sum_{n\geq 0}(1/n!)T(x^n)z^n = \sum_{n\geq 0}(1/n!)a^n z^n.$$

Donc $T(x^n) = a^n$ pour tout $n \geq 1$. En particulier on a $T(x^2) = a^2 = T(x)^2$, pour chaque $x \in A^{-1}$. Soit maintenant y un élément arbitraire dans A. Le spectre $\mathrm{Sp}_A(y)$ de y dans A est un compact fermé, et donc il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que λ n'est pas dans $\mathrm{Sp}_A(y)$. On obtient $y - \lambda e \in A^{-1}$. On en déduit $T\big((y-\lambda e)^2\big) = T(y-\lambda e)^2$, et donc $T(y^2) = T(y)^2$ pour chaque $y \in A$. Donc T est un homéomorphisme de Jordan entre A et $\mathbf{C}$. On obtient que T est multiplicatif par un argument standard (*cf.* [P, p. 242]). ∎

3**. Une remarque sur les algèbres non complètes.** Cette preuve n'est plus valable si A est une algèbre non complète. Le Théorème GKZ est vrai pour chaque Q-algèbre normée [RS] et même pour chaque algèbre spectrale [P]. On dit que l'algèbre A est une Q-algèbre si A^{-1} est ouvert dans la topologie de A. Par définition, A est une algèbre spectrale si on peut définir sur A une semi-norme spectrale, c'est-à-dire supérieure à ρ, le rayon spectral. Le théorème suivant est la généralisation du Théorème GKZ pour les algèbres ayant une norme spectrale. On utilise une idée de [Be].

THÉORÈME 5 (GKZ-LE CAS DES ALGÈBRES AVEC UNE NORME SPECTRALE). *Soit A une algèbre avec une norme spectrale et avec l'unité e. Soit $T: A \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonctionnelle linéaire, bornée, telle que $T(e) = 1$ et $T(x) \neq 0$ pour chaque $x \in A^{-1}$. Alors T est multiplicative.*

PREUVE. Soit $||\cdot||$ une norme spectrale de A. Soit $\mathbf{A}$ la complétée de A par rapport à $||\cdot||$; $\mathbf{A}$ est donc une algèbre de Banach. La forme linéaire continue T se prolonge en une forme linéaire continue $\mathbf{T}$ sur $\mathbf{A}$. D'après [P, p. 257], A est une sous-algèbre pleine (spectrale dans [P]) de $\mathbf{A}$, c'est-à-dire $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(x)$, pour tout élément x de A. Soit $x \in A$ et $\lambda = T(x)$. Alors $T(x - \lambda e) = 0$ et donc $x - \lambda e \notin A^{-1}$. On obtient $\lambda = T(x) \in \mathrm{Sp}_A(x)$. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ et (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{A}$. Soit V un voisinage fermé de 0 dans $\mathbf{C}$ et U un voisinage ouvert de 0 contenu dans V. L'application multivoque $x \longrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(x)$ définie sur $\mathbf{A}$ est semi-continue supérieurement [A], et donc il existe un rang N tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(x_n) \subset U + \mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$, $n \geq N$. On obtient $T(x_n) \in \mathrm{Sp}_A(x_n) = \mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(x_n) \subset V + \mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(x)$. Donc $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \lim_n T(x_n) \in V + \mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$, car V est fermé et $\mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ est compact. Comme V est arbitraire, $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ et donc $\mathbf{T}$ et T sont multiplicatives. ∎

REFERENCES

[A] B. Aupetit, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes in Math. **735**(1979), Springer-Verlag, Berlin.

[Be] A. Beddaa, *Une caractérisation des caractères dans les algèbres normées completes*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **15**(1993), 101–104

[B] R. B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, vol. I, Academic Press, New York 1979.

[G] A. M. Gleason, *A characterization of maximal ideals*, J. Analyse Math. **19**(1967), 171–172.

[KZ] J.-P. Kahane and W. Żelazko, *A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras*, Studia Math. **29**(1968), 339–343.

[M] G. Maltese, *Extreme positive functionals and ideals of finite codimension in commutative Banach* $*$*-algebras*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **39**(1991), 569–580.

[P] T. W. Palmer, *Banach Algebras and The General Theory of* $*$*-Algebras*, vol. I, Algebras and Banach Algebras, Encyclopedia of Math. Appl. **49**, Cambridge Univ. Press, 1994.

[RS] M. Roitman and Y. Sternfeld, *When is a linear functional multiplicative?*, Trans. Amer. Math. Soc. **267**(1981), 111–124.

[S] J. A. Siddiqi, *On a characterization of maximal ideals*, Canad. Math. Bull. **13**(1970), 219–220.

[W] R. Wille, *The theorem of Gleason-Kahane-Żelazko in a commutative symmetric Banach algebra*, Math. Z. **190**(1985), 301–304.

[T] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, 1934.

[Y] Chung-Chun Yang, *On the zeros of an entire function and its second derivative*, Rend. Accad. Lincei Roma (8) **49**(1970), 27–29.

URA 751 au CNRS & UFR de Mathématiques
Université de Lille I
F-59655 Villeneuve d'Ascq
France
e-mail: badea@gat.univ-lille1.fr