Canad. J. Math. Vol. **51** (1), 1999 pp. 49–68

Algèbres quasi-commutatives et carrés de Steenrod

Bitjong Ndombol et M. El haouari

Résumé. Soit k un corps de caractéristique p quelconque. Nous définissons la catégorie des k-algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives et nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ d'un objet de cette catégorie soit un module instable sur l'algèbre de Steenrod à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

A tout c.w. complexe simplement connexe de type fini X on associe une k-algèbre de cochaînes fortement quasi-commutative; la structure de module sur l'algèbre de Steenrod définie sur l'algèbre de cohomologie de celle-ci coïncide avec celle de $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$.

Abstract. We define the category of strongly quasi-commutative cochain k-algebras, where k is a field of any characteristic p. We give a necessary and sufficient condition which enables the cohomology algebra with $\mathbb{Z}_2$-coefficients of an object in this category to be an unstable module on the $\mathbb{Z}_2$-Steenrod algebra.

To each simply connected c.w. complex of finite type X is associated a strongly quasi-commutative model and the module structure over the $\mathbb{Z}_2$-Steenrod algebra defined on the cohomology of this model is the usual structure on $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$.

1 Introduction

Soit k un corps de caractéristique p quelconque; toutes les structures algébriques que nous considérons dans la suite, si aucune précision supplémentaire n'est donnée, ont pour corps de base k.

Soit $(X,*)$ un c.w. complexe simplement connexe de type fini. Adams et Hilton [1] construisent une k-algèbre de chaînes libre $\big(A(X),d\big)$ et un morphisme d'algèbres de chaînes $\theta_X\colon A(X)\to C_*(\Omega X;k)$ qui induit un isomorphisme en homologie. Ce modèle est appelé modèle d'Adams-Hilton de X.

Considérons la diagonale $\triangle\colon X\to X\times X$, on a le morphisme $j\circ A(\triangle)\colon A(X)\to A(X)\otimes A(X)$ où $A(\triangle)$ est induit par la diagonale au niveau des modèles d'Adams-Hilton et j est le morphisme construit par Adams et Hilton [1, p. 322]. D. J. Anick [2] observe que pour qu'une algèbre de chaînes soit un modèle d'Adams-Hilton d'un espace topologique, il faut qu'elle soit munie d'une diagonale. Il définit alors la catégorie des algèbres de Hopf à homotopie près et montre que tout objet de cette catégorie, sous certaines conditions de connectivité, est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. En particulier lorsque $p=0$, toute algèbre de Hopf à homotopie près est un modèle d'Adams-Hilton d'un espace topologique.

Reçu par les éditeurs le 5 février 1998; révisé le 25 septembre 1998.
Classification (AMS) par sujet : 55P62, 55S05.
Mots clés: algèbres de cochaînes (fortement) quasi-commutatives, $T(V)$-modèle, carrés de Steenrod, quasi-isomorphisme.

Notons $C^*(X;k)$ l'algèbre des cochaînes normalisées de X à coefficients dans k; c'est une algèbre de cochaînes connexe, cohomologiquement 1-connexe de type fini. Une telle algèbre possède un modèle libre minimal $\bigl(T(V),d\bigr)$ unique à isomorphisme près [8].

La diagonale $\triangle\colon X \to X\times X$ induit un morphisme d'algèbres de cochaînes $C^*(\triangle)\colon C^*(X\times X)\to C^*(X)$. Rappelons que le morphisme d'Eilenberg-Zilber $EZ\colon C^*(X\times X)\to C^*(X)\otimes C^*(X)$ est un isomorphisme en cohomologie.

Grâce à ce morphisme d'Eilenberg-Zilber et en appliquant deux fois le lemme de relèvement [8], on construit un morphisme d'algèbres de cochaînes $\mu_X\colon M\bigl(C^*(X)\otimes C^*(X)\bigr)\to M\bigl(C^*(X)\bigr)$ qui prolonge la codiagonale $\nabla\colon M\bigl(C^*(X)\coprod C^*(X)\bigr)\to M\bigl(C^*(X)\bigr)$. Signalons que la notation $M(A)$ désigne le modèle libre minimal de A lorsque celui-ci existe.

Le morphisme μ_X sera appelé dans la suite quasi-multiplication. Pour qu'une algèbre de cochaînes soit susceptible d'être un modèle des cochaînes (normalisées) d'un espace topologique, il faut qu'elle possède une quasi-multiplication et que son algèbre de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ soit un module sur la $\mathbb{Z}_2$-algèbre de Steenrod. Cette observation est le fondement de ce travail.

La notion d'algèbre de cochaînes quasi-commutative est duale de la notion d'algèbre de Hopf à homotopie près de D. J. Anick [2], via le foncteur dual de la bar construction. Comme question ouverte, D. J. Anick se demande [2] s'il est possible d'améliorer son modèle afin de pouvoir inclure les opérations de Steenrod. Nous montrons que la seule donnée de la diagonale ne permet pas d'y parvenir. En effet, il est montré, au paragraphe 3, qu'il est possible de définir plusieurs familles de cup-i-produits sur une algèbre de cochaînes quasi-commutative. En fixant un choix, nous définissons une nouvelle catégorie que nous appelons la catégorie des algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives et nous donnons une condition nécessaire et suffisante due en substance à S. R. Bullet et I. J. Macdonald [6] pour que la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ d'un objet de cette catégorie soit un module instable sur la $\mathbb{Z}_2$-algèbre de Steenrod. Il est établi au paragraphe 5 que tout c.w. complexe simplement connexe de type fini X possède un modèle fortement quasi-commutatif. La structure de module de la cohomologie de ce modèle sur la $\mathbb{Z}_2$-algèbre de Steenrod est exactement celle de $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$. Ce modèle fortement quasi-commutatif est un enrichissement du modèle d'Halperin-Lemaire qui permet la lecture au niveau du modèle des $\cup_i$-produits d'un c.w. complexe simplement connexe et cohomologiquement de type fini. Signalons pour clore cette introduction les récents (et intéressants) travaux de M. Karoubi sur ce sujet à l'aide des formes différentielles non commutatives [9], [10], [11].

2 Quelques outils d'homotopie algébrique

A Notion d'homotopie dans $k-DGA_1^*$

Notons $k-DGA_1^*$ la catégorie des algèbres des cochaînes sur k cohomologiquement 1-connexes de type fini. Soit $\bigl(T(V),d\bigr)$ une algèbre différentielle graduée libre. La suspension de V est l'espace vectoriel sV défini par : $(sV)^n = V^{n+1}$.

On note par sv l'élément de sV qui correspond à l'élément v de V.

Le cylindre sur $\bigl(T(V),d\bigr)$ est l'algèbre différentielle libre graduée $I\bigl(T(V),D\bigr) = T(V'\oplus V''\oplus sV, D)$ où V' et V'' sont deux copies de V, et où la différentielle D est donnée sur les générateurs de V' et V'' comme dans $\bigl(T(V),d\bigr)$, et pour tout $v\in V$ on pose $Dsv = v''-v'-S(dv)$ où $S\colon T^+(V)\to T(V'\oplus V''\oplus sV)$ est la $(j'-j'')$-dérivation

https://doi.org/10.4153/CJM-1999-004-3 Published online by Cambridge University Press

de degré 1, qui prolonge l'isomorphisme de $V \to sV$ qui envoie v sur sv, avec j' et j'' les inclusions de $T(V)$ dans $T(V' \oplus V'' \oplus sV)$ définies par $j'(v) = v'$ et $j''(v) = v''$.

En particulier on a l'identité $j' - j'' = Sd + DS$.

S'il n'y a aucune ambiguité, le cylindre sera noté $\big(T(V \oplus V \oplus sV), D\big)$ au lieu de $\big(T(V' \oplus V'' \oplus sV), D\big)$.

Définition 2.1 Soit (B, d_B) une algèbre différentielle graduée libre ou non, et $f, g\colon \big(T(V), d\big) \to (B, d_B)$ deux morphismes dans $k - DGA_1^*$. On dit que ces deux morphismes sont homotopes s'il existe $H\colon I\big(T(V), d\big) \to (B, d_B)$ un morphisme dans $k - DGA_1^*$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\big(T(V), d\big) \arrow[d, "j'"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\big(T(V \oplus V \oplus sV), D\big) \arrow[r, "H"] & (B, d) \\
\big(T(V), d\big) \arrow[u, "j''"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Et alors $f - g = H \circ j' - H \circ j'' = HSD - dHS$.

Deux tels morphismes sont égaux en cohomologie.

B $T(V)$-modèle et lemme de relèvement

Deux c.w. complexes 1-connexes X et Y ont le même k-type d'homotopie s'il existe une suite $(S_i)_{i=1}^{n+1}$ de c.w. complexes vérifiant : $S_0 = X$, $S_{n+1} = Y$ et telle qu'il existe des applications continues $f_i\colon S_i \to S_{i+1} (i = 0, \ldots, n)$ induisant des isomorphismes en cohomologies à coefficients dans k.

Une définition plus faible peut être donnée en termes de TV-modèles. Rappelons cette dernière : soit X un c.w. complexe 1-connexe à cohomologie de type fini. Dans [8] S. Halperin et J. M. Lemaire associent à X une k-algèbre différentielle graduée libre $\big(T(V), d\big)$ avec un quasi-isomorphisme

$$\varphi\colon \big(T(V), d\big) \to C^*(X; k)$$

vérifiant $dV \subset T^{\geq 2}(V)$ (condition de minimalité) et où $C^*(X; k)$ est l'algèbre des cochaînes normalisées de X à coefficients dans k.

Ce modèle est appelé modèle libre minimal de X à coefficients dans k. A isomorphisme près, V est déterminé par

$$V^n \cong \operatorname{Hom}\big(H_{n+1}(\Omega X; k), k\big) = H^{n+1}(\Omega X; k).$$

Si deux c.w. complexes 1-connexes X et Y ont le même k-type d'homotopie alors ils ont le même modèle libre minimal sur k.

En fait, Halperin et Lemaire construisent le modèle libre minimal de toute algèbre de cochaînes (A, d_A), 1-connexe et de type fini. C'est un quasi-isomorphisme $\varphi\colon \big(T(V), d\big) \to (A, d_A)$ où $\big(T(V), d\big)$ vérifie la condition de minimalité.

Lemme de relèvement 2.2 *Considérons le diagramme commutatif suivant dans la catégorie des algèbres de cochaînes cohomologiquement 1-connexes de type fini,*

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & T(Y) \arrow[d, "\psi"] \\ T(V \oplus W) \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "h"] & T(U) \end{tikzcd}$$

dans lequel i est une extension libre et ψ un quasi-isomorphisme.

Il existe un morphisme $h\colon T(V \oplus W) \to T(Y)$ tel que $h \circ i = g$ et $\psi \circ h$ homotope à f.
Le relèvement h est unique à homotopie près (relativement à $T(V)$).

C Modèle du produit tensoriel $\big(T(V) \otimes T(V), d_{V \otimes V}\big)$

Nous rappelons ici la construction du modèle libre minimal d'un produit tensoriel [4].

Soit $\big(T(V), d\big)$ une algèbre de cochaînes libre minimale cohomologiquement 1-connexe.
La désuspension de V est l'espace vectoriel $s^{-1}V$ défini par $(s^{-1}V)^{n+1} = V^n$.

Considérons l'algèbre tensorielle $\Big(T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big), d\Big)$ où V' et V'' sont deux copies de V.

Pour tout $v'' \in V''$ on a une application linéaire :

$$\begin{aligned} \delta_{v''}\colon V' &\to T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big) \\ v' &\mapsto \delta_{v''}(v') = v' \# v'' = s^{-1}(sv' \otimes sv''). \end{aligned}$$

On prolonge $\delta_{v''}$ en une dérivation sur $T(V')$ qu'on note encore $\delta_{v''}$,

$$\begin{aligned} \delta_{v''}\colon T(V') &\to T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big) \\ v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_p &\mapsto \delta_{v''}(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_p) = (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_p) \# v''. \end{aligned}$$

Ce procédé définit une application linéaire

$$\begin{aligned} \delta\colon V'' &\to \mathrm{Der}\Big(T(V'), T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big)\Big) \\ v'' &\mapsto \delta_{v''}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Der}\Big(T(V'), T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big)\Big)$ est un $T(V'')$-bimodule, on prolonge alors δ par dérivation sur $T(V'')$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1999-004-3 Published online by Cambridge University Press

Fixons une fois pour toutes la notation suivante : pour $a, b \in T(V)$, $a \# b = \delta_b(a)$.

Considérons $D_1\colon T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big) \to T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big)$ l'opérateur de degré +1 défini sur V' et V'' par d comme dans $T(V)$ et sur $s^{-1}(sV' \otimes sV'')$ par $D_1(v' \# v'') = v' \otimes v'' - (-1)^{|v'||v''|} v'' \otimes v' - \big(\delta v' \# v'' + (-1)^{|v'|} v' \# \delta v''\big)$.

On vérifie aisement que $D_1^2 = 0$ et que $\Big(T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big), D_1\Big)$ est le modèle libre minimal de $\big(T(V) \otimes T(V), d\big)$. S'il n'y a aucune ambiguité, nous écrivons dans la suite $T\big(V \oplus V \oplus s^{-1}(sV \otimes sV)\big)$ au lieu de $T\big(V' \oplus V'' \oplus s^{-1}(sV' \otimes sV'')\big)$.

D Algèbres de cochaînes quasi-commutatives [4]

Définition 2.3 Une algèbre de cochaînes quasi-commutative est la donnée d'un triplet (A, d_A, μ_A) où $(A, d_A) = \big(T(V), d\big)$ une algèbre de cochaînes libre de type fini et μ_A une classe d'homotopie de morphismes d'algèbres de cochaînes de $A \otimes A$ dans A qui prolonge la codiagonale $\nabla\colon A \amalg A \to A$ vérifiant :

(a) $\mu_A \circ [T] = \mu_A$,
(b) $\mu_A \circ (\mu_A \otimes 1) = \mu_A \circ (1 \otimes \mu_A)$,

où T est l'isomorphisme de transposition

$$\begin{aligned} T\colon A \otimes A &\to A \otimes A \\ a \otimes b &\mapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a. \end{aligned}$$

Définition 2.4 1) Une algèbre de cochaînes 1-connexe et de type fini est quasi-commutative si son modèle libre minimal l'est.

2) Soient (A, d_A, μ_A) et (B, d_B, μ_B) deux algèbres de cochaînes quasi-commutatives et $f\colon (A, d_A) \to (B, d_B)$ un morphisme d'algèbres de cochaînes. On dira que f est un morphisme d'algèbres de cochaînes quasi-commutatives si :

$$\big([f] \circ \mu_A\big)_{\mathrm{rel}\, A \amalg A} = \big(\mu_B \circ [f \otimes f]\big)_{\mathrm{rel}\, A \amalg A}.$$

Définition 2.5 La catégorie formée des algèbres de cochaînes quasi-commutatives et des morphismes *ad hoc* sera notée $k - Qdga^*$.

Si (A, d_A, μ_A) est une algèbre de cochaînes quasi-commutative, tout représentant de μ_A est appelé *quasi-multiplication*.

Remarques 2.6 1) Il est clair que l'algèbre de cohomologie à coefficients dans k d'une algèbre de cochaînes quasi-commutative est commutative (au sens gradué).

2) Exemple-Lemme [4] : a) Soit X un espace topologique simplement connexe ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe de type fini. Notons $C^*(X; k)$ son algèbre de cochaînes singulières normalisées à coefficients dans k, alors $C^*(X; k)$ est quasi-commutative.

b) Si $f\colon X \to Y$ est une application continue entre espaces topologiques simplement connexes, alors $f\colon C^*(Y; k) \to C^*(X; k)$ est un morphisme d'algèbres quasi-commutatives.

3 Cup-i-produits sur une algèbre de cochaînes quasi-commutative

Le but de ce paragraphe est la construction d'applications linéaires $\cup_i\colon T(V)\otimes T(V)\to T(V)$ de degré $-i$ qui soient des cup-i-produits. Ces applications nous permettront de définir des carrés de Steenrod.

Soit alors (A, d_A, μ_A) un objet dans $k - Qdga_1^*$. Puisque son modèle minimal $\big(T(V), d\big)$ est quasi-commutatif, il existe un morphisme d'algèbres de cochaînes $\mu_V\colon M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\to T(V)$ qui prolonge la codiagonale $\nabla\colon T(V\oplus V)\to T(V)$ où $M\big(T(V)\otimes T(V)\big)$ est le modèle libre minimal du produit tensoriel $T(V)\otimes T(V)$.

Définition 3.1 Une application linéaire $f\colon T(V)\otimes T(V)\to T(V)$ est une bi-dérivation de degré $-i$ si : $\forall (x,y,z)\in V^3$,

$$f(x\otimes yz) = f(x\otimes y)z + (-1)^{(|x|+i)|y|}yf(x\otimes z)$$
$$f(xy\otimes z) = (-1)^{|y||z|}f(x\otimes z)y + (-1)^{i|x|}xf(y\otimes z)$$

Construction d'une bi-dérivation

Soit $f\colon V\otimes V\to T(V)$ une application linéaire de degré $-i$. On va construire la bi-dérivation associée à f.

Soit $v\in V$, on définit :

$$f_v\colon V\to T(V)$$
$$u\mapsto f_v(u) = f(v\otimes u).$$

On prolonge ensuite f_v par dérivation sur $T(V)$. On note toujours $f_v\colon T(V)\to T(V)$ la dérivation ainsi obtenue. Ce qui nous donne une application linéaire :

$$\tilde f\colon V\to \mathrm{Der}\big(T(V), T(V)\big)$$
$$v\mapsto f_v.$$

Mais $\mathrm{Der}\big(T(V), T(V)\big)$ étant un $T(V)$-bimodule, on prolonge $\tilde f$ en une dérivation sur $T(V)$ qu'on note encore $\tilde f$.

La bi-dérivation associée à f est alors :

$$f\colon T(V)\otimes T(V)\to T(V)$$
$$x\otimes y\mapsto f(x\otimes y) = \tilde f(x)(y).$$

On pose $\cup_i = 0$ pour $i<0$, et $\cup_0\colon T(V)\otimes T(V)\to T(V)$ est le produit de $T(V)$.

Définition du cup-1-produit Le $\cup_1$-produit est la bi-dérivation associée à l'application linéaire de degré -1 :

$$\mu\colon V\otimes V\to T(V)$$
$$u\otimes v\mapsto \mu_V(u\,\#\,v).$$

Définition des cup-2-produits Notons T_0 l'isomorphisme de $M\big(T(V)\otimes T(V)\big)$ sur lui même induit par l'isomorphisme de transposition $T\colon T(V)\otimes T(V)\to T(V)\otimes T(V)$. Par définition $\mu_V\circ T$ est homotope à μ_V (relativement à $T(V\oplus V)$).

Si $I\big(T(V)\otimes T(V)\big)$ désigne le cylindre sur $T(V)\otimes T(V)$, qui est aussi le cylindre sur $M\big(T(V)\otimes T(V)\big)$, on a une suite de morphismes d'algèbres de cochaînes, indexée par Γ_2, $H_2^{\alpha_2}\colon I\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big)\to T(V)$, $\alpha_2\in\Gamma_2$, qui sont des homotopies entre $\mu_V\circ T$ et μ_V, (relativement à $T(V\oplus V)$).

On définit pour chaque $\alpha_2\in\Gamma_2$ une application linéaire de degré -2 :

$$\begin{aligned}\cup_2^{\alpha_2}\colon V\otimes V &\to T(V)\\ u\otimes v &\mapsto H_2^{\alpha_2}(su\otimes sv)\end{aligned}$$

et $\cup_2^{\alpha_2}\colon T(V)\otimes T(V)\to T(V)$ est alors la bi-dérivation associée à $\cup_2^{\alpha_2}$.

Définition des cup-n-produits $(n\geq 3)$ Soit $I\big(T(V),d_V\big)$ le cylindre sur l'algèbre libre minimale $\big(T(V),d_V\big)$. On sait que $I\big(T(V),d_V\big)=\big(T(V\oplus V\oplus sV),D\big)$ et qu'on a un quasi-isomorphisme surjectif $p\colon\big(T(V\oplus V\oplus sV),D\big)\to T(V)$ qui prolonge la codiagonale $\nabla\colon T(V\oplus V)\to T(V)$ et qui envoie sV sur 0.

L'isomorphisme différentiel $T_0\colon T\big(V\oplus V\oplus s^{-1}(sV\otimes sV)\big)\to T\big(V\oplus V\oplus s^{-1}(sV\otimes sV)\big)$ envoie la première copie de V sur la deuxième et inversement, et $T_0s^{-1}(su\otimes sv)=(-1)^{|u|\,|v|+|v|\,|u|}s^{-1}(sv\otimes su)$. De même T induit un isomorphisme différentiel $T_1\colon I\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big)\to I\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big)$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} I\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "T_1"'] & M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[d, "T_0"] \\ I\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \arrow[r, "p"] & M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près.

https://doi.org/10.4153/CJM-1999-004-3 Published online by Cambridge University Press

Fixons $\alpha_2 \in \Gamma_2$ et observons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[dl, "="'] \arrow[d, "j'"] \arrow[dr, "\mu_V"] & \\
M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[d, "T_0"'] & I\Big(M\big(T(V)\otimes (V)\big)\Big) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "H_2^{\alpha_2}"] \arrow[d, "T_1"] & T(V) \arrow[d, "="] \\
M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[dr, "="'] & I\Big(M\big(T(V)\otimes (V)\big)\Big) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "H_2^{\alpha_2}"] & T(V) \\
 & M\big(T(V)\otimes T(V)\big). \arrow[u, "j''"] \arrow[ur, "\mu_V\circ T_0"] &
\end{tikzcd}$$

Posons pour simplifier les écritures $H_2 = H_2^{\alpha_2}$.

Puisque $H_2 \circ j' = \mu_V$ et $p \circ j' = \mathrm{Id}$, on a $H_2 \circ j' = \mu_V \circ p \circ j'$.

Comme $j' \circ p \sim \mathrm{Id}$ on a alors $H_2 \sim \mu_V \circ p$.

Or H_2 est une homotopie entre $\mu_V \circ T_0$ et μ_V, donc $H_2 \circ j'' = \mu_V \circ T_0$ et $p \circ j'' = \mathrm{Id}$, de sorte que $H_2 \circ j'' = \mu_V \circ T_0 \circ p \circ j''$ et par conséquent H_2 est homotope à $\mu_V \circ T_0 \circ p$. Mais $T_0 \circ p = p \circ T_1$; on en déduit alors que H_2 est homotope à $\mu_V \circ p \circ T_1$. C'est-à-dire finalement que H_2 est homotope à $H_2 \circ T_1$ et les deux coïncident sur $I\big(T(V \oplus V)\big)$.

Il existe alors $H_3^{\alpha_3} \colon I^2\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \to T(V)$, $\alpha_3 \in \Gamma_3$, une suite de morphismes d'algèbres de cochaînes, indexée par Γ_3, qui sont des homotopies entre H_2 et $H_2 \circ T_1$ (relativement à $I\big(T(V \oplus V)\big)$).

On définit ainsi une application linéaire de degré -3 :

$$\begin{aligned}\bigcup\nolimits_3^{\alpha_3}: V\otimes V &\to T(V)\\ u\otimes v &\mapsto H_3^{\alpha_3} s(su\otimes sv)\end{aligned}$$

dont la bi-dérivation associée est un cup-3-produit encore notée $\cup_3^{\alpha_3}$. Remarquons que la construction des $\cup_3^{\alpha_3}$ dépend du choix de $\alpha_2 \in \Gamma_2$.

Fixons $\alpha_k \in \Gamma_k$ pour tout $1 < k < n+1$ et supposons qu'on ait construit $\cup_n^{\alpha_n}$ de degré $-n$ pour $n \geq 3$ à partir d'une homotopie $H_n^{\alpha_n}$ entre $H_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ et $H_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \circ T_{n-2}$ (relativement à $I^{n-2}\big(T(V\oplus V)\big)$ où T_{n-2} est un relèvement itéré de T) :

$$T_{n-2}: I^{n-2}\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \to I^{n-2}\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big)$$

et I^{n-2} est le cylindre itéré $(n-2)$-fois. On montre comme dans le cas $n=2$ que $H_n^{\alpha_n}$ est homotope à $H_n^{\alpha_n} \circ T_{n-1}$ (relativement à $I^{n-1}\Big(M\big(T(V\oplus V)\big)\Big)$) et qu'on a par conséquent une suite de morphismes d'algèbres de cochaînes, indexée par Γ_{n+1}, $H_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$: $I^n\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \to T(V)$, $\alpha_{n+1} \in \Gamma_{n+1}$, qui sont des homotopies entre $H_n^{\alpha_n}$ et $H_n^{\alpha_n} \circ T_{n-1}$ (relativement à $I^{n-1}\Big(M\big(T(V\oplus V)\big)\Big)$).

On définit alors une application linéaire de degré $-n-1$:

$$\begin{aligned}\bigcup\nolimits_{n+1}^{\alpha_{n+1}}: V\otimes V &\to T(V)\\ u\otimes v &\mapsto H_{n+1}^{\alpha_{n+1}}\big(s^{n-1}(su\otimes sv)\big)\end{aligned}$$

La bi-dérivation associée à cette application qu'on note encore $\cup_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ est un cup-(n+1)-produit.

Remarquons que la construction de $\cup_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ dépend des choix des $\alpha_k \in \Gamma_k, 2 \leq k \leq n$.

Lemme 3.2 *Soit $\big(T(V), d_V, \mu_V\big)$ une algèbre de cochaînes quasi-commutative, avec $\big(T(V), d_V\big)$ libre minimale. Alors pour tout (a,b) dans $T(V)$, $n \geq 1$, on a :*

$$d_V(a\cup_n b) = a\cup_{n-1} b - (-1)^{|a||b|+|a|+|b|} b\cup_{n-1} a - d_V a\cup_n b - (-1)^{|a|} a\cup_n d_V b.$$

Démonstration Puisque les $\cup_i$ sont des bi-dérivations, il suffit alors d'établir le lemme sur les générateurs $v\otimes v'$.

On sait que : $d_V(v\cup_{n+1} v') = d_V H_{n+1} s^{n-1}(sv\otimes sv') = H_n s^{n-2}(sv\otimes sv') - H_n T_{n-1}\big(s^{n-2}(sv\otimes sv')\big) - H_{n+1}\Big(S\big(d_{n-1}s^{n-2}(sv\otimes sv')\big)\Big)$, où d_n désigne la différentielle du cylindre n fois itéré $I^n\big(T(V)\otimes T(V)\big)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1999-004-3 Published online by Cambridge University Press

Puisque l'isomorphisme $T_n\colon I^n(M(T(V)\otimes T(V)) \to I^n\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big)$ induit par la transposition vérifie $T_n s^{n-1}(sv\otimes sv') = (-1)^{(|v|+1)(|v'|+1)} s^{n-1}(sv'\otimes sv)$, on a :

$$H_n T_{n-1} s^{n-2}(sv\otimes sv') = (-1)^{|v||v'|+|v|+|v'|} H_n s^{n-2}(sv'\otimes sv).$$

Comme H_{n+1} est une homotopie relative à $I^{n-1}\big(T(V\oplus V)\big)$, on a :

$$H_{n+1}\Big(S\big(d_{n-1}s^{n-2}(sv\otimes sv')\big)\Big) = \cup_{n+1}\big((d_V\otimes d_V)(v\otimes v')\big).$$

Ainsi : $d_V(v\cup_{n+1} v') = v\cup_n v' - (-1)^{|v||v'|+|v|+|v'|} v'\cup_n v - d_V v\cup_{n+1} v' - (-1)^{|v|} v\cup_{n+1} d'_V v'$.

Lemme 3.3 *On suppose que la caractéristique de k est 2. Pour tout $n \geq 0$, on a :*

1) si a est un cocycle dans $T(V)$ alors $a\cup_n$ a l'est aussi dans $T(V)$.
2) si a est un cobord, alors $a\cup_n$ a l'est aussi.

Démonstration La partie 1) est une conséquence immédiate du lemme 3-2.
2) Posons $a = dz$. Puisque la caractéristique de k est 2, le lemme 3-2 donne :

$$d_V(d_V z\cup_n z) = d_V z\cup_{n-1} z + z\cup_{n-1} d_V z + d_V z\cup_n d_V z = d_V(z\cup_{n-1} z) + a\cup_n a.$$

On déduit alors que $a\cup_n a$ est un cobord.

4 Algèbres quasi-commutatives et carrés de Steenrod

Définition 4.1 Notons $\mathrm{Z}_2 = \mathrm{Z}/2\mathrm{Z}$ et soit A une Z_2-algèbre graduée. On dit que A est un module instable sur l'algèbre de Steenrod si pour tous entiers $i \geq 0$, $n \geq 0$ on a des morphismes de Z_2-espaces vectoriels $\mathrm{Sq}^i\colon A^n \to A^{n+i}$ vérifiant :

1) $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{Id}$;
2) si $|x| = n$ alors $\mathrm{Sq}^n x = x^2$;
3) si $i > n$ et $|x| = n$ alors $\mathrm{Sq}^i x = 0$;
4) $\mathrm{Sq}^p(x.y) = \sum_{i=0}^{p} \mathrm{Sq}^i(x).\,\mathrm{Sq}^{p-i}(y)$ (formule de cartan);
5) Si $0 < a < 2b$ alors $\mathrm{Sq}^a\,\mathrm{Sq}^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} C_{a-2j}^{b-1-j}\,\mathrm{Sq}^{a+b-j}\,\mathrm{Sq}^j$ (relations d'Adem),

les coefficients du binômes étant dans Z_2.

Définition 4.2 1) Une algèbre de cochaînes fortement quasi-commutative est la donnée d'un triplet $(A, d, \{H_i\}_{i\geq 1})$ où (A, d, H_1) est une algèbre de cochaînes quasi-commutative, et H_i est une (classe d') homotopie entre H_{i-1} et $H_{i-1}\circ T$ où T est l'isomorphisme de transposition.

2) Soient $(A, d, \{H_i\}_{i\geq 1})$ et $(B, d_B, \{H'_i\}_{i\geq 1})$ deux algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives et $f\colon (A, d, \mu_A) \to (B, d_B, \mu_B)$ un morphisme d'algèbres quasi-commutatives; notons encore $f\colon \big(T(V), d_V\big) \to \big(T(U), d_U\big)$ le morphisme induit par f

au niveau des modèles libres minimaux. On dira que f est un morphisme d'algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives si pour tout i le diagramme

$$\begin{tikzcd} I^{i-1}\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \arrow[r, "H_i"] \arrow[d, "I^{i-1}(M(f\otimes f))"'] & T(V) \arrow[d, "f"] \\ I^{i-1}\Big(M\big(T(U)\otimes T(U)\big)\Big) \arrow[r, "H'_i"'] & T(U) \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près.

3) La catégorie formée des algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives et des morphismes idoines sera notée $FQdga$.

Nous supposons dorénavent toutes les algèbres considérées libres. Soit $\big(T(V), d_V, \{H_i\}_{i\geq 1}\big)$ une algèbre de cochaînes fortement quasi-commutative; en reprenant la construction du paragraphe précédent, on construit des cup-i-produits $\cup_i$ sur $T(V)$.

Remarque 4.3 Soit $f\colon \big(T(V), d_V, \mu_V\big) \to \big(T(U), d_U, \mu_U\big)$ un morphisme d'algèbres de cochaînes quasi-commutatives où $\big(T(V), d_V\big)$ et $\big(T(U), d_U\big)$ sont libres minimales.

Le morphisme $f\otimes f\colon T(V)\otimes T(V) \to T(U)\otimes T(U)$ se relève en $F_0\colon M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \to M\big(T(U)\otimes T(U)\big)$ défini par $F_0(v) = f(v)$ et $F_0(v \# v') = f(v) \# f(v')$.

Remarquons que tout morphisme d'algèbres de cochaînes libres minimales $f\colon T(W) \to T(Z)$ induit un morphisme $f_1\colon I\big(T(W)\big) \to I\big(T(Z)\big)$ défini par : $f_1(w) = f(w)$ pour tout $w \in W$ et $f_1(sw) = S\big(f(w)\big)$ où $S\colon T^+(Z) \to I\big(T(Z)\big)$ est la dérivation de degré +1 défini au paragraphe 2.

Ainsi le relèvement $F_0\colon M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \to M\big(T(U)\otimes T(U)\big)$ de $f\otimes f$ défini plus haut induit par récurrence un morphisme d'algèbres de cochaînes $F_n\colon I^n\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \to I^n\Big(M\big(T(U)\otimes T(U)\big)\Big)$.

En particulier on a $F_n\big(s^{n-1}(sv\otimes sv')\big) = S^n\big(f(v) \# f(v')\big)$ où S^n est la composée n-fois de la dérivation S.

Lemme 4.4 **(naturalité)** *Soit* $f\colon \big(T(V), d_V, \{H_i\}_{i\geq 1}\big) \to \big(T(U), d_U, \{H'_i\}_{i\geq 1}\big)$ *un morphisme d'algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives. Alors* $[f\circ \cup_n] = [\cup_n \circ (f\otimes f)]$ *(en cohomologie).*

Démonstration Comme f est un morphisme d'algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives, $f\circ\mu_V$ est homotope à $\mu_U\circ F_0$ où F_0 est le relèvement de $f\circ f$ construit plus haut.

https://doi.org/10.4153/CJM-1999-004-3 Published online by Cambridge University Press

Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
M\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[d, "F_0"'] & I\Big(M\big(T(V)\otimes T(V)\big)\Big) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "H_2"] \arrow[d, "F_1"'] & T(V) \arrow[d, "f"] \\
M\big(T(U)\otimes T(U)\big) & I\Big(M\big(T(U)\otimes T(U)\big)\Big) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "H_2'"] & T(U)
\end{tikzcd}$$

On sait que $H_2 \sim \mu_V \circ p$ et que $H_2' \sim \mu_U \circ p$. De plus $F_0 \circ p = p \circ F_1$, d'où $f \circ H_2 \sim f \circ \mu_V \circ p \sim \mu_U \circ F_0 \circ p = \mu_U \circ p \circ F_1 \sim H_2' \circ F_1$ (relativement à $I\big(T(V \oplus V)\big)$). Supposons avoir montré que $f \circ H_n$ est homotope à $H_n' \circ F_{n-1}$ (relativement à $I^{n-1}\big(T(V \oplus V)\big)$) pour $n \geq 1$ et observons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& I^{n-1}\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[dl, "="'] \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "H_n"] & \\
I^{n-1}\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[d, "F_{n-1}"'] & I^{n}\big(T(V)\otimes T(V)\big) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "H_{n+1}"] \arrow[d, "F_n"'] & T(V) \arrow[d, "f"'] \\
I^{n-1}\big(T(U)\otimes T(U)\big) \arrow[dr, "="'] & I^{n}\big(T(U)\otimes T(U)\big) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "H_{n+1}'"] & T(U) \\
& I^{n-1}\big(T(U)\otimes T(U)\big) \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "H_n'"] &
\end{tikzcd}$$

on a $H_{n+1} \circ j = H_n$ et $H_n' \circ F_{n-1}$ est homotope à $f \circ H_n$ (hypothèse de récurrence).

Puisque $p \circ j = \mathrm{Id}$ et $j \circ p \sim \mathrm{Id}$, $H_{n+1} \circ j = H_n \circ p \circ j$, ce qui donne $H_{n+1} \sim H_n \circ p$. De même on a : $H_{n+1}' \sim H_n' \circ p$.

Nous déduisons que $f \circ H_{n+1} \sim f \circ H_n \circ p \sim H_n' \circ F_{n-1} \circ p = H_n' \circ p \circ F_n \sim H_{n+1}' \circ F_n$ (relativement à $I^n\big(T(V \oplus V)\big)$).

Nous montrons maintenant que pour tout $i \geq 0$, il existe une application linéaire $M_i \colon T(V) \otimes T(V) \to T(U)$ de degré $-i-1$ telle que :

$$f \circ \cup_i - \cup_i \circ f \otimes f = d_U \circ M_i + M_i \circ d_V \otimes d_V. \tag{1}$$

Si $i = 0$, on prend $M_0 = 0$.

Soit maintenant $\tilde{M}_n$ une homotopie (relativement à $I^n\bigl(T(V \oplus V)\bigr)$) entre $H'_{n+1} \circ F_n$ et $f \circ H_{n+1}$. Posons $M_n(v \otimes v') = \tilde{M}_n s^n(sv \otimes sv')$ et on note encore M_n la bi-dérivation associée à M_n.

Il suffit alors de montrer la formule (1) pour les générateurs $v \otimes v'$.

Pour cela, on a :

$$\begin{aligned} d_U M_n(v \otimes v') \quad &= \quad d_U \tilde{M}_n s^n(sv \otimes sv') = f \circ H_{n+1} s^{n-1}(sv \otimes sv') \\ &\qquad - H'_{n+1} \circ F_n\bigl(s^{n-1}(sv \otimes sv')\bigr) - \tilde{M}_n\bigl(Sds^{n-1}(sv \otimes sv')\bigr). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $\tilde{M}_n$ est une homotopie relativement à $I^n\bigl(T(V \oplus V)\bigr)$ on a :

$$\tilde{M}_n\bigl(Sds^{n-1}(sv \otimes sv')\bigr) = M_n\bigl((d_V \otimes d_V)(v \otimes v')\bigr).$$

La définition de F_n et des $\cup_n$ nous donne :

$$f \circ H_{n+1}\bigl(s^{n-1}(sv \otimes sv')\bigr) = f \circ \cup_{n+1}(v \otimes v')$$

et

$$H'_{n+1} \circ F_n\bigl(s^{n-1}(sv \otimes sv')\bigr) = \cup_{n+1} \circ (f \otimes f)(v \otimes v').$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 4.4.

Nous définissons maintenant des applications linéaires $\mathrm{Sq}_j \colon T(V) \to T(V)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sq}_j \colon \bigl(T(V)\bigr)^n &\to \bigl(T(V)\bigr)^{2n-j} \\ x \mapsto \mathrm{Sq}_j(x) &= \begin{cases} x \cup_j x & \text{si } j \neq n \\ x & \text{si } j = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Le lemme 3.3 induit la proposition suivante :

Proposition 4.5 *L'application* Sq_j *induit une application linéaire :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sq}_j \colon H^n\bigl(T(V); \mathrm{Z}_2\bigr) &\to H^{2n-j}\bigl(T(V); \mathrm{Z}_2\bigr) \\ x &\mapsto \bigl[\mathrm{Sq}_j(x)\bigr] \end{aligned}$$

Nous définissons alors une suite de morphismes :

$$\mathrm{Sq}^j \colon H^n\bigl(T(V); \mathrm{Z}_2\bigr) \to H^{n+j}\bigl(T(V); \mathrm{Z}_2\bigr)$$

en posant $\mathrm{Sq}^j = \mathrm{Sq}_{n-j}$.

Définition 4.6 On définit les carrés de Steenrod de $\bigl(T(V), d_V, \{H_i\}_{i \geq 1}\bigr)$ comme étant la suite des morphismes Sq^i.

Lemme 4.7 *On a :*

https://doi.org/10.4153/CJM-1999-004-3 Published online by Cambridge University Press

(a) *si* $|x| = n$ *alors* $\mathrm{Sq}^n\, x = x^2$;
(b) $\mathrm{Sq}^n\, x = 0$ *si* $|x| < n$;
(c) $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{Id}$.

Démonstration (a) Si $|x| = n$, $\mathrm{Sq}^n\, x = \mathrm{Sq}_0\, x = [x \cup_0 x] = x^2$.

(b) Si $|x| = i < n$, $\mathrm{Sq}^n\, x = \mathrm{Sq}_{i-n}\, x = [x \cup_{i-n}]x = 0$, d'après la définition des $\cup_i$.

(c) Soit $x \in H^n\big(T(V); \mathbb{Z}_2\big)$, $\mathrm{Sq}^0\, x = \mathrm{Sq}_n\, x = x$.

Considérons maintenant l'algèbre tensorielle $\big(T(t), 0\big)$ sur un générateur t de degré 1, à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ et de différentielle triviale. On définit une quasi-multiplication μ: $T\big(t, t', s^{-1}(st \otimes st')\big) \to T(t)$ par $\mu(t) = \mu(t') = \mu s^{-1}(st \otimes st') = t$; en posant $H_i st = 0$ dans le cylindre itéré i fois pour tout $i > 0$, on voit que $\big(T(t), d, \{H_i\}_{i \geq 1}\big)$ est fortement quasi-commutative.

On peut alors définir des $\cup_i$, des Sq_j et des Sq^i sur $T(t)$. De plus, pour tout $i \geq 1$, $T(V) \otimes \big(T(t)\big)^{\otimes i}$ est une algèbre de cochaînes fortement quasi-commutative pour laquelle on peut définir les mêmes applications $\cup_i$, Sq_j et Sq^i de manière unique via le produit tensoriel.

Soit $\big(T(V), d_V, \{H_i\}_{i \geq 1}\big)$ une algèbre de cochaînes fortement quasi-commutative à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$, on a des applications linéaires $P_i^t\colon T(V) \to M\big(T(V) \otimes T(t)\big)$ définies par :

$$\forall v \in T(V), \quad P_i^t(v) = \begin{cases} v \cup_i v \otimes t^i & \text{si } i \geq 0 \text{ et } i \neq |v| \\ v \otimes t^i & \text{si } i = |v| \end{cases}$$

où $M\big(T(V) \otimes T(t)\big)$ est le modèle libre minimal de $T(V) \otimes T(t)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

Posons alors $P^t = \sum_{i \geq 0} P_i^t$; c'est une application linéaire de $T(V)$ dans $T(V) \otimes T(t)$. D'après le lemme 3.3, P^t transforme les cocycles en cocycles et les cobords en cobords.

Considérons le diagramme suivant :

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{ccc} T(V) & \xrightarrow{P^t \circ P^s} & M\big(T(V) \otimes T(s) \otimes T(t)\big) \\ {\scriptstyle P^s}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle M(\mathrm{Id} \otimes T)} \\ M\big(T(V) \otimes T(s)\big) & \xrightarrow{P^t} & M\big(T(V) \otimes T(t) \otimes T(s)\big) \end{array}$$

où l'application T désigne l'isomorphisme de transposition.

Soit la série $\mathrm{Sq}(m) = \sum_{i=0}^{\infty} m^i\, \mathrm{Sq}^i$.

Lemme 4.8 *Si le diagramme (2) commute en cohomologie alors la fonction de deux variables* $Z(u, v) = \mathrm{Sq}(v^2 + vu).\,\mathrm{Sq}(u^2)$ *est symétrique en* (u, v).

Démonstration Rappelons que la cohomologie d'une algèbre de cochaînes quasi-commutative est commutative.

https://doi.org/10.4153/CJM-1999-004-3 Published online by Cambridge University Press

Soit $x \in H^n\big(T(V); \mathrm{Z}_2\big)$,

$$H^n(\mathrm{Id} \otimes T \circ P^t \circ P^s)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \operatorname{Sq}_j\Big(\sum_{i=0}^{\infty} t^i \operatorname{Sq}_i(x)\Big)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} s^j \operatorname{Sq}^{2n-j}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} t^i \operatorname{Sq}^{n-i}(x)\Big)$$

En posant $k = n - i$ et $m = 2n - j$, nous obtenons :

$$H^n(\mathrm{Id} \otimes T \circ P^t \circ P^s)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} s^{2n-m} \operatorname{Sq}^m\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^{n-k} \operatorname{Sq}^k(x)\Big)$$
$$= \sum_{k,m=0}^{\infty} s^{2n} s^{-m} \operatorname{Sq}^m\big(t^{n-k} \operatorname{Sq}^k(x)\big)$$

D'autre part, en utilisant la formule de Cartan, que nous établissons plus loin, on peut facilement montrer que $\sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Sq}^m \colon H^*\big(T(V); \mathrm{Z}_2\big) \to H^*\big(T(V); \mathrm{Z}/2\mathrm{Z}\big)$ est un homomorphisme d'anneaux, et par conséquent $\sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \operatorname{Sq}^m$ l'est aussi.

Maintenant, comme $\operatorname{Sq}^0 = \mathrm{Id}$ et $\operatorname{Sq}^{|x|} x = x^2$, on a $\sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Sq}^m(t) = \operatorname{Sq}^0(t) + \operatorname{Sq}^1(t) = t + t^2$ et donc $\sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \operatorname{Sq}^m(t) = t + s^{-1}t^2$.

On en déduit que $\sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \operatorname{Sq}^m(t^{n-k}) = (t + s^{-1}t^2)^{n-k}$ et que :

$$H^n(\mathrm{Id} \otimes T \circ P^t \circ P^s)(x) = s^{2n} \sum_{k,m=0}^{\infty} (t + s^{-1}t^2)^{n-k} s^{-m} \operatorname{Sq}^m \operatorname{Sq}^k(x)$$
$$= s^n t^n (s+t)^n \sum_{k,m=0}^{\infty} (t + s^{-1}t^2)^{-k} s^{-m} \operatorname{Sq}^m \operatorname{Sq}^k(x)$$
$$= s^n t^n (s+t)^n \operatorname{Sq}\Big(s^{-1} \operatorname{Sq}\big((t + s^{-1}t^2)^{-1}\big)(x)\Big).$$

En faisant le changement de variables $s^{-1} = u(u+v)$ et $t^{-1} = v(u+v)$, on trouve que $H^n(\mathrm{Id} \otimes T \circ P^t \circ P^s)(x) = [uv(u+v)]^{-2n} \operatorname{Sq}(u^2 + uv). \operatorname{Sq}(v^2)x$.

Par conséquent, si le diagramme (2) commute en cohomologie la fonction $Z(u,v)$ est symétrique en (u,v) et réciproquement.

Théorème 4.9 *Soit $\big(T(V), d_V, \{H_i\}_{i\geq 1}\big)$ une algèbre de cochaînes fortement quasi-commuta tive telle que le diagramme (2) soit commutatif en cohomologie. Alors $H^*\big(T(V); \mathrm{Z}_2\big)$ est un module instable sur l'algèbre de Steenrod à coefficients dans Z_2.*

Remarques 4.10 1) La démonstration du lemme 4.8 est essentiellement celle donnée par Bulett et Macdonald dans le cas topologique [6].

2) D'après le lemme 4.8 et le résultat principal de [6] la commutativité du diagramme (2) en cohomologie est équivalente au fait que les Sq^i vérifient les relations d'Adem.

Démonstration du théorème 4.9 1) Si $x \in H^n\big(T(V); \mathrm{Z}_2\big)$ alors $\mathrm{Sq}^0 x = \mathrm{Sq}_n x = x$ et donc $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{Id}$.

2) Relations d'Adem.

Il s'agit de montrer que si $o < a < 2b$ alors :

$$\mathrm{Sq}^a \mathrm{Sq}^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} C_{a-2j}^{b-1-j} \mathrm{Sq}^{a+b-j} \mathrm{Sq}^j$$

où les coefficients sont dans Z_2 et $[a/2]$ désigne la partie entière de $a/2$. D'après [6], cette égalité est équivalente à $\mathrm{Sq}(s^2 + st).\,\mathrm{Sq}(t^2) = \mathrm{Sq}(t^2 + ts).\,\mathrm{Sq}(s^2)$. Cette dérnière est garantie par le lemme 4.8.

3) Formule de Cartan.

Observons que si $\big(T(V), d_V, \{H_i\}_{i\geq 1}\big)$ une algèbre de cochaînes fortement quasi-commutative alors $\big(T(V) \otimes T(V), d_V \otimes d_V, \{H_i \otimes H_j\}_{i,j\geq 1}\big)$ l'est aussi. On a donc, pour tout j, une application linéaire de degré $n - j$

$$\widetilde{\mathrm{Sq}}_j \colon H^n\big(T(V) \otimes T(V); \mathrm{Z}_2\big) \to H^{2n-j}\big(T(V) \otimes T(V); \mathrm{Z}_2\big)$$

définie de la même manière que les Sq_j.

De plus, les morphismes μ_V, τ' et τ'' sont des morphismes d'algèbres de cochaînes fortement quasi-commutatives où τ' et τ'' désignent les inclusions des deux copies de $T(V)$ dans $M\big(T(V) \otimes T(V)\big)$.

Par la naturalité des Sq_j (lemme 4.4), on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H^n\big(T(V)\big) \arrow[dl, "H^n(\tau')"'] \arrow[dr, "\mathrm{Sq}_j"] & \\
H^n\big(T(V) \otimes T(V)\big) \arrow[rr, "H^{2n-j}(\mu_V)\circ\widetilde{\mathrm{Sq}}_j"] & & H^{2n-j}\big(T(V)\big) \\
 & H^n\big(T(V)\big). \arrow[ul, "H^n(\tau'')"] \arrow[ur, "\mathrm{Sq}_j"'] &
\end{tikzcd}$$

En fait, $\widetilde{\mathrm{Sq}}_j$ est la seule application linéaire de degré $n - j$ rendant le diagramme ci-dessus commutatif pour tout j. Par conséquent, si $|x| + |y| = n$, on a $\widetilde{\mathrm{Sq}}_j(x\otimes) = \sum_{i=o}^{j} (-1)^{|x||y|} \mathrm{Sq}_i(x) \otimes \mathrm{Sq}_{j-i}(y)$.

Posons $|x| = t$, et $|y| = n - t$. Comme les coefficients sont dans Z_2, on a pour tout p :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sq}^p(x.y) &= H^*(\mu_V)\big(\widetilde{\mathrm{Sq}}^p(x \otimes y)\big) \\
&= H^*(\mu_V)\big(\widetilde{\mathrm{Sq}}_{n-p}(x \otimes y)\big) \\
&= H^*(\mu_V)\Big(\sum_{i=0}^{n-p} \mathrm{Sq}_i(x) \otimes \mathrm{Sq}_{n-p-i}(y)\Big) \\
&= H^*(\mu_V)\Big(\sum_{k=0}^{t-n+p} \mathrm{Sq}_{t-k}(x) \otimes \mathrm{Sq}_{n-p-t+k}(y)\Big) \\
&= H^*(\mu_V)\Big(\sum_{k=0}^{t-n+p} \mathrm{Sq}^k(x) \otimes \mathrm{Sq}^{p-k}(y)\Big) \\
&= H^*(\mu_V)\Big(\sum_{k=0}^{t} \mathrm{Sq}^k(x) \otimes \mathrm{Sq}^{p-k}(y)\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{t} \mathrm{Sq}^k(x).\, \mathrm{Sq}^{p-k}(y) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{Sq}^k(x).\, \mathrm{Sq}^{p-k}(y).
\end{aligned}$$

5 Lien avec la topologie

Notations 5.1 Notons DGA^* (resp. $DGA*$) la catégorie des algèbres de cochaînes, à coefficients dans k, 1-connexes de type fini (resp. la catégorie des algèbres de chaînes, à coefficients dans k, connexes de type fini), et DGC la catégorie des coalgèbres différentielles graduées, à coefficients dans k, connexes (la différentielle est de degré +1). On considère les deux foncteurs :

$B \colon DGA^* \to DGC$ le foncteur bar construction

$\Omega \colon DGC \to DGA^*$ le foncteur cobar construction.

Les foncteurs bar construction et cobar construction sont adjoints l'un de l'autre.

Soit C un objet de DGC et A un objet de DGA^*. Si $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ on définit $f \cup g = m(f \otimes g)\Delta$ où m est la multiplication dans A et Δ la comultiplication dans C.

Définition 5.2 Une cochaîne de torsion de C dans A est une application linéaire t de C dans A de degré +1 vérifiant $dt = t \cup t$, et $t\eta = 0$ $\epsilon t = 0$ où ϵ est l'augmentation et η est l'unité.

Notons $T(C, A)$ l'ensemble des cochaînes de torsion de C dans A.

***Lemme 5.3* [13]** *Il existe une bijection* $\omega^* \colon T(C, A) \to DGA(\Omega C, A)$.

Définitions 5.4 1) Soient t_0 et t_1 dans $T(C,A)$. Une homotopie de torsion entre t_0 et t_1 est une application linéaire l de C dans A de degré 0 vérifiant $dl = t_0 \cup l - l \cup t_1$, $l\eta = \eta$ et $\epsilon l = \epsilon$.

2) Soient $f, g\colon (A,d) \to (B,d')$ deux morphismes dans DGA^*. Une application linéaire $F\colon (A,d) \to (B,d')$ de degré r est une (f,g)-dérivation si

$$F(xy) = F(x)g(y) + (-1)^{r|x|} f(x)F(y).$$

Une dérivation homotopique de f à g est une (f,g)-dérivation de degré 1 vérifiant

$$d'F + Fd = f - g. \tag{3}$$

Lemme 5.5 *Si $f, g\colon (A,d) \to (B,d')$ sont deux morphismes dans DGA^*, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f et g sont homotopes dans DGA^*;
(ii) il existe une dérivation homotopique entre f et g.

***Lemme 5.6* [13]** *Si $C \in DGC$, on considère l'application canonique $t_C\colon C \to \Omega C$ qui à c associe $s^{-1}c$. Il existe une bijection entre $\{k \mid k$ est une dérivation homotopique entre g_0 et g_1 dans $DGA^*(\Omega C, A)\}$ et $\{l \mid l$ est une homotopie entre $g_0 t_C$ et $g_1 t_C$ dans $T(C,A)\}$.*

Proposition 5.7 *Soit X un c.w. complexe simplement connexe de type fini. Il existe une suite $\{H_i\}_{i\geq 1}$ de morphismes dans DGA^* telle que $H_1\colon \Omega B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big) \to C^*(X)$ est un modèle d'une approximation diagonale et H_{i+1} est une homotopie, naturelle en X, dans DGA^* entre H_i et $H_i \circ T$ où T est induit par l'isomorphisme de transposition.*

Démonstration On considère la composée $C^*(X) \otimes C^*(X) \xrightarrow{A.W} C^*(X \times X) \xrightarrow{C^*(\Delta)} C^*(X)$. Notons m le cup produit $C^*(\Delta) \circ A.W$.

D'après [13], il existe une cochaîne de torsion $B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big) \xrightarrow{\tilde{m}} C^*(X)$ telle que $\tilde{m} \circ i = m$ où i est l'application canonique de degré -1 de $C^*(X) \otimes C^*(X)$ dans $B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big)$.

En considérant alors les foncteurs F_0 et G qui associent à tout c.w. complexe X simplement connexe de type fini la coalgèbre $B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big)$ et l'algèbre $C^*(X)$ respectivement, on a ainsi deux transformations naturelles $\tilde{m}$ et $\tilde{m} \circ T$ qui vérifient les hypothèses du théorème des modèles acycliques pour les cochaînes de torsion [12, théorème 2.62, p. 40]. Il existe alors une homotopie, naturelle en X, $h_1\colon B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big) \to C^*(X)$ dans $T\Big(B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big), C^*(X)\Big)$ entre $\tilde{m}$ et $\tilde{m} \circ T$.

Par les lemmes 5.6 et 5.5, on a une homotopie naturelle en X, $H_1\colon I\Omega B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big) \to C^*(X)$ dans DGA^* de $\omega(\tilde{m})$ à $\omega(\tilde{m} \circ T)$ où ω est la bijection du lemme 5.3.

Comme les foncteurs ΩB et Id sont équivalents, H_1 induit un morphisme naturel en X encore noté H_1 dans $DGA^*\Big(\Omega BI\Omega B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big), C^*(X)\Big)$. Par le lemme 5.3, $\tilde{H}_1 = \omega^{-1} H_1$ est dans $T\Big(BI\Omega B\big(C^*(X) \otimes C^*(X)\big), C^*(X)\Big)$.

En considérant alors le foncteur F_1 qui associe à tout c.w. complexe X simplement connexe de type fini la coalgèbre $BI\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big)$ et le foncteur G, on a deux transformations naturelles $\tilde{H}_1$ et $\tilde{H}_1\circ T$ qui vérifient les hypothèses du théorème des modèles acycliques pour les cochaînes de torsion. Il existe alors une homotopie, naturelle en X, $h_2\colon BI\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big)\to C^*(X)$ dans $T\Big(BI\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big),C^*(X)\Big)$ entre $\tilde{H}_1$ et $\tilde{H}_1\circ T$.

Par les lemmes 5.6 et 5.5, on a une homotopie naturelle en X,
$H_2\colon \Omega BI\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big)\to C^*(X)$ dans DGA^* de $\omega(\tilde{H}_1)$ à $\omega(\tilde{H}_1\circ T)$.

Comme les foncteurs ΩB et Id sont équivalents, H_2 induit un morphisme naturel en X encore noté H_2 dans $DGA^*\Big(I^2\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big),C^*(X)\Big)$, qui est aussi un morphisme dans $DGA^*\Big(\Omega BI^2\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big),^*(X)\Big)$.

Par le lemme 5.3, $\tilde{H}_2=\omega^{-1}H_2$ est dans $T\Big(BI^2\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big),C^*(X)\Big)$.

On peut réitérer ce procédé pour trouver les H_i en utilisant les cylindres itérés $I^i\Big(\Omega B\big(C^*(X)\otimes C^*(X)\big)\Big)$.

En utilisant la proposition 5.7 et le lemme de relèvement on a le

Théorème 5.8 *Soit X un espace topologique simplement connexe ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe de type fini. Notons $\big(T(V),\mu_V,d_V\big)$ son modèle libre minimal quasi-commutatif.*

Il existe une suite (de classes) d'homotopies $\{H_i\}_{i\geq 1}$, naturelles en X, telle que $\big(T(V), d_V,\{H_i\}_{i\geq 1}\big)$ soit une algèbre fortement quasi-commutative où $H_1=\mu_V$.

Définition 5.9 L'algèbre fortement quasi-commutative $\big(T(V),d_V,\{H_i\}_{i\geq 1}\big)$ est le modèle libre minimal fortement quasi-commutatif de X.

Proposition 5.10 *Soit $f\colon X\to Y$ une application continue entre espaces topologiques simplement connexes ayant le type d'homotopie de c.w. complexes de type fini. Notons $\big(T(V),d_V,\{H_i\}_{i\geq 1}\big)$ et $\big(T(U),d_U,\{H'_i\}_{i\geq 1}\big)$ leurs modèles libres minimaux fortement quasi-commutatifs respectifs. Le morphisme induit $f\colon\big(T(V),d_V,\{H_i\}_{i\geq 1}\big)\to\big(T(U),d_U,\{H'_i\}_{i\geq 1}\big)$ est un morphisme d'algèbres fortement quasi-commutatives.*

Démonstration Il suffit d'exploiter la naturalité des H_i du théorème 5.8.

Comme conséquence de la proposition 5.10, de la naturalité des Sq_j et du théorème d'unicité de Steenrod [14] on a le

Corollaire 5.11 *Soit X un espace topologique simplement connexe ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe de type fini. Notons $\big(T(V),\mu_V,d_V\big)$ son modèle libre minimal quasi-commutatif. Les carrés de Steenrod construits ici sur $\big(T(V),\mu_V,d_V\big)$ sont les carrés de Steenrod usuels de X.*

On déduit de tout ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 5.12 *Si les modèles de deux espaces X et Y sont quasi-isomorphes dans la catégorie des algèbres fortement quasi-commutatives alors $H^*(X)$ et $H^*(Y)$ sont isomorphes en tant que modules sur l'algèbre de Steenrod à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.*

5.13. Exemples d'espaces ayant le même $T(V)$-modèle et des modèles fortement quasi-commutatifs distincts

Exemple 1 Soit $X = \Sigma\, \mathbb{C}P(2)$ et $Y = S^3 \bigvee S^5$; X et Y sont $\mathbb{Z}_2$-formels (voir par exemple [7]) et ont la même algèbre de cohomologie. Leur modèle libre minimal est $\big(T(V), d\big) = (T\big(s^{-1}T^{+}(x_2, y_4), d\big)$. Le modèle libre minimale de $T(V) \otimes T(V)$ est $\big(T(V \oplus V \oplus V \,\#\, V), D\big)$. Puisque l'algèbre de Hopf $H_*(\Omega X; \mathbb{Z}_2)$ n'est pas primitivement engendrée, il est facile de montrer que si μ désigne la quasi-multiplication associée à X alors $\mu(s^{-1}x_2 \,\#\, s^{-1}x_2) = s^{-1}y_4$.

De même, comme l'algèbre de Hopf $H_*(\Omega Y; \mathbb{Z}_2)$ est primitivement engendrée et si μ' désigne la quasi-multiplication associée à Y alors $\mu'(s^{-1}x_2 \,\#\, s^{-1}x_2) = 0$.

Les deux quasi-multiplications ne sont pas homotopes car $s^{-1}y_4$ n'est pas un bord.

Exemple 2 Soit $X = \Sigma^2 \mathbb{C}P(2)$ et $Y = S^4 \bigvee S^6$. Ces deux espaces ont le même modèle libre minimal quasi-commutatif $\big(T(V), d_V, \mu_V\big)$. Observons que si $\big(T(V), d_V, \mu_V, \{H_i\}_{i \geq 1}\big)$ est une algèbre fortement quasi-commutative, μ_V et H_n déterminent respectivement Sq_1 et Sq_n. Comme $\mathrm{Sq}^2(x_4) = 0$ dans $H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$ et $\mathrm{Sq}^2(x_4) = x_6$ dans $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, il est clair que ces deux espaces n'ont pas le même modèle fortement quasi-commutatif car les H_2 ne sont pas homotopes.

References

[1] J. F. Adams and P. J. Hilton, *On the chain algebra of loop space.* Comment. Math. Helv. **30**(1955), 305–330.
[2] D. J. Anick, *Hopf algebras up to homotopy.* J. Amer. Math. Soc. (3) **2**(1989), 417–451.
[3] D. J. Benson, *Representations and cohomology II: cohomology of groups and modules.* Cambridge Stud. Adv. Math. **31**.
[4] Bitjong Ndombol, *Algèbres de cochaînes quasi-commutatives et fibrations algébriques.* J. Pure Appl. Algebra **125**(1998), 261–273.
[5] G. E. Bredon, *Topology and geometry.* Graduate Texts in Math. **139**, Springer Verlag, 1993.
[6] S. R. Bullet and I. G. Macdonald, *On the Adem relations.* Topology (3) **21**(1982), 329–332.
[7] M. El haouari, *p-Formalité des espaces.* J. Pure Appl. Algebra **78**(1992), 27–47.
[8] S. Halperin and J. M. Lemaire, *Notions of category in differential algebra.* Lecture Notes in Math. **1318**(1988), 138–154.
[9] M. Karoubi, *Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires.* Trans. Amer. Math. Soc. (11) **347**(1995), 4277–4299.
[10] ———, *Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod.* Topology (3) **34**(1995), 699–715.
[11] ———, *Formes topologiques non commutatives.* Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4 t. 28 fasc. 4(1995), 477–492.
[12] M. Majewski, *A cellular Lie algebra model for spaces and its equivalence with the models of Quillen and Sullivan.* Thèse Freie Universität Berlin, 1996.
[13] H. J. Munkholm, *The Eilenberg-Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplicative maps.* J. Pure Appl. Algebra **5**(1974), 1–50.
[14] S. Steenrod and D. Epstein, *Cohomology operations.* Ann. of Math. Stud. **50**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ 1962.

U.R.A. 0751D CNRS
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France