Canad. Math. Bull. Vol. **30** (3), 1987

UN THÉORÈME DE TRANSFERT POUR LA PROPRIÉTÉ DES BOULES

PAR
ROBERT DEVILLE

ABSTRACT. We show that, if X and Y are Banach spaces such that X has the Mazur's intersection property and such that there exists T, an operator from Y into X so that T^* and T^{**} are injective, then there exists on Y an equivalent norm which has the Mazur's intersection property.

We deduce from this result and from a result of M. Talagrand that there exists on the long James space $J(\eta)$ an equivalent norm which has the Mazur's intersection property.

Notations et rappels. Soit E un espace de Banach. Nous noterons E_1 (resp E_1') la boule unité de E (resp de E') et S (resp S') la sphère unité de E.

ω (resp ω^*) désigne la topologie faible (resp préfaible) de E (resp de E').

Soit $\mathcal{D}_E$ l'ensemble des $x \in E'$, $\|x\| = 1$, tel qu'il existe des tranches préfaibles de E_1', contenant x, de diamètre arbitrairement petit. Autrement dit, $\mathcal{D}_E$ est égal à l'ensemble des points extrémaux de E_1' qui sont aussi des points de continuité de l'application identité de E_1' muni de la topologie préfaible, dans E_1' muni de la topologie forte.

Enfin, M_E désigne l'ensemble des $x \in S'$ qui atteignent leur maximum sur E_1, c'est à dire:

$$M_E = \{x \in S'; \text{ il existe } y \in E_1 \text{ tel que } x(y) = 1\}$$

La propriété suivante se trouve étudiée dans [4] et dans [9]:

DÉFINITION 1. *On dit que E a la propriété des boules si tout convexe fermé borné de E est égale à l'intersection des boules qui le contiennent.*

Cette propriété est isométrique. Elle a été étudiée par divers auteurs [4], [9], [10]. En voici une caractérisation qui se trouve dans [4]:

PROPOSITION 2. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *E a la propriété des boules.*

(2) $\mathcal{D}_E$ *est dense dans* $(S', \|\ \|)$.

(3) $\mathcal{D}_E$ *est un* $\mathcal{G}_\delta$ *dense de* $(S', \|\ \|)$.

Reçu par la rédaction le 8 octobre 1985 et, sous une forme révisée le 26 juin 1986.
AMS Subject Classification (1980): 46B20.

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-042-4 Published online by Cambridge University Press

Il est intéressant de comparer la proposition 2 à la caractérisation de la Frechet-différentiabilité suivante:

PROPOSITION 3. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *La norme de E est Frechet-différentiable.*

(2) *Tout point $x \in M_E$ est fortement exposé par l'élément $y \in E_1$ sur lequel il atteint son maximum, c'est à dire: Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $z \in E_1'$, $y(z) > 1 - \eta$ implique $\|x - z\| < \epsilon$.*

A l'aide des propositions 2 et 3, et du théorème de Bishop-Phelps, on en déduit trivialement que si la norme de E est Frechet-différentiable, alors E possède la propriété des boules.

REMARQUES. Les propositions 2 et 3 montrent qu'inversement, si E est un espace de Banach de dimension 2 et si E a la propriété des boules, alors la norme de E est Frechet-différentiable.

Soit E un espace de Banach de dimension 3 dont la boule unité duale contient exactement deux segments. La norme de E n'est pas Frechet-différentiable (ni même Gateaux-différentiable), cependant la proposition 2 montre que E a la propriété des boules. La propriété des boules n'est donc pas héréditaire.

Rappelons que les problèmes suivantes sont ouverts:

(1) Si E a la propriété des boules, est ce que E est Asplund?

(2) Si E a la propriété des boules, est ce que la norme de E admet un point de Frechet-différentiabilité?

Il est montré dans [5] un théorème de transfert pour la propriété "avoir une norme dont la norme duale est localement uniformément convexe" (propriété plus forte que la Frechet-différentiabilité). Nous allons montrer que nous avons un théorème de transfert analogue pour la propriété des boules.

THÉORÈME 4. *Soient X et Y deux espaces de Banach. On suppose:*

(1) *Il existe $T: X \to Y$ une application à transposée injective et à bitransposée injective.*

(2) *Il existe sur Y une norme équivalente ayant la propriété des boules.*

Alors il existe sur X une norme équivalente ayant la propriété des boules.

REMARQUES. (1) La propriété des boules est une propriété de lissité plus faible que la Frechet-différentiabilité. Il serait intéressant d'établir un théorème de transfert analogue au théorème 4 pour la Frechet-différentiabilité.

(2) Peut-on supprimer dans la théorème 4 l'hypothèse "T^* injective"? Cela permettrait de montrer que si X a la propriété des boules et si $Y \subset X$, il existe alors sur Y une norme équivalente ayant la propriété des boules, et, par suite, qu'un espace ayant la propriété des boules est Asplund (cf problème (1)), problème résolu dans le cas séparable, mais qui semble ouvert en général.

DÉMONSTRATION. On fixe N une norme équivalente sur Y ayant la propriété des boules, et notons B_1 la boule unité de Y' et $K = T^*(B_1)$. On peut supposer $\|T\| = 1$.

Pour $x \in X'$ et $C \subset X'$ notons $d(x, C) = \inf\{|x - y|; y \in C\}$ où $|\cdot|$ désigne la norme initiale sur X'. Pour $x \in X'$, on définit:

$$\psi(x) = |x|^2 + \int_0^{+\infty} d^2(x, tK)e^{-t}\,dt$$

Comme d et $|\cdot|$ sont ω^*-s.c.i., on en déduit que ψ est ω^*-s.c.i. De plus, ψ est convexe et uniformément continue pour la norme sur les sous-ensembles bornés de X'.

La jauge $\|\cdot\|$ de l'ensemble $\{x \in X'; \psi(x) \leqslant 1\}$ est donc une norme duale équivalente sur X'.

Il s'agit de montrer, d'après la proposition 2, que $\mathfrak{D}_X$ est dense dans S'_X, la sphère unité de X' pour $\|\cdot\|$.

Pour cela, nous allons montrer que $\mathfrak{D}_X$ contient $S'_X \cap \mathbb{R}\, T^*\mathfrak{D}_Y$, et ce dernier ensemble est dense en norme dans S'_X.

Soit donc $y \in S'_X \cap \mathbb{R}T^*\mathfrak{D}_Y$. y est de la forme $y = t_0T^*w$, avec $t > 0$ et $w \in \mathfrak{D}_Y$. Montrons que $y \in \mathfrak{D}_X$.

Comme $w \in \mathfrak{D}_Y$, il existe une tranche préfaible U de B, contenant w, de diamètre $\leqslant \epsilon/3t_0$.

$L = T^*(t_0(B\backslash U))$ est un convexe ω^*-compact de X' et $t_0K\backslash L$ contient y, par injectivité de T^* et est de diamètre $\leqslant \epsilon/3$ car $\|T\| = 1$.

La fin de la démonstration repose sur le lemme suivant:

LEMME 5. *Il existe* $\eta > 0$ *tel que, pour tout* $\alpha \in]0, \eta]$, *il existe* $f(\alpha) > 0$, *tel que, pour tout* $z \in X'$, $\|z\| \leqslant 1$:

$$\left\|\frac{y + z}{2}\right\| \geqslant 1 - f(\alpha) \Rightarrow d(z, t_0K) \leqslant \alpha$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Remarquons tout d'abord qu'il existe $h > 0$ et une constante $c > 0$ tels que, pour tout $\beta \in [0, h]$:

$$\left\|\frac{y + z}{2}\right\| \geqslant 1 - \beta \Rightarrow \psi\frac{(y + z)}{2} \geqslant 1 - c\beta$$

On en déduit que:

$$\psi(y) + \psi(z) - 2\psi\frac{(y + z)}{2} \leqslant 2c\beta$$

et, par convexité de $|\cdot|$:

$$\int_0^{+\infty}\left[d^2(y, tK) + d^2(z, tK) - 2d^2\left(\frac{y + z}{2}, tK\right)\right]e^{-t}\,dt \leqslant 2c\beta$$

En utilisant maintenant la convexité de d, on a:

$$d^2(y, tK) + d^2(z, tK) - 2d^2\left(\frac{y + z}{2}, tK\right) \geqslant \frac{1}{2}(d(y, tK) - d(z, tK))^2$$

On en déduit que:

$$(1)\qquad I = \int_0^{+\infty} (d(y, tK) - d(z, tK))^2 e^{-t}\,dt \leqslant 4c\beta$$

Remarquons que:

a) pour $t \geqslant t_0$ $d(y, tK) = 0$

b) $d(z, (t_0 + h)K) \geqslant d(z, t_0K) - h$

c) $d(z, t_0K) \leqslant 1$

On a donc:

$$(2)\qquad I \geqslant \int_{t_0}^{t_0 + d(z, t_0K)} (d(z, t_0K) - t + t_0)^2 e^{-t_0 - 1}\,dt$$

D'après (1) et (2) on a:

$$d(z, t_0K) \leqslant (12 \exp(t_0 + 1)c\beta)^{1/3}.$$

Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ donnée par $f(\alpha) = 1/(12c) \exp(-t_0 - 1)\alpha^3$. On vient de montrer que, si on pose $\eta = f^{-1}(h)$, on a, pour tout $\alpha \in [0, \eta]$ et pour tout $z \in X'$, $\|z\| \leqslant 1$:

$$\frac{1}{2}\|y + z\| \geqslant 1 - f(\alpha) \Rightarrow d(z, t_0K) \leqslant \alpha$$

C.Q.F.D.

Fin de la démonstration du théorème. Si $A \subset X'$, nous noterons $\mathrm{conv}(A)$ l'enveloppe convexe de A. Notons $L_1 = L \cap X_1'$ et $C_1 = \mathrm{conv}(L_1 \cup (1 - \epsilon/3)X_1')$. C_1 est un convexe ω^*-compact inclus dans X_1' contenant L_1 et ne contenant pas y.

Soit $m > 0$ tel que, pour tout $x \in X' : m\|x\| \leqslant |x| \leqslant \|x\|$.

Soit $\alpha > 0$ tel que $y \notin C_1 + \frac{\alpha}{m}X_1'$. D'après le choix de α, on a $\alpha < \epsilon/3$.

Soit $\lambda > 0$ tel que, si on note $K_1 = t_0K \cap X_1'$, on ait, pour tout $z \in X_1'$ $d(z, t_0K) < \lambda\alpha \Rightarrow d(z, K_1) < \alpha$. (L'existence d'un tel λ est élémentaire).

Soit

$$C_2 = \mathrm{conv}\left[\left(\left(C_1 + \frac{\alpha}{m}X_1'\right) \cap X_1'\right) \cup (1 - f(\lambda\alpha))X_1'\right]$$

C_2 est un convexe ω^*-compact inclus dans X_1', contenant C_1 et ne contenant pas y.

Enfin, soit V une tranche de X_1' contenant y et ne rencontrant pas C_2: V est donc de la forme:

$$V = \{z \in X_1';\ g(z) > 1 - \gamma\} \text{ avec } g \in X,\ \|g\| = 1, \text{ et } \gamma < f(\lambda\alpha)$$

Si $z \in V$, on a:

$$g\left(\frac{1}{2}(y + z)\right) > 1 - f(\lambda\alpha) \text{ donc } \frac{1}{2}\|y + z\| > 1 - f(\lambda\alpha)$$

et, d'après le lemme, $d(z, t_0K) < \lambda\alpha$, d'où, d'après notre choix de λ:

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-042-4 Published online by Cambridge University Press

$$d(z, K_1) < \alpha$$

Mais comme $z \notin (C_1 + (\alpha/m)X_1') \cap X_1'$ et que C_1 contient L_1, on a:

$$d(z, L_1) > \alpha$$

Si z_1 est un point de K_1 tel que $|z - z_1| = d(z, K_1)$, on a donc $z_1 \in K_1 \backslash L_1 \subset t_0 K \backslash L$ et $t_0 K \backslash L$ est de diamètre, pour $|\cdot|$, $\leqslant \epsilon/3$.

On en déduit que le diamètre de V est $\leqslant \epsilon$, et, par suite, que $y \in \mathcal{D}_X$. C.Q.F.D.

Nous allons donner une application du théorème 4. Tout d'abord, rappelons que si η est un ordinal quelconque, $J(\eta)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \eta]$ qui sont à variation carré intégrable, c'est à dire l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}([0, \eta])$ tel que

$$\|f\| = \sup\left(\sum_{i=1}^{n} (f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i))^2\right)^{1/2} < \infty$$

où le sup est pris sur toutes les familles finies $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subset [0, \eta]$ tel que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Les propriétés de cet espace sont étudiées dans [3]. Le théorème 4 nous permet de montrer:

COROLLAIRE 6. *Pour tout ordinal η, il existe sur $J(\eta)$, sur son prédual $M(\eta)$ et sur tous ses duaux d'ordre fini, une norme équivalente qui possède la propriété des boules.*

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser le résultat suivant, dû à M. Talagrand [11]: Il existe sur $\mathcal{C}([0, \eta])$ une norme équivalente Frechet-différentiable.

Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in [0, \eta]}$ la base de $J(\eta)'$ exhibée dans [3], et $T: J(\eta) \to \mathcal{C}([0, \eta])$ défini par $Tf(\alpha) = e_\alpha(f) = f(\alpha)$ pour $f \in J(\eta)$ et $\alpha \in [0, \eta]$. T est à image dense, car $J(\eta)$ est un sous espace dense de $\mathcal{C}([0, \eta])$, et T^* est à image dense car $(e_\alpha)_{\alpha \in [0, \eta]}$ est une base de $J(\eta)'$. Comme la norme construite par M. Talagrand sur $\mathcal{C}([0, \eta])$ possède la propriété des boules, on en déduit, par application du théorème 4, qu'il existe sur $J(\eta)$ une norme équivalente ayant la propriété des boules.

Le même raisonnement avec la base $(h_\alpha)_{\alpha \in [0, \eta]}$ de $J(\eta)$ montre qu'il existe sur $M(\eta)$ une norme équivalente ayant la propriété des boules. Le résultat pour les duaux d'ordre fini de $J(\eta)$ se déduit du fait que $M(\eta)$ et $J(\eta)'$ sont isométriques (cf. [3]).

Comme l'existence, dans un espace dual, d'une norme duale ayant la propriété des boules entraine la réflexivité de l'espace, les normes ainsi construites sur $J(\eta)$ et sur ses duaux d'ordre fini ne sont pas duales.

REFERENCES

1. I. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces*, Lecture notes in Maths. N° 485.

2. G. A. Edgar, *Measurability in a Banach space I, Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), pp. 663–680.

3. G. A. Edgar, *A long James space*, Measure theory, Oberwolfach 1979, Lecture notes in Math. N° 794.

4. J. R. Giles, D. A. Gregory and B. Sims, *Characterisation of normed linear spaces with Mazur's intersection property*, Bull. Austral. Math. Soc. **18** (1978), pp. 105–123.

5. G. Godefroy, S. Troyanski, J. Whitfield and V. Zizler, *Smoothness in Weakly Compactly Generated Banach spaces*, J.F.A. **52** (1983), pp. 344–352.

6. G. Godefroy, S. Troyansky, J. Whitfield and V. Zizler, *Locally uniformly rotund renorming and injections into $c_0(\Gamma)$*, Canad. Math. Bull. **27**(4) (1984), pp. 494–500.

7. G. Godefroy, S. Troyansky, J. Whitfield and V. Zizler, *Three spaces problem for locally uniformly rotund renorming*, A paraître dans Proc. A.M.S.

8. F. K. Dashiell and J. Lindenstrauss, *Some examples concerning strictly convex norms on $\mathscr{C}(K)$ spaces*, Israel J. of Math. **16**(3) (1973), pp. 329–342.

9. S. Mazur, *Uber schwach Kanvergenz in den Raümen (L^p)*, Studia Math. **4** (1983), pp. 128–133.

10. R. R. Phelps, *A representation theorem for bounded convex sets*, Proc. A.M.S. **II** (1960), pp. 976–983.

11. C. Stegall, *The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nikodym property*, Israel J. of Math. **29**(4) (1978), pp. 408–412.

12. M. Talagrand, *Renormages de quelques $\mathscr{C}(K)$*, Israel J. Math. **54**(3) (1986), pp. 327–334.

UNIVERSITY OF ALBERTA
EDMONTON, ALTA T6G 2G1