EXISTENCE DE SOUS-ESPACES HYPER-INVARIANTS

by K. KELLAY

(Received 21 July, 1996)

1. Introduction. Soient B un espace de Banach et $\mathscr{L}(B)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur B. On dit qu'un sous-espace fermé E de B est invariant pour l'opérateur $T \in \mathscr{L}(B)$ lorsque $TE \subset E$ et qu'il est non trivial si $\{0\} \subsetneqq E \subsetneqq B$. Le sous-espace E est dit hyper-invariant pour T s'il est invariant pour tout opérateur qui commute avec T.

Soit une suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\tau_0 = 1$ et $\tau_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$. On dit que $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Beurling au sens de [**3**] lorsque

$$\tau_{n+m} \leq \tau_n \tau_m \text{ pour tout } m, n \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \tau_n}{1+n^2} < +\infty.$$

Soit alors $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de Beurling, soit un opérateur $T \in \mathscr{L}(B)$ tel que $\|T^n\| = O(\tau_n)(n \to +\infty)$. On suppose qu'il existe $x \in B$ tel que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\|T^n x\|}{\tau_n} > 0$$

et une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ de B avec $Ty_{n+1} = y_n$ $(n \geq 0)$ vérifiant la condition (I).

(I): Il existe $C > 0$ et $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de Beurling tels que $\|y_n\| \leq C\omega_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Dans le cas où $\tau_n \equiv 1$ $(n \in \mathbb{N})$, Beauzamy [**4**] a montré que la contraction T admet un sous-espace hyper-invariant non trivial (voir aussi [**7**, Theorem 9.7]). Atzmon a donné une extension de ce résultat [**3**, Theorem 4.5] lorsque

$$\tilde{\tau}_n = \limsup_{m\to+\infty} \frac{\tau_{n+m}}{\tau_m} = O(n^k) \quad (n \to +\infty)$$

pour une certaine constante k positive.

Nous parvenons à la même conclusion (Théorème 3.4) lorsque

$$\tilde{\tau}_n = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \quad (n \to +\infty) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

et lorsque la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessus vérifie la condition (II) au lieu de (I):

$$\text{(II)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+ \|y_n\|}{1+n^2} < +\infty, \\ \text{il existe } C > 0, \text{ tel que } \|y_{n+1}\| \leq C\,\|y_n\| \ (\forall n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Remarquons que la condition (II) est plus faible que la condition (I), et c'est cela qui motive ce travail. Notre méthode consiste à faire apparaître des sous-espace invariants liés au prolongement analytique, de même que dans [**11**]. Ces sous-espaces sont de même nature que ceux mis en évidence dans [**3**], [**4**] et [**7**], mais la considération directe de ces espaces de "vecteurs analytiques" permet d'éviter certaines hypothèses de régularité.

Je tiens à remercier J. Esterle et M. Zarrabi pour les fructueuses discussions que j'ai euex avec eux. Je tiens également à remercier le référé pour ces suggestions.

2. Notations et preliminaires. Un poids ω est une application de $\mathbb{Z} \to [1, +\infty[$ telle que $\omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m)$ pour tous n et $m \in \mathbb{Z}$.

Soit $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ l'algèbre des fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et soit

$$\mathscr{A}_\omega(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{T}) : \|f\|_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\, \omega(n) < +\infty \right\},$$

où

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt \ (n \in \mathbb{Z}).$$

$\mathscr{A}_\omega(\mathbb{T})$ muni de la norme $\|.\|_\omega$ est dite l'algèbre de Beurling associée au poids ω. L'algèbre $\mathscr{A}_\omega(\mathbb{T})$ est régulière au sens de [**9**] si et seulement si

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\log \omega(n)}{1+n^2} < +\infty.$$

Le poids ω est dit alors un poids régulier.

On appelle hyperfonction toute fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ telle que

$$\lim_{|z| \to \infty} \varphi(z) = 0.$$

Les coefficients de Fourier de φ sont définis par:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n \geq 1} \hat{\varphi}(n) z^{n-1} & \text{pour } |z| < 1 \\ \displaystyle -\sum_{n \leq 0} \hat{\varphi}(n) z^{n-1} & \text{pour } |z| > 1. \end{cases}$$

On désigne par $HD(\mathbb{T})$ l'ensemble de toutes les hyperfonctions. Pour $\varphi \in HD(\mathbb{T})$, le support de φ (noté $\operatorname{supp} \varphi$) est le plus petit fermé E de $\mathbb{T}$ tel que φ se prolonge analytiquement sur $\mathbb{C} \setminus E$.

On identifie le dual de $\mathscr{A}_\omega(\mathbb{T})$ à $HD_\omega(\mathbb{T})$, où

$$HD_\omega(\mathbb{T}) = \left\{ \varphi \in HD(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\hat{\varphi}(n)|}{\omega(-n)} < +\infty \right\};$$

la dualité est donnée par:

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \hat{\varphi}(-n), \ (f \in \mathscr{A}_\omega(\mathbb{T}),\ \varphi \in HD_\omega(\mathbb{T})).$$

Pour $f \in \mathscr{A}_\omega(\mathbb{T})$ et $\varphi \in HD_\omega(\mathbb{T})$, on définit l'hyperfonction produit $f.\varphi$ par ses coefficients de Fourier donnés par la formule:

$$\widehat{f.\varphi}(n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(p) \hat{\varphi}(n-p) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

On vérifie que: $\operatorname{supp} f.\varphi \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi$, où $\operatorname{supp} f$ désigne le support fermé de f.

Pour $0 < a < 2\pi$ et $b > 0$, on considère l'arc ouvert

$$\Gamma_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ et } -a < \arg z < a \}$$

et le domaine

$$\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} : e^{-b} < |z| < e^b \text{ et } -a < \arg z < a \}.$$

Soit ρ une application continue sur $[e^{-b}, e^b]$ telle que $\rho(r) > 0$ si $r \neq 1$ et $\rho(1) = 0$. De plus on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la fonction ρ est décroissante sur $[1-\varepsilon, 1]$ et croissante sur $[1, 1+\varepsilon]$. On désigne par $\mathbf{C}_\rho(\Omega_1)$ l'espace de Banach des fonctions continues $f : \bar{\Omega}_1 \setminus \bar{\Gamma}_1 \to \mathbb{C}$ telles que la fonction $z \to \rho(|z|)f(z)$ se prolonge en une fonction continue sur $\bar{\Omega}_1$ et nulle sur l'arc fermé $\bar{\Gamma}_1$. On munit $\mathbf{C}_\rho(\Omega_1)$ de la norme

$$\|f\|_\rho = \sup_{z \in \Omega_1} \{\rho(|z|)\,|f(z)|\}.$$

On note par $\Omega_1^+ = \Omega_1 \cap \mathbb{D}$ et $\Omega_1^- = \Omega_1 \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$, où $\bar{\mathbb{D}}$ est l'adhérence du disque unité $\mathbb{D}$. On définit les ensembles suivants:

$$\mathbf{A}_\rho(\Omega_1^\pm) = \{f : f \in \mathbf{C}_\rho(\Omega_1), f \text{ est holomorphe sur } \Omega_1^+ \cup \Omega_1^-\}$$
$$\mathbf{A}_\rho(\Omega_1) = \{f : f \in \mathbf{A}_\rho(\Omega_1^\pm), f \text{ a un prolongement analytique à travers l'arc } \Gamma_1\}.$$

THÉORÈME 2.1 (Beurling [**5**]). *Si*

$$\int_{-b}^{0} \log\log \frac{1}{\rho(e^{-\sigma})}\, d\sigma + \int_{0}^{b} \log\log \frac{1}{\rho(e^{-\sigma})}\, d\sigma < +\infty,$$

alors $\mathbf{A}_\rho(\Omega_1)$ est un ensemble fermé de $\mathbf{A}_\rho(\Omega_1^\pm)$ pour la norme $\|.\|_\rho$.

3. Extension du théorème de Beauzamy-Atzmon. On a besoin des lemmes suivants.

LEMME 3.1. *Soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de Beurling. Il existe alors une suite de Beurling croissante $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $\left(\dfrac{\log \beta_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\log \tau_n \leq \log \beta_n \leq 4 \log \tau_n$.*

Preuve. Puisque $\tau_{n+m} \leq \tau_n \tau_m$ $(\forall n, m \in \mathbb{N})$, il est facile de voir que la suite $\left(\dfrac{\log \tau_{2^p}}{2^p}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On pose alors

$$\gamma_n = \frac{n - 2^p}{2^{p+1} - 2^p} \frac{\log \tau_{2^{p+1}}}{2^{p+1}} + \frac{2^{p+1} - n}{2^{p+1} - 2^p} \frac{\log \tau_{2^p}}{2^p} \text{ si } n \in [2^p, 2^{p+1}].$$

La suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ ainsi construite est décroissante. Comme la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a pour tout $n \in [2^p, 2^{p+1}]$

$$\gamma_n \leq \frac{\log \tau_{2^p}}{2^p} \leq \frac{\log \tau_n}{n} \frac{n}{2^p} \leq 2 \frac{\log \tau_n}{n},$$

$$\gamma_n \geq \frac{\log \tau_{2^{p+1}}}{2^{p+1}} \geq \frac{\log \tau_n}{n} \frac{n}{2^{p+1}} \geq \frac{1}{2} \frac{\log \tau_n}{n}.$$

Donc

$$\log \tau_n \leq 2n\gamma_n \leq 4 \log \tau_n \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

On pose $\beta_n = \exp\left(\sup_{1 \leq k \leq n} 2k\gamma_k\right)$ pour $n \geq 1$ et $\beta_0 = 1$. Il est clair que la suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, $\beta_{n+m} \le \beta_n \beta_m$ $(\forall n,m \in \mathbb{N})$ et que $\log \tau(n) \le \log \beta(n) \le 4 \log \tau(n)$. Donc $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de Beurling. De plus on a:

$$\frac{\log \beta_{n+1}}{n+1} = \max\left\{\frac{1}{n+1} \sup_{1\le k\le n} 2k\gamma_k, \frac{2(n+1)\gamma_{n+1}}{n+1}\right\},$$

comme $\gamma_{n+1} \le \gamma_n$ et $\dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{n}$ alors

$$\frac{\log \beta_{n+1}}{n+1} \le \max\left\{\frac{1}{n} \sup_{1\le k\le n} 2k\gamma_k, \frac{2n\gamma_n}{n}\right\} = \frac{\log \beta_n}{n}.$$

Ceci termine la preuve du lemme.

Le lemme qui suit est implicitement contenu dans la preuve du lemme 1 [**11**].

LEMME 3.2. *Soit $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $\beta_n \ge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $\left(\dfrac{\log \beta_n}{n}\right)_{n\ge 1}$ est décroissante et tend vers 0. Si $\sum_0^\infty \dfrac{\log \beta_n}{1+n^2} < +\infty$, alors*

$$\int_1^{e^{-1}} \log \log \left(\sum_0^{+\infty} \beta_n e^{-n\sigma}\right) < +\infty.$$

Le lemme suivant est une variante du théorème de Katznelson-Tzafriri version Allan-Ransford [**1**] (voir aussi [**10**]). On désignera par $\sigma(T)$ le spectre de T.

LEMME 3.3. *Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de Beurling avec*

$$\tilde{\tau}_n := \limsup_{m\to+\infty} \frac{\tau_{n+m}}{\tau_m} = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}})(n \to +\infty) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Soit T un opérateur sur un espace de Banach B tel que $\|T^n\| = O(\tau_n)$ $(n \to +\infty)$. Si $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{1\}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\tau_n} \|T^n(T-I)\| = 0.$$

Preuve. On utilise essentiellement la même démonstration que celle de [**10**] et on conclut avec [**2**, Theorem 1.1].

On est alors en mesure de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4. *Soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de Beurling avec*

$$\tilde{\tau}_n = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}}) \ (n \to +\infty) \text{ pour tout } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Soit T un opérateur de $\mathscr{L}(B)$, non égal à un multiple de l'identité tel que

$$\|T^n\| = O(\tau_n) \ (n \to +\infty). \tag{2}$$

On suppose qu'il existe $y \in B$ avec

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\|T^n y\|}{\tau_n} > 0 \tag{3}$$

et une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ *de* B *telle que*

$$\text{(II)}\begin{cases} Ty_{n+1} = y_n \text{ pour tout } n \geq 0, & (4)\\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\log^+ \|y_n\|}{1+n^2} < +\infty, \\ \text{et } \|y_{n+1}\| \leq C\,\|y_n\| \ (\forall n \in \mathbb{N}), \text{ où } C \text{ est une constante strictement positive.}\end{cases}$$

Alors T *possède un sous-espace hyper-invariant non trivial.*

Preuve. Puisque nous voulons montrer l'existence d'un sous-espace hyper-invariant pour T, on peut supposer, sans restriction de généralité, que:

(i) L'opérateur T est injectif et d'image dense, faute de quoi Ker T on l'adhérence de Im T seront des sous-espaces hyper-invariants non triviaux.

(ii) $\dfrac{\|T^n x\|}{\tau_n} \not\to 0$ quand $n \to +\infty$ pour tout $x \in B\setminus\{0\}$, sinon l'ensemble

$$\left\{x \in B, \frac{\|T^n x\|}{\tau_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$$

est un sous-espace hyper-invariant non trivial.

Notons que $\sigma(T) \cap \mathbb{T}$ contient nécessairement plus de deux points. En effet: d'une part si $\sigma(T) \subset \mathbb{D}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T^n\|^{1/n} = \sup\limits_{\mu \in \sigma(T)} |\mu| < 1$, et donc $\|T^n x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $x \in B$, ce qui contredit (3).

D'autre part si $\sigma(T) \cap T = \{\lambda\}$, il résulte du lemme 3.3 que pour tout $x \in B$

$$\frac{1}{\tau_n}\|T^n(\lambda I - T)x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et d'après (ii), on a $(\lambda I - T)x = 0$. Ceci implique que T est multiple de l'identité, ce qui est en contradiction avec les hypothèses du théorème.

Considérons maintenant la semi-norme définie par

$$|||x||| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\|T^n x\|}{\tau_n} \text{ pour } x \in B.$$

En tenant compte de (ii), on a Ker $|||\,.\,||| = \{0\}$; soit alors $\tilde{B}$ la complétion de B munie de la norme $|||\,.\,|||$. Remarquons qu'il existe $k > 0$ tel que $|||x||| \leq k\,\|x\|$ pour tout $x \in B$, de sorte que l'injection $B \to \tilde{B}$ est continue. D'autre par si $R: B \to B$ est continue et commute avec T on a $|||Rx||| \leq \|R\|\ |||x|||$, et R admet un prolongement continu $\tilde{R}: \tilde{B} \to \tilde{B}$ tel que $|||\tilde{R}||| = \sup\limits_{|||u|||\leq 1} |||\tilde{R}u||| \leq \|R\|$. En particulier T admet un prolongement continu $\tilde{T}: \tilde{B} \to \tilde{B}$. L'opérateur $\tilde{T}$ est inversible et $\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma(T) \cap \mathbb{T}$, (voir par exemple **[10]**). On a pour tout $x \in B$

$$|||T^n x||| = \limsup_{m\to+\infty} \frac{\|T^{n+m}x\|}{\tau_{n+m}} \frac{\tau_{n+m}}{\tau_m} \leq \tilde{\tau}_n\ |||x||| \text{ et } |||Tx||| \geq |||x|||.$$

Donc

$$|||\tilde{T}^n||| = O(e^{\varepsilon\sqrt{n}})\ (n \to +\infty) \text{ et } |||\tilde{T}^{-1}||| \leq 1.$$

Le spectre de $\tilde{T}$ contient au moins deux points car dans le cas contraire, si on note λ l'unique élément de $\sigma(\tilde{T})$, il résulte de [**2**, Theorem 1.1] que $\tilde{T} = \lambda\tilde{I}$, où $\tilde{I}$ est l'opérateur identité sur $\tilde{B}$, ce qui contredit le fait que $T \neq \lambda I$.

Soient alors λ_1 et $\lambda_2 \in \sigma(\tilde{T}) \subset \sigma(T) \cap \mathbb{T}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On va supposer sans perte de généralité que $\lambda_1 = 1$. Soit l'arc ouvert

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \text{ et } -a < \arg z < a\},$$

pour une certaine constante $a > 0$ de telle sorte que $\lambda_2 \notin \bar{\Gamma}_1$.

On considère l'ensemble

$$\tilde{E} = \{\tilde{x} \in \tilde{B} : z \to (\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}\tilde{x} \text{ a un prolongement analytique à travers l'arc } \Gamma_1\}.$$

Nous allons montrer en premier que $E = \tilde{E} \cap B$ est un sous-espace hyper-invariant pour T distinct de B. Soit R un opérateur borné sur B et soit $\tilde{R}$ son prolongement à $\tilde{B}$ défini plus haut. Il est clair que $\tilde{E}$ est un sous-espace invariant pour $\tilde{R}$ et par conséquent E est invariant par R.

Montrons maintenant que E est un sous-espace formé de B pour la norme $\|.\|$. Puisque l'injection $B \to \tilde{B}$ est continue, il suffit de montrer que $\tilde{E}$ est un fermé de $\tilde{B}$ pour la norme $|||\,.\,|||$.

Notons par $\tilde{B}^*$ le dual de $(\tilde{B}, |||\,.\,|||)$. Soit $(\tilde{x}_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\tilde{E}$ qui converge vers $\tilde{x} \in \tilde{B}$ et soit $l \in \tilde{B}^*$. On pose

$$\varphi_n(z) = \langle(\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}\tilde{x}_n, l\rangle \text{ et } \varphi(z) = \langle(\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}\tilde{x}, l\rangle \ (z \notin \sigma(\tilde{T})),$$

et

$$\rho(r) = \begin{cases} (1-r)^2 & \text{si } r \leq 1 \\ (r-1)\Big(\sum_{n\leq 0} \tau_{-n} r^{n-1}\Big)^{-1} & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Il est clair que l'application ρ est continue sur $[e^{-b}, e^b]$ pour tout $b > 0$, décroissante sur $[e^{-b}, 1]$ et croissante sur $[1, e^b]$. On fixe b avec $1 < e^b < \dfrac{e+1}{e}$. Notons que

$$(\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\geq 1} \tilde{T}^{-n} z^{n-1} & \text{pour } |z| < 1 \\ \displaystyle -\sum_{n\leq 0} \tilde{T}^{-n} z^{n-1} & \text{pour } |z| > 1 \end{cases}$$

et puisque $|||\tilde{T}^{-1}||| \leq 1$, $|||\tilde{T}^n||| \leq \|T^n\| \leq k\tau(n)$ pour tout $n \geq 0$ alors

$$|||(\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}||| \leq k\frac{|1 - |z||}{\rho(|z|)} \text{ pour } z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}.$$

Donc $\varphi \in \mathbf{A}_\rho(\Omega_1^{\pm})$ et puisque $\tilde{x}_n \in \tilde{E}$, $\varphi_n \in \mathbf{A}_\rho(\Omega_1)$, où

$$\Omega_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : e^{-b} < |z| < e^b \text{ et } \frac{z}{|z|} \in \Gamma_1\right\}, \qquad \Omega_1^+ = \Omega_1 \cap \mathbb{D} \text{ et } \Omega_1^- = \Omega_1 \cap (\mathbb{C}\backslash\bar{\mathbb{D}}).$$

En outre pour $z \in \Omega_1$, $z \notin \Gamma_1$ on a:

$$\rho(|z|)\,|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \leq \rho(|z|)\,|||(\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}|||\;|||\tilde{x}_n - \tilde{x}|||\;|||l|||$$
$$\leq k(|1 - |z||)\,|||\tilde{x}_n - \tilde{x}|||\;|||l|||.$$

Donc

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\rho = \sup_{z \in \Omega_1} \{\rho(|z|)\,|\varphi_n(z) - \varphi(z)|\} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Puisque la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Beurling croissante, on sait d'après le lemme 3.1 qu'il existe une suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Beurling croissante telle que la suite $\left(\frac{\log \beta_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et telle que $\tau_n \leq \beta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; il découle alors du lemme 3.2 que

$$\int_0^b \log \log\Big(\sum_{n \geq 0} \tau_n e^{-n\sigma}\Big)\, d\sigma < +\infty,$$

on conclut alors que

$$\int_{-b}^0 \log \log \frac{1}{\rho(e^{-\sigma})}\, d\sigma + \int_0^b \log \log \frac{1}{\rho(e^{-\sigma})}\, d\sigma < +\infty.$$

Donc, par le théorème 2.1 de Beurling, $\mathbf{A}_\rho(\Omega_1)$ est fermé dans $\mathbf{A}_\rho(\Omega_1^{\pm})$ pour la norme $\|.\|_\rho$ et puisque $\lim_{n \to +\infty} \|\varphi_n - \varphi\|_\rho = 0$, on conclut que $\varphi \in \mathbf{A}_\rho(\Omega_1)$. Ainsi pour tout élément $l \in \tilde{B}^*$, la fonction $z \to \langle(\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}\tilde{x}, l\rangle$ a un prolongement analytique à travers l'arc Γ_1, ce que entraîne que la fonction $z \to (\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}\tilde{x}$ est prolongeable analytiquement à travers l'arc Γ_1, (voir [**3**, Lemme 2.4]). Par conséquent $\tilde{x} \in \tilde{E}$ et donc $\tilde{E}$ est un fermé de $\tilde{B}$ pour la norme $|||.|||$. De là, on déduit que E est un fermé de B pour la norme $\|.\|$.

Nous allons montrer maintenant que $E \neq B$. Rappelons qu'on a supposé que $1 \in \sigma(\tilde{T})$. Il découle du théorème de Helson [**8**, Theorem 3] qu'il existe un vecteur $\tilde{v} \in \tilde{B}$ tel que la fonction $z \to (\tilde{T} - z\tilde{I})^{-1}\tilde{v}$ n'a de prolongement analytique en aucun voisinage de 1. Donc $\tilde{v} \notin \tilde{E}$ et par conséquent $\tilde{E} \subsetneq \tilde{B}$. Puisque B est dense dans $\tilde{B}$ pour la norme $|||.|||$ et $E \subset \tilde{E}$, on en déduit que $E \subsetneq B$.

Si $E \neq \{0\}$, alors d'après ce qui précède, E est évidemment un sous espace hyper-invariant non trivial pour T.

Supposons maintenant la contraire, soit $E = \{0\}$. Considérons la suite suivante:

$$\omega_n = \begin{cases} \tau_n & \text{pour } n \geq 1 \\ \max(\|y_{-n}\|, 1) & \text{pour } n \leq 0. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $C^{-1}\omega_n \leq \omega_{n+1} \leq C\omega_n$ pour une certaine constante $C > 0$ et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\log \omega_n}{1 + n^2} < +\infty.$$

Soit $0<\beta<2\pi$ tel que $e^{i\beta}=\lambda_2\in\sigma(\tilde{T})$. Soient $\varepsilon>0$ et l'arc

$$\Gamma_2=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1,\ \beta-\varepsilon<\arg z<\beta+\varepsilon\}.$$

Il résulte du théorème de Beurling-Malliavin [**6**, Theorem 1], version discrète (voir [**3**, Lemme 2.1]), qu'il existe une fonction non nulle, $f\in\mathscr{C}(\mathbb{T})$ telle que le support de f est contenu dans Γ_2 et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|\,\omega_n<+\infty.$$

En prenant ε assez petit et un utilisant une rotation si nécessaire, on peut supposer que $f(\lambda_2)\neq 0$ et $f\equiv 0$ sur l'arc fermé $\bar{\Gamma}_1$.

Posons

$$\bar{\omega}(n)=\begin{cases}\tau_n & \text{pour } n\geq 1\\ 1 & \text{pour } n\leq 0.\end{cases}$$

Puisque $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\tau_{n+m}\leq\tau_n\tau_m$ $(n,m\in\mathbb{N})$ alors $\bar{\omega}$ définit un poids sur $\mathbb{Z}$. Il est clair que $f\in\mathscr{A}_{\bar{\omega}}(\mathbb{T})$. On pose $f(T)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\tilde{T}^n$; $f(\tilde{T})$ est bien définie comme opérateur borné sur $(\tilde{B},\ |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ et $f(\tilde{T})\neq 0$ puisque $f(\sigma(\tilde{T}))\subset\sigma(f(\tilde{T}))$ et $f(\lambda_2)\neq 0$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par:

$$x_n=\begin{cases}y_{-n} & \text{pour } n\leq 0\\ T^n y_0 & \text{pour } n\geq 1.\end{cases}$$

On a pour tout $n\leq 0$, $\tilde{T}^{-n}x_n=y_0$ et donc $\tilde{T}^n y_0=x_n$. Donc pour tout $N\geq 0$,

$$\sum_{|n|\leq N}\hat{f}(n)x_n=\sum_{|n|\leq N}\hat{f}(n)\tilde{T}^n y_0.$$

Puisque $f(\tilde{T})=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\tilde{T}^n$ converge en norme dans $\mathscr{L}(\tilde{B})$ on a évidemment

$$\left|\!\left|\!\left|\sum_{|n|\leq N}\hat{f}(n)\tilde{T}^n y_0-f(\tilde{T})y_0\right|\!\right|\!\right|\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$$

D'autre part $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)x_n$ converge en norme dans $(B,\ \|\cdot\|)$ et donc on a

$$\left\|\sum_{|n|\leq N}\hat{f}(n)\tilde{T}^n y_0-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)x_n\right\|\xrightarrow[N\to+\infty]{}0;$$

Mais comme $|\!|\!|x|\!|\!|\leq k\,\|x\|$ pour tout $x\in B$ alors $f(\tilde{T})y_0=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)x_n$ et on a donc $f(\tilde{T})y_0\in B$.

Soit $l\in\tilde{B}^*$ et soit φ l'hyperfonction $z\to\langle(\tilde{T}-z\tilde{I})^{-1}y_0,l\rangle$ $(z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{T})$ de sorte que $\hat{\varphi}(n)=\langle\hat{T}^{-n}y_0,l\rangle$ $(n\in\mathbb{Z})$. Le produit $f.\,\varphi$ étant défini comme plus haut on a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$

$$\widehat{f.\,\varphi}(n)=\langle\tilde{T}^{-n}f(\tilde{T})y_0,l\rangle,$$

et donc

$$(f.\varphi)(z)=\begin{cases}\sum_{n\geq 1}\widehat{f.\varphi}(n)z^{n-1}=\left\langle\sum_{n\geq 1}\tilde{T}^{-n}f(\tilde{T})y_0z^{n-1},l\right\rangle & \text{pour } |z|<1,\\ -\sum_{n\leq 0}\widehat{f.\varphi}(n)z^{n-1}=\left\langle-\sum_{n\leq 0}\tilde{T}^{-n}f(\tilde{T})y_0z^{n-1},l\right\rangle & \text{pour } |z|>1.\end{cases}$$

D'où

$$(f.\varphi)(z)=\langle(\tilde{T}-z\tilde{I})^{-1}f(\tilde{T})y_0,l\rangle\ (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{T}).$$

Puisque supp $f.\varphi\subset\operatorname{supp}f\cap\operatorname{supp}\varphi\subset\Gamma\setminus\Gamma_1$, la fonction $z\to\langle(\tilde{T}-z\tilde{I})^{-1}f(\tilde{T})y_0,l\rangle$ a un prolongement analytique à travers l'arc Γ_1. Ceci étant vrai pour tout $l\in\tilde{B}^*$, on en déduit que la fonction $z\to(\tilde{T}-z\tilde{I})^{-1}f(\tilde{T})y_0$ admet alors un prolongement analytique à travers l'arc Γ_1. D'où $f(\tilde{T})y_0\in\tilde{E}$. Comme on a déjà montré que $f(\tilde{T})y_0\in B$, on voit que $f(\tilde{T})y_0\in E$, ce qui entraîne que $f(\tilde{T})y_0=0$ puisqu'on a supposé que $E=\{0\}$. Comme $f(\tilde{T})\neq 0$, on voit que $\operatorname{Ker}f(\tilde{T})\cap B$ est bien un sous-espace hyper-invariant non trivial de T. Ceci achève la preuve du théorème.

REFERENCES

1. G. R. Allan and T. R. Ransford, Power-dominated elements in Banach algebra, *Studia Math.*, **94** (1989), 63–79.

2. A. Atzmon, Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces, *Acta Math.*, **144** (1980), 27–63.

3. A. Atzmon, On the existence of hyperinvariant subspaces, *J. Operator Theory.*, **11** (1984), 3–40.

4. B. Beauzamy, Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach, *Acta Math.*, **144** (1980), 65–82.

5. A. Beurling, Analytic continuation across a linear boundary, *Acta Math.*, **128** (1972), 154–182.

6. A. Beurling and P. Malliavin, The Fourier transforms of measures with compact support, *Acta Math.*, **107** (1962), 291–309.

7. J. Esterle, Quasimultipliers, representations of H^∞, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras, *Springer Lect. Notes.*, **975** (1983), 66–162.

8. H. Helson, Boundedness from measure theory, linear operators and approximation, *Proceedings of the conference held at Oberwolfach*, August 14–22, 1971, 129–137.

9. Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis* (Dover, New York, 1976).

10. V. Q. Phong, Semigroups with non quasianalytic growth, *Studia Math.*, **96** (1993), 229–241.

11. J. Wermer, The existence of invariant subspaces, *Duke. Math. J.*, **19** (1952), 615–622.

Université Bordeaux I
LAMP, ERS0127
U.F.R. de Mathématiques et Informatique
351, cours de la Libération. 33405 Talence Cedex
France

https://doi.org/10.1017/S0017089500032420 Published online by Cambridge University Press