Compositio Mathematica **114:** 37–76, 1998.

Zéros triviaux des fonctions L p-adiques, un cas particulier

PERRIN-RIOU BERNADETTE
Mathématiques, Bât 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France

Received 6 August 1996; accepted in final form 4 July 1997

Résumé. Nous étudions le zéro trivial de la fonction L p-adique du carré symétrique d'une courbe elliptique et généralisons une conjecture de Greenberg. Pour cela, nous utilisons la nouvelle approche des fonctions L p-adiques introduite dans un précédent travail.

Abstract. In this paper we study the trivial zero of the p-adic L function of the symmetric square of an elliptic curve and generalize a conjecture of Greenberg. For that, we use the new approach to p-adic L functions introduced in a previous work.

Mathematics Subject Classifications (1991): 11E95, 11G40, 11R23, 11R42.

Key words: Représentation p-adique, fonction L p-adique, courbe elliptique, théorie d'Iwasawa.

Le phénomène des 'zéros triviaux' apparaît dans les fonctions L p-adiques lorsque le facteur d'Euler en p de la fonction L complexe vaut 0 en $s = 0$ ou $s = 1$. La fonction L p-adique peut alors avoir un zéro d'ordre strictement supérieur à celui de la fonction L complexe. Le premier exemple de ce type concerne les fonctions de Kubota–Leopoldt, analogues p-adiques des fonctions L de Dirichlet, attachées à un caractère η impair tel que $\eta(p) = 1$, le facteur d'Euler étant alors $1-\eta(p)p^{-s} = 1-p^{-s}$. Le second exemple est celui de la fonction L d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ ayant réduction multiplicative déployée en p. La représentation p-adique associée n'a pas bonne réduction en p. Le facteur d'Euler en p est de nouveau $1-p^{-s}$. Un troisième exemple est celui de la représentation adjointe de la représentation associée à une courbe elliptique (plus généralement à une forme modulaire de poids k), ou ce qui revient au même à un twist convenable de son carré symétrique.

Dans les situations précédentes, la fonction L p-adique a été construite, elle s'annule en 0 et une formule du type

$$L'_p(0) = \ell_p E_p L_\infty(0)$$

a été démontrée (Ferrero–Greenberg ([FG78]) dans le cas (1), Greenberg–Stevens dans le cas (2) ([GS93]), Greenberg–Tilouine [Gr-T?] dans le cas (3) avec en plus l'hypothèse que *la courbe elliptique a mauvaise réduction semi-stable*). Dans la formule précédente, E_p désigne un facteur du type facteur d'Euler, ℓ_p est un invariant défini par Greenberg, L_∞ est la fonction L complexe. Par exemple, dans le cas (2), c'est-à-dire dans le cas d'une courbe elliptique E ayant mauvaise réduction stable déployée sur $\mathbb{Q}$, $\ell_p = \log_p q_E/\mathrm{ord}_p\, q_E$ où q_E est le q-paramètre de Tate attaché à $E/\mathbb{Q}_p$ (cette formule avait été conjecturée par Mazur–Tate–Teitelbaum dans [MTT86]). Les méthodes de démonstration consistent à introduire une déformation de la représentation p-adique (la fonction L p-adique attachée (essentiellement par la théorie de Hida) devient une fonction de 2 variables), puis à calculer la dérivée par rapport à la variable de la déformation, enfin à utiliser l'équation fonctionnelle pour en déduire le résultat sur la dérivée dans la direction cyclotomique.

Une telle formule, ainsi que le lien entre l'ordre du zéro de la fonction L p-adique et de la fonction L complexe, est conjecturée par Greenberg dans un cas très général mais avec l'hypothèse supplémentaire que *la représentation p-adique associée est ordinaire en p*.

Une nouvelle manière de concevoir les fonctions L p-adiques a été introduite et développée dans [PR94] et [PR95] (voir aussi [PR95b]). Il y est donné une conjecture précisant ce que devraient être les valeurs de cette fonction en des caractères pour lesquels le facteur d'Euler en p de la fonction L complexe ne s'annule pas en $s = 1$ et $s = 0$. Cette fonction L p-adique dépend d'un paramètre et une bonne spécialisation de ce paramètre permet de retrouver les fonctions L p-adiques construites dans la littérature. Soyons plus précis dans le cas particulier qui nous intéresse ici.

Soient $F_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^{n+1}})$ le corps des racines p^n-ièmes de l'unité, F_n^+ son sous-corps totalement réel; on pose $G_\infty = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ et $G_\infty^+ = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})^+/\mathbb{Q})$. On note $\mathcal{H}(G_\infty)$ (resp. $\mathcal{H}^+(G_\infty)$) l'algèbre des distributions tempérées sur G_∞ (resp. sur G_∞^+) à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$; on l'identifie par la transformée de Mellin à une sous-algèbre de $\mathbb{Q}_p[[G_\infty]]$ (resp. de $\mathbb{Q}_p[[G_\infty^+]]$). Soient E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$ et ayant bonne réduction en p et $h_1(E)$ le motif associé dont la réalisation p-adique est la représentation p-adique $V_p(E) = \mathbb{Q}_p \otimes T_p(E)$ associée aux points de p^∞-torsion de E. Ainsi, sa réalisation de de Rham est le dual de la cohomologie de de Rham de $E/\mathbb{Q}$. Considérons maintenant le motif $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$ carré symétrique de $h_1(E)$; on note D_{dR} sa réalisation de de Rham. C'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 3. Rappelons d'autre part que sur la réalisation de Betti M_B de $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$ agit une involution et que les points fixes pour cette involution forment un sous-espace vectoriel M_B^+ de dimension 2.

La fonction L p-adique (partie paire)

$$\mathbf{L}^p_{\{p\}} = \mathbf{L}^p_{\{p\}}(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)))$$

attachée à $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$ est un homomorphisme de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \wedge^2 D_{\mathrm{dR}}$ à valeurs dans $\mathcal{H}^+(G_\infty)$ et devrait vérifier pour tout caractère pair non trivial η d'ordre fini de G_∞ et de conducteur p^a la relation suivante

$$\wedge^2(\varphi)^{-a}\eta(\mathbf{L}^p_{\{p\}})\mathbf{e} = \frac{1}{2}\frac{G(\eta)^2 L_{\{p\}}(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)), \eta, 0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}.$$

Dans la formule qui précède,

- φ est l'homomorphisme de Frobenius du φ-module filtré

$$\mathbf{D}_p(\mathrm{Sym}^2(h_1(E))) = \mathbb{Q}_p \otimes D_{\mathrm{dR}},$$

- $\mathbf{e}$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\det D_{\mathrm{dR}}$,
- $\omega_{\mathbb{Q}}$ est une base de $\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}$ (qui est de dimension 1),
- $\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}\mathbf{e} = \omega_{\mathbb{Q}} \wedge n_B^+$ dans $\mathbb{C} \otimes \det D_{\mathrm{dR}}$ avec n_B^+ une base de $\det M_B^+$ (et plus précisément une base du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Sym}^2(H_1(E,\mathbb{Z}))$),
- $\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}$ est l'application de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \wedge^2 D_{\mathrm{dR}}$ dans $\det D_{\mathrm{dR}}$ définie par $\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(n) = \omega_{\mathbb{Q}} \wedge n$,
- $G(\eta)$ est la somme de Gauss associée au caractère η,
- $L_{\{p\}}(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)), \eta, s)$ est la fonction L (incomplète en p, si η est non trivial cela ne change rien) de $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$ twisté par le caractère d'ordre fini η vu comme caractère primitif de Dirichlet.

Précisons enfin que l'action de φ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbf{D}_p(\mathrm{Sym}^2(h_1(E))), \mathbb{Q}_p)$ est donnée par $\varphi(f)(x) = p^{-1} f(\varphi^{-1}x)$.

On peut écrire aussi la formule précédente en mélangeant nombres complexes et p-adiques: pour tout $n \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \wedge^2 D_{\mathrm{dR}}$,

$$\begin{aligned} &\eta(\mathbf{L}^p_{\{p\}}(n)) \,.\, \omega_{\mathbb{Q}} \wedge n_B^+ \\ &\quad = \tfrac{1}{2} G(\eta)^2 L_{\{p\}}(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)), \eta, 0) \,.\, \omega_{\mathbb{Q}} \wedge p^{-2a} (\wedge \varphi^{-a})(n). \end{aligned}$$

D'autre part, cette fonction L p-adique devrait être obtenue à partir d'un élément $c_p^{\text{spéc}}$ de $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)_+ = \mathbb{Q}_p \otimes \varprojlim H^1(F_n^+, T)$ où $T = \mathrm{Sym}^2(T_p(E))$ par la formule

$$\mathbf{L}^p_{\{p\}}(n)\mathbf{e} = \mathcal{L}_0(c_p^{\text{spéc}}) \wedge n \tag{H}$$

pour $n \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \wedge^2 D_{\mathrm{dR}}$. Ici, $\mathcal{L}_0$ est l'application logarithme définie dans [PR94]

$$\varprojlim H^1(F_{n,p}, T) \to \mathcal{K}(G_\infty) \otimes D_{\mathrm{dR}}.$$

Supposons-le; si $V = \mathbb{Q}_p \otimes T$, notons $c_p^{\text{flach}}(p) \in H^1(\mathbb{Q}, V)$ l'image de $c_p^{\text{spéc}}$ dans $H^1(\mathbb{Q}, V)$: c'est un élément ayant bonne réduction en dehors de p.

Sous l'hypothèse (H), nous calculons dans ce texte la valeur de $\mathbf{L}^p_{\{p\}}$ sur le caractère trivial et obtenons des formules du type suivant

THÉORÈME. *Sous* (H), *la fonction* $\mathbf{L}^p_{\{p\}}$ *ne s'annule pas sur le caractère trivial* $\mathbf{1}$ *si et seulement si* $c_p^{\text{flach}}(p) \notin H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ *et on a*

$$\mathbf{1}(\mathbf{L}^p_{\{p\}}(n))\mathbf{e} = (1 - p^{-1}) \lambda_g(c_p^{\text{flach}}(p)) \wedge n.$$

L'application $\lambda_g\colon H^1(\mathbb{Q}_p, V) \to (\mathbb{Q}_p \otimes D_{\mathrm{dR}})^{\varphi=p^{-1}}$ est obtenue par dualité à partir des exponentielles de Bloch–Kato.

En particulier, en utilisant [Fl92] (et sous ses hypothèses techniques de validité), $\mathbf{L}^p_{\{p\}}$ ne s'annule pas en $\mathbf{1}$ si et seulement si $c_p^{\mathrm{flach}}(p)$ est non nul.

Nous sommes d'autre part intéressés en la restriction de $\mathbf{L}^p_{\{p\}}$ dans une direction spéciale $n^{\mathrm{sc}} \in \mathbb{Q}_p \otimes \wedge^2 D_{\mathrm{dR}}$ pour laquelle, en particulier, $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}} = \mathbf{L}^p_{\{p\}}(n^{\mathrm{sc}})$ a un zéro en $\mathbf{1}$ (sc pour scindée). Lorsque E a bonne réduction ordinaire, cette direction est bien connue et on la décrit de la manière suivante: V contient une sous-représentation $\mathrm{Fil}^1_p V$ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension 2 et de poids de Hodge–Tate positifs, n^{sc} est une base du déterminant de $\mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^1_p V)$; dans ce cas $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}} = \mathbf{L}^p_{\{p\}}(n^{\mathrm{sc}})$ appartiendrait en fait à $\mathbb{Q}_p \otimes \Lambda^+$ (sous la conjecture notée $\delta(\mathrm{Fil}^1_p V)$ dans [PR94]) et devrait être, à des normalisations près, la fonction L p-adique construite par Coates–Schmidt–Hida.

Nous définissons d'autre part un élément $\ell_p(\mathrm{Sym}^2(h_1(E))) \in \mathbb{Q}_p$ qui, dans le cas ordinaire, coïncide avec l'invariant de Greenberg.

Supposons la représentation p-adique $V_p(E)$ de $G_{\mathbb{Q}_p}$ non décomposée dans le cas ordinaire et lorque $p \mid a_p$ supposons $a_p = 0$ (c'est toujours vrai pour $p > 3$). Supposons $c_p^{\mathrm{flach}}(p) \neq 0$. On montre alors que $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ a un zéro simple si et seulement si $\ell_p(\mathrm{Sym}^2(h_1(E))) \neq 0$ et on peut calculer explicitement $\partial.\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ où ∂ est l'opérateur défini par

$$\partial.g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle\chi\rangle^s(g)_{|s=0}$$

pour $g \in \mathcal{H}(G_\infty)$ et $\langle\chi\rangle$ la partie p-primaire du caractère cyclotomique. Donnons une conséquence de ce calcul. Auparavant, introduisons quelques notations. Notons $\pi_{[-1]}(\omega_{\mathbb{Q}})$ la projection de $\omega_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbf{D}_p(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)))^{\varphi=p^{-1}}$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres de φ, α_p et β_p les racines de $X^2 - a_p(E)X + p$ (avec α_p unité p-adique lorsque E a bonne réduction ordinaire); soit $\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega_{\mathbb{Q}}} \in \mathbb{Q}_p$ la période p-adique définie par

$$\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(n^{\mathrm{sc}}) = \Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}\mathbf{e}.$$

THÉORÈME. *Sous* (H), *les formules suivantes sont équivalentes*

$$\lambda_g(c_p^{\mathrm{flach}}(p)) = \frac{1}{2}\frac{L(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)),0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\pi_{[-1]}(\omega_{\mathbb{Q}}); \tag{A}$$

$$(1 - p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathbf{L}^p_{\{p\}})\mathbf{e} = \frac{1}{2}\frac{L_{\{p\}}(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)),0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}(1-\varphi)\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}; \tag{B}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

$$\partial.\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,\mathrm{sc}} = \tfrac{1}{2}\ell_p(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)))(1-\alpha_p^{-2}) \times \\ \times \left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L(\mathrm{Sym}^2(h_1(E)),0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}. \qquad \text{(C)}$$

Faisons quelques remarques sur ce théorème. Remarquons d'abord que si $c_p^{\mathrm{flach}}(p)$ est non nul, la fonction L p-adique $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p}$ *n'a pas de zéros en* **1** et que la fonction $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p,\mathrm{sc}}$ a par contre un zéro: c'est un zéro appelé communément 'zéro trivial'. Dans (B), la formule fait intervenir les opérateurs $1-\varphi$ et $1-p^{-1}\varphi^{-1}$ plutôt que des parties de facteurs d'Euler. La formule est finalement sans surprise! Par contre, dans la formule (C), qui revient à regarder une dérivée première de $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p}$ dans une direction où $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p}$ est nulle, apparaît le facteur ℓ_p. Cette dernière formule est exactement celle conjecturée par Greenberg. On peut donc considérer ce théorème comme une raison de croire à cette conjecture. Une démonstration serait de construire vraiment l'élément $c_p^{\mathrm{spéc}}$ associé à $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$ par des voies géométriques, ce qui permettrait de construire la fonction L p-adique totale et donnerait une démonstration de la formule conjecturée par Greenberg.

Remarquons aussi que dans (A) et (C), c'est la fonction L complète qui intervient dans le membre de droite, alors que dans (B), c'est la fonction L à laquelle on a enlevé le facteur d'Euler en p.

On conjecture alors que la formule (A) est vraie, ce qui implique les formules (B) et (C). Expliquons rapidement le nom $c_p^{\mathrm{flach}}(p)$ donné. L'espoir est que cet élément soit *motivique*, ce qui reviendrait à dire pour nous que l'on pourrait construire en même temps toutes les réalisations l-adiques

$$c_l^{\mathrm{flach}}(p) \in H^1(\mathbb{Q}, \mathrm{Sym}^2(h_1(E))_l)$$

d'un élément $\mathfrak{c}^{\mathrm{flach}}(p)$ provenant de la géométrie algébrique avec bonne réduction en dehors de p. L'élément $\mathfrak{c}^{\mathrm{flach}}(p)$ devrait être (un multiple de) l'élément construit par Flach dans [Fl92].

Nous venons ici de traiter le côté *interpolation p-adique des fonctions L*. Il y a comme d'habitude le côté *arithmétique*. Nous l'étudions aussi et montrons que les formules obtenues des deux côtés sont très similaires. Plus précisément, pour $T = \mathrm{Sym}^2(T_p(E))$, nous étudions les valeurs en **1** du module arithmétique $\mathbb{I}_{\mathrm{arith}}(T)$ des fonctions L p-adiques associé à T, défini comme en [PR95] et de sa spécialisation $\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T) = \mathbb{I}_{\mathrm{arith}}(T)(n^{\mathrm{sc}})$ dans la direction n^{sc}. Nous obtenons comme il se doit une formule à la Bloch–Kato. Donnons l'énoncé (les notations seront précisées dans le texte)

THÉORÈME. *Supposons* $H^1_f(\mathbb{Q}, V) = 0$.

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

(i) *Le* $\mathbb{Z}_p$*-module* $\mathbf{1}(\mathbb{I}_{\text{arith}}(T))$ *est non nul. Si* $I_{\text{arith}}(T)$ *est un générateur de* $\mathbb{I}_{\text{arith}}(T)$ *et* ω *une base de* $\text{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$*, on a*

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(I_{\text{arith}}(T))\mathbf{e}$$
$$\sim L_p(V,0)^{-1}\prod_l \text{Tam}_{l,\omega_{tg}}(T)\frac{\sharp\mathbf{III}(T^*(1))}{\sharp(V/T)^{G_{\mathbb{Q}}}\sharp(V^*(1)/T^*(1))^{G_{\mathbb{Q}}}}(1-\varphi)\Omega_{p,\omega},$$

pour ω_{tg} *base de* $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\text{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ *telle que* $\omega_{tg}\wedge\omega = \mathbf{e}$.

(ii) $\mathbb{I}_{\text{sc}}(T)$ *a un zéro simple en* $\mathbf{1}$ *si et seulement si* $\ell_p(V)\neq 0$*. Si* $I_{\text{sc}}(T)$ *est un générateur de* $\mathbb{I}_{\text{sc}}(T)$ *et* ω *une base de* $\text{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$*, on a*

$$\partial.I_{\text{sc}}(T) \sim \ell_p(V)(1-\alpha_p^{-2})\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\prod_l \text{Tam}_{l,\omega_{tg}}(T)$$
$$\times\frac{\sharp\mathbf{III}(T^*(1))}{\sharp(V/T)^{G_{\mathbb{Q}}}\sharp(V^*(1)/T^*(1))^{G_{\mathbb{Q}}}}\Omega_{p,\omega}^{\text{sc}},$$

pour ω_{tg} *base de* $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\text{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ *telle que* $\omega_{tg}\wedge\omega = \mathbf{e}$.

La conjecture principale affirme que $\mathbf{L}^p_{\{p\}}$ est un générateur du module $\mathbb{I}_{\text{arith}}(T)$. La comparaison de la formule (A) (et (B) et (C)) et du théorème précédent implique alors la conjecture de Bloch–Kato ‘à une unité p-adique près’

$$\frac{L(\text{Sym}^2(h_1(E)),0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\sim\prod_l \text{Tam}_{l,\omega_{tg}}(T)\frac{\sharp\mathbf{III}(T^*(1))}{\sharp(V/T)^{G_{\mathbb{Q}}}\sharp(V^*(1)/T^*(1))^{G_{\mathbb{Q}}}}.$$

Enfin, on démontre que dans le cas ordinaire, si $H^1_f(\mathbb{Q},V)=0$ et si l’invariant de Greenberg $\ell_p(V)$ est non nul, le dual de Pontryagin du groupe de Selmer sur la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique est de torsion sur l’algèbre d’Iwasawa.

Les résultats obtenus dans ce texte utilisent de manière essentielle les conjectures $\delta(V)$ et $\text{Réc}(V)$ faites dans [PR94] et dont une démonstration a été annoncée indépendamment par P. Colmez d’une part [Co] et par K. Kato, M. Kurihara et T. Tsuji d’autre part. Cela permet entre autres de calculer la valeur du logarithme en n’importe quel caractère, de démontrer la conjecture de Tamagawa p-adique sur le lien entre les nombres de Tamagawa d’une représentation et de son dual tordu à la Tate, d’obtenir une formule sur le déterminant de l’application logarithme ‘étendu’, etc (voir [PR94]).

Enfin, ces résultats et spéculations devraient s’étendre à tout motif dont le p-facteur d’Euler s’annule en 1 ou p^{-1} et ayant bonne réduction en p. Le cas de mauvaise réduction stable devra pouvoir se traiter de manière similaire dès qu’une bonne théorie du logarithme $\mathcal{L}_0$ sera fait (voir les travaux en cours [Co] de P. Colmez).

Donnons un plan du texte. La première partie est purement locale et valable pour toute représentation p-adique cristalline V d’une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On y rappelle ou démontre des formules sur les dérivées de $\mathcal{L}_0$. Pour cela, nous devons étendre le logarithme à $H^1_g(K,V)$ et en donner une interprétation en théorie d'Iwasawa. Dans la deuxième partie, nous traitons uniquement le cas de $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$, d'abord dans le cas local (nous devons alors distinguer les cas ordinaire et supersingulier, on s'aperçoit à la fin que les résultats sont très similaires), puis nous réinterprétons ces résultats dans le cas global. Nous étudions ensuite le comportement en **1** du module arithmétique associé à $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$.

Dans tous les calculs faits ici, on peut remplacer $\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$ par $\mathrm{Sym}^2(M(f))(k)$ où $M(f)$ est le motif de poids $k-1$ associé à une forme modulaire f de poids k de conducteur premier à p et les résultats sont identiques.

1. Calculs locaux

1.1. Rappels locaux et notations

1.1.1. Rappelons quelques notions introduites par Bloch et Kato afin de préciser nos notations. Soient K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\widetilde{K}$ la plus grande sous-extension de $K/\mathbb{Q}_p$ non ramifiée, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Soit V une représentation p-adique de G_K de dimension d que l'on suppose de de Rham (et cristalline à partir du paragraphe 1.2). On note $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ le K-espace vectoriel de dimension d associé, muni de sa filtration $\mathrm{Fil}^i\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. On note $\mathbf{D}_p(V)$ le $\widetilde{K}$-espace vectoriel associé à V muni d'un isomorphisme de Frobenius φ; $K\otimes_{\widetilde{K}}\mathbf{D}_p(V)$ est contenu dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et muni de la filtration induite par celle de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Lorsque V est cristalline, $K\otimes_{\widetilde{K}}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Si K' est une extension de K (resp. de $\widetilde{K}$), on note $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)_{K'} = K'\otimes_K\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $\mathbf{D}_p(V)_{K'} = K'\otimes_{\widetilde{K}}\mathbf{D}_p(V)$). L'espace tangent de V est défini par $t_V(K) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Si X est un $\mathbb{Z}_p[G_K]$-module, on note $X(j) = X\otimes\mathbb{Z}_p(j)$ le j-ième twist à la Tate de X. Si X est un $\mathbb{Q}_p[G_K]$-espace vectoriel, on pose $X^*(1) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(X,\mathbb{Q}_p(1))$; si X est un $\mathbb{Z}_p[G_K]$-module de type fini, on pose $X^*(1) = \mathrm{Hom}_{Z_p}(X,\mathbb{Z}_p(1))$.

1.1.2. Bloch et Kato ont défini certains sous-espaces $H^1_*(K,V)$ de $H^1(K,V)$ pour $*=e$, f et g et des applications exponentielles. Si $a,b\in\{e,f,g\}$, on note $H^1_{a/b}(K,V) = H^1_a(K,V)/H^1_b(K,V)$ et $H^1_{/b}(K,V) = H^1(K,V)/H^1_b(K,V)$. On note $\exp_a$ les diverses applications exponentielles (a précise l'espace d'arrivée). Nous n'en redonnons pas les définitions mais on peut récapituler leur définition dans le diagramme suivant dont les lignes et les colonnes sont exactes.

Notons ici $\log_f$ (resp. $\log_e$) l'application réciproque de $\exp_f$ (resp. $\exp_e$), $\log_f = (\log_{f,1},\log_{f,2})$ et $\overline{\log_f} = \log_{f,1} -(1-\varphi)\log_{f,2}$ défini modulo $(1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. Eventuellement, on rajoutera V et/ou K dans la notation lorsque cela sera nécessaire. En particulier, on utilisera ces définitions pour $V^*(1)$.

1.1.3. Considérons l'accouplement naturel de K-espaces vectoriels

$$[\,,]\colon \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)\times\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1))\to\mathbf{D}_p\mathbb{Q}(1)_K = K,$$

l'accouplement de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$[\,,]_K = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p}([\,,]) \colon \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & t_V(K) \arrow[r, "\exp_e"] \arrow[d] & H^1_e(K,V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbf{D}_p(V) \arrow[r, "x \mapsto ((1-\varphi)x,\, x \bmod \mathrm{Fil}^0)"'] \arrow[d, equal] & \mathbf{D}_p(V) \oplus t_V(K) \arrow[r, "\exp_f"] \arrow[d] & H^1_f(K,V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathbf{D}_p(V) \arrow[r, "1-\varphi"] \arrow[d] & \mathbf{D}_p(V) \arrow[r, "\exp_{f/e}"] \arrow[d] & H^1_{f/e}(K,V) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

et l'accouplement naturel de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels

$$[\,,]_{\tilde{K}} = \mathrm{Tr}_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_p}([\,,]) \colon \mathbf{D}_p(V) \times \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p.$$

On considère ensuite l'accouplement

$$\mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \times \mathbf{D}_p(V^*(1)) \oplus \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

donné par $[(x,y),(z,t)]_K = [x,z]_{\tilde{K}} + (1/[K\colon\tilde{K}])[y,t]_K = \mathrm{Tr}_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_p}([x,z] + (1/[K\colon\tilde{K}])\,\mathrm{Tr}_{K/\tilde{K}}([y,t]))$.

L'application duale de $1-\varphi \in \mathrm{End}(\mathbf{D}_p(V^*(1)))$ est $1-p^{-1}\varphi^{-1} \in \mathrm{End}(\mathbf{D}_p(V))$. L'application duale de

$$\mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbf{D}_p(V^*(1)) \oplus \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1)),$$
$$x \mapsto ((1-\varphi)x, x)$$

est l'application

$$\mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathbf{D}_p(V),$$

$$(x,y) \mapsto (1-p^{-1}\varphi^{-1})x + \frac{1}{[K\colon\widetilde{K}]}\,\mathrm{Tr}_{K/\tilde{K}}(y).$$

1.1.4. Les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels $H^1(K,V)$ et $H^1(K,V^*(1))$ sont en dualité

$$\langle x,y\rangle_K = \mathrm{inv}_K(x \cup y),$$

où $\mathrm{inv}_K\colon H^2(K,\mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p$ est l'invariant local. Notons $\lambda_{/g}$ (resp. $\lambda_{/f}$, $\lambda_g = \lambda_{g/f}$) l'application duale de $\exp_{e,V^*(1)}$ (resp. $\exp_{f,V^*(1)}$, $\exp_{f/e,V^*(1)}$). Ainsi, par définition, $\lambda_{/f}$ est une application de $H^1_{/f}(K,V)$ à valeurs dans $\mathbf{D}_p(V) \oplus \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ vérifiant

$$\langle y, \exp_{f,V^*(1)}(a,b)\rangle_K = [\lambda_{/f}(y),(a,b)]_K,$$

pour $y \in H^1_f(K,V)$, $a \in \mathbf{D}_p(V^*(1))$, $b \in t_{V^*(1)}(K)$, λ_g est une application de $H^1_g(K,V)$ à valeurs dans $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ vérifiant

$$\langle y, \exp_{f/e,V^*(1)}(a)\rangle_K = [\lambda_g(y),(a,b)]_K,$$

pour $y \in H^1_{f/e}(K,V)$ et $a \in \mathbf{D}_p(V^*(1))/(1-\varphi)\mathbf{D}_p(V^*(1))$. On peut de nouveau résumer ces applications par le diagramme commutatif suivant dont les lignes et colonnes sont exactes, obtenu par dualité du diagramme (1)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1_{g/f}(K,V) \arrow[r, dashed, "\lambda_g"] \arrow[d] & \mathbf{D}_p(V) \arrow[r, "1-p^{-1}\varphi^{-1}"] \arrow[d] & \mathbf{D}_p(V) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & H^1_{/f}(K,V) \arrow[r, "\lambda_{/f}"] \arrow[d] & \mathbf{D}_p(V) \oplus \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{D}_p(V) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1_{/g}(K,V) \arrow[r, "\lambda_{/g}"] \arrow[d] & \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[r] \arrow[d] & 0\,. \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

L'image de $\lambda_{/f}$ est formée des éléments (x,y) tels que $(1-p^{-1}\varphi^{-1})x = -(1/[K\colon\widetilde{K}])\,\mathrm{Tr}_{K/\tilde{K}}(y)$. On écrit $\lambda_{/f} = (\lambda_{/f,1},\lambda_{/f,2})$. Lorsque $x \in H^1_g(K,V)$, on a $\lambda_g(x) = \lambda_{/f,1}(x)$; si de plus $K = \widetilde{K}$, on a aussi $\lambda_{/f,2}(x) = 0$.

1.1.5. Notons v_K la valuation de K telle que l'image d'une uniformisante de K soit 1. Par la théorie de Kummer, $H^1(K,\mathbb{Q}_p(1))$ s'identifie à $\mathbb{Q}_p \otimes (K^\times)_p = \mathbb{Q}_p \otimes \varprojlim K^\times/K^{\times p^n}$. On note $\mathrm{Frob}_K = \mathrm{Frob}^{f_K}$ où Frob est le Frobenius absolu et $f_K = [\widetilde{K}\colon\mathbb{Q}_p]$ le degré d'inertie de K.

LEMME. *L'application*

$$\begin{aligned}\exp_{f/e}\colon \mathbb{Q}_p \to H^1_f(K,\mathbb{Q}_p) &= H^1(K^{nr}/K,\mathbb{Q}_p)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Gal}(K^{nr}/K),\mathbb{Q}_p)\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

est donnée par $a \mapsto (\mathrm{Frob}_K \mapsto a)$. *L'application duale* λ_g

$$\mathbb{Q}_p \otimes (K^\times)_p = H^1(K, \mathbb{Q}_p(1)) \to \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))^{\varphi=p^{-1}} = \mathbb{Q}_p$$

est donnée par $f_K^{-1} v_K$.

DÉMONSTRATION. La première assertion est la définition même. Montrons la seconde assertion. L'application

$$\lambda_g \colon H^1_g(K, \mathbb{Q}_p(1)) = H^1(K, \mathbb{Q}_p(1)) \to \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))^{\varphi=p^{-1}} = \mathbb{Q}_p$$

est définie par

$$\langle \exp_{f/e}(a), y\rangle_K = \mathrm{Tr}_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_p}([a, \lambda_g(y)]).$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \langle \exp_{f/e}(a), y\rangle_K &= v_K(y) \exp_{f/e}(a)(\mathrm{Frob}_K) \\ &= v_K(y) a = [\widetilde{K} \colon \mathbb{Q}_p]^{-1} \mathrm{Tr}_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_p}(v_K(y) a). \end{aligned}$$

Donc, $\lambda^K_{/g}(y) = [\widetilde{K} \colon \mathbb{Q}_p]^{-1} v_K(y)$. □

1.1.6. LEMME. *Supposons* K *non ramifié sur* $\mathbb{Q}_p$. *Soient* $x \in H^1_f(K, V)$ *et* $y \in H^1(K, V^*(1))$. *Alors,*

$$\langle x, y\rangle_K = [\overline{\log}_f(x), \lambda_{/f,1}(y)]_K.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que $(1 - p^{-1}\varphi^{-1})\lambda_{/f,1}(x) \in \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ et donc que le terme de droite est bien défini. On a

$$\langle x, y\rangle_K = [\log_{f,1} x, \lambda_{/f,1}(y)]_K + [\log_{f,2} x, \lambda_{/f,2}(y)]_K.$$

Comme $\lambda_{/f,2}(y) = -(1 - p^{-1}\varphi^{-1})\lambda_{/f,1}(y)$, on a

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_K &= [\log_{f,1} x, \lambda_{/f,1}(y)]_K - [\log_{f,2} x, (1 - p^{-1}\varphi^{-1})\lambda_{/f,1}(y)]_K \\ &= [\log_{f,1} x, \lambda_{/f,1}(y)]_K - [(1 - \varphi) \log_{f,2} x, \lambda_{/f,1}(y)]_K \\ &= [\log_{f,1} x - (1 - \varphi) \log_{f,2} x, \lambda_{/f,1}(y)]_K \\ &= [\overline{\log}_f x, \lambda_{/f,1}(y)]_K. \end{aligned}$$ □

1.1.7. Si L/K est une extension finie, on note $\mathrm{res}_{L/K}$ et $\mathrm{cores}_{L/K}$ les applications restrictions et corestrictions; on pose

$$T_{L/K} = \left(\mathrm{Tr}_{\tilde{L}/\tilde{K}}, \frac{[\widetilde{L} \colon \widetilde{K}]}{[L \colon K]} \mathrm{Tr}_{L/K}\right)$$

sur $\mathbf{D}_p(V)_{\tilde{L}} \oplus \mathbf{D}_p(V)_L$.

LEMME. *Par restriction,*

$$\lambda^L(\mathrm{res}(y)) = \frac{[L\colon K]}{[\widetilde{L}\colon \widetilde{K}]}\lambda^K(y).$$

Par corestriction,

$$T_{L/K}(\lambda^L_{/f}(y)) = \lambda^K_{/f}(\mathrm{cores}_{L/K}(y)),$$

$$\frac{[\widetilde{L}\colon \widetilde{K}]}{[L\colon K]}\,\mathrm{Tr}_{L/K}(\lambda^L_{/g}(y)) = \lambda^K_{/g}(\mathrm{cores}_{L/K}(y)),$$

$$\mathrm{Tr}_{\tilde{L}\tilde{K}}(\lambda^L_g(y)) = \lambda^K_g(\mathrm{cores}_{L/K}(y)).$$

En particulier, si L/K est totalement ramifié, ce qui sera le cas plus tard, $\widetilde{L} = \widetilde{K}$ et on obtient que $\lambda^L_g(y) = \lambda^K_g(\mathrm{cores}_{L/K}(y))$.

1.1.8. On suppose maintenant que K est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$ et que V est cristalline. Soient $K_n = K(\mu_{p^{n+1}})$ et $K_\infty = \cup K_n$. On a donc $\widetilde{K_n} = K$. Si $G_\infty = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, on note $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ son algèbre de groupes continue. On pose aussi $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_0)$. On note $Z^1_\infty(K,T)$ la limite projective des $H^1(K_n,T)$ pour les applications de corestriction. C'est de manière naturelle un Λ-module de type fini. On note π_0 l'application naturelle de projection $\mathbb{Q}_p \otimes Z^1_\infty(K,T) \to H^1(K,V)$. Comme K_∞/K est totalement ramifié, le lemme précédent implique que, si $x = (x_n) \in Z^1_\infty(K,T)$, $\lambda_{/f,1}(x_n)$ est indépendant de n, ce qui permet de définir un homomorphisme que l'on notera $\lambda_{/f,1}$ de $Z^1_\infty(K,T)$ à valeurs dans $\mathbf{D}_p(V)$: on a alors pour $x \in Z^1_\infty(K,T)$, $(1-p^{-1}\varphi^{-1})\lambda_{/f,1}(x) \in \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$.

Notons $Z^1_\infty(K,T)_g$ le sous-module de $Z^1_\infty(K,T)$ formé des éléments x tels que $\pi_0(x) \in H^1_g(K,V)$. On note λ_g la restriction de $\lambda_{/f,1}$ à $Z^1_\infty(K,T)_g$. L'image de $\lambda_g(x)$ est contenue dans $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ (cf. diagramme (2)).

1.2. Rappels et compléments sur le logarithme élargi

1.2.1. On note $\mathcal{H}(G_\infty)$ la sous-algèbre de $\mathbb{Q}_p[[G_\infty]]$ engendrée comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(K_0/K)]$ par les éléments $\sum_0^\infty a_n(\gamma-1)^n$ tels que $\sup_{n>0}(|a_n|/n^r) < \infty$ pour un entier r (γ est un générateur topologique de Γ). Elle contient Λ. Soit $\mathcal{K}(G_\infty)$ l'anneau total des fractions de $\mathcal{H}(G_\infty)$. Si $\tau \in G_\infty$ et si T est une variable formelle, on pose $\tau.(1+T) = (1+T)^{\chi(\tau)} \in \mathbb{Z}_p[[T]]$. Comme il est montré dans [PR94, Sect.1.2], cette action de G_∞ sur $1+T$ se prolonge à $\mathcal{H}(G_\infty)$; $h.(1+T) \in \mathbb{Q}_p[[T]]$ pour $h \in \mathcal{H}(G_\infty)$ est une fonction sur le disque unité en T dont le développement $\sum b_nT^n$ vérifie $\sup_{n>0}(|b_n|/n^r) < \infty$ pour un entier r. Nous notons $\mathcal{D}_\infty(V)$ l'image de $\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V)$ par l'application $h \mapsto h.(1+T) \in \mathbb{Q}_p[[T]] \otimes \mathbf{D}_p(V)$.

On note $\widetilde{Z}^1_\infty(K,T)$ le quotient de $Z^1_\infty(K,T)$ par son sous-$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module de torsion (ce dernier est isomorphe à $T^{G_{K_\infty}}$). Soit ε un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$. Si j est un entier, notons $.\otimes\varepsilon^{\otimes j}$ l'isomorphisme $Z^1_\infty(K,T) \to Z^1_\infty(K,T(j)) = Z^1_\infty(K,T(j))$ associé à ε. Enfin, on note π_0 la projection de $Z^1_\infty(K,T)$ dans $H^1(K,V)$ et $\pi_0^{(j)}$ le composé

$$Z^1_\infty(K,T) \to Z^1_\infty(K,T(j)) \to H^1(K,V(j));$$

on a donc $\pi_0^{(j)}(x) = \pi_{0,V(j)}(x \otimes \varepsilon^{\otimes j})$. Enfin, on identifie $\mathbf{D}_p(V)$ et $\mathbf{D}_p(V(j))$ et dans le théorème qui suit, φ désigne l'homomorphisme de Frobenius de $\mathbf{D}_p(V)$ associé à V (celui associé à $V(j)$ est donc $p^{-j}\varphi$).

1.2.2. THÉORÈME. *Soit $h \geqslant 1$ tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$. *Il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{H}(G_\infty)$-modules*

$$\Omega^\varepsilon_{V,h}\colon \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V) \to \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \widetilde{Z}^1_\infty(K,T)$$

tel que pour tout entier j vérifiant $h+j \geqslant 1$ et tel que p^{-j} ne soit pas valeur propre de φ et pour tout $g \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$

$$\begin{aligned}&\exp_{V(j)}((1-p^{j-1}\varphi^{-1})(1-p^j\varphi)^{-1}\chi^j(g))\\ &\quad = (-1)^j(h+j-1)!\,\pi_0^{(j)}(\Omega^\varepsilon_{V,h}(g)).\end{aligned} \tag{3}$$

De plus, on a $\Omega^\varepsilon_{V,h+1} = l_h\Omega^\varepsilon_{V,h}$ avec $l_h = \log(\chi(\gamma)^h\gamma^{-1})/\log\chi(\gamma)$.

L'élément l_h est tel que $\eta(l_h) = h$ pour tout caractère η d'ordre fini de G_∞.

Pour tout entier h, on pose $\Omega^\varepsilon_{V,h} = \prod_{j=h}^{h'} l_j^{-1}\Omega^\varepsilon_{V,h'}$ avec $h' \geqslant h$ assez grand. On note $\mathcal{L}_h = \mathcal{L}_{V,h}$ l'inverse de $\Omega^\varepsilon_{V,h}$. On a donc $\mathcal{L}_0 = l_0 \ldots l_{h-1}\mathcal{L}_h$ pour $h \geqslant 1$.

Ce théorème est en fait une légère généralisation de celui de [PR94]: on n'impose en effet pas de condition du type $\chi^j(g) \in (1-p^j\varphi)\mathbf{D}_p(V)$ sur les éléments de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$. Tous les ingrédients nécessaires sont dans [PR94, Sect.2.2 et 2.3]. Lorsque p^{-j} est valeur propre de φ, si $g \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ et si $\chi^j(g) \in (1-p^j\varphi)\mathbf{D}_p(V)$, l'image de g dans $H^1(K,V(j))$ par $\pi_0^{(j)} \circ \Omega^\varepsilon_{V,h}$ pour $h+j \geqslant 1$ et $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_p(V) = \mathbf{D}_p(V)$ est contenue dans $H^1_e(K,V(j))$. Sans la condition sur $\chi^j(g)$, l'image de g dans $H^1(K,V(j))$ est contenue dans $H^1_f(K,V(j))$. On peut alors être plus précis et écrire la bonne formulation de (3) lorsque p^{-j} est valeur propre de φ. Pour simplifier la formulation, faisons-le uniquement pour V (1 est donc éventuellement valeur propre de φ) et supposons $V^{G_K} = 0$.

1.2.3. PROPOSITION. *Soient $g \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$, $a_0 \in \mathbf{D}_p(V)$ tels que $g(0) - a_0 = (1-\varphi)G_0 \in (1-\varphi)\mathbf{D}_p(V)$. On a*

$$\exp_f((1-p^{-1}\varphi^{-1})(a_0,G_0)) = \pi_0(l_0\Omega^\varepsilon_{V,0}(g)).$$

1.2.4. Le terme de gauche ne dépend pas du choix de a_0 et de G_0, mais seulement de $\mathbf{1}(g)$. Ecrivons ces formules en termes de l'application inverse $\mathcal{L}_0$ de $\Omega^{\varepsilon}_{V,h}V0$. On a d'abord avec les notations du théorème,

$$\log_f \pi_0(l_0\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(g)) \equiv (1-p^{-1}\varphi^{-1})(a_0, G_0).$$

D'où,

$$\begin{aligned}&(\log_{f,1} - (1-\varphi)\log_{f,2})(\pi_0(l_0\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(g)))\\ &\quad\equiv (1-p^{-1}\varphi^{-1})g(0) \bmod (1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\overline{\log_f}\pi_0(l_0\Omega^{\varepsilon}_{V,0}(g)) \equiv (1-p^{-1}\varphi^{-1})g(0) \bmod (1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V).$$

On en déduit que pour tout $x \in Z^1_\infty(K,T)$

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0^{-1}\mathcal{L}_0(x)) \equiv \overline{\log_f}\,\pi_0(x) \bmod (1-\varphi)\,\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V). \tag{4}$$

1.2.5. On énonce dans [PR94] une conjecture Réc(V)

Pour les formes sesquilinéaires de Λ-modules

$$Z^1_\infty(K,T) \times Z^1_\infty(K,T^*(1)) \to \Lambda$$

et

$$\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V) \times \Lambda \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p \otimes \Lambda$$

étendues à $\mathcal{K}(G_\infty)$, l'adjoint $(\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),1})^*$ de $\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),1}$ est égal à $\mathcal{L}_{V,0}$.

Cette conjecture s'étend naturellement à $\mathcal{H}(G_\infty)\otimes\mathcal{D}_\infty(V)$ et même à $\mathcal{K}(G_\infty)\otimes\mathcal{D}_\infty(V)$. C'est elle qui permet de faire tous les calculs de valeurs spéciales sur les fonctions L p-adiques définies par notre méthode.

C'est maintenant un théorème démontré par P. Colmez ([Co]) et (annoncé) par Kato, Kurihara et Tsuji ([Ka-Ku-Ts?]).

1.2.6. PROPOSITION. *Supposons* $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) = 0$ *et* $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} = 0$. *Alors, si* $x \in Z^1_\infty(K,T)$,

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(l_0^{-1}\mathcal{L}_0(x)) = \log_f \pi_0(x).$$

C'est une simple reformulation de (4) dans le cas où $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ est nul.

1.2.7. PROPOSITION. *Supposons* $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V) \neq 0$ *ou* $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \neq 0$. *Pour* $x \in Z^1_\infty(K,T)$, *on a*

$$\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = (1-\varphi)\lambda_{/f,1}(\pi_0(x)),$$

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = -(1-\varphi)\lambda_{/f,2}(\pi_0(x)) \in (1-\varphi)\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION. Comme $\mathcal{L}_{V,0} = l_0^{-1}(\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),0})^* = (\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),1})^*$, on a

$$\mathbf{1}(\mathcal{L}_{V,0}(x)) = \mathbf{1}((\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),1})^*(x)).$$

D'autre part, pour $1-\varphi$ inversible sur $\mathbf{D}_p(V^*(1))$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)) \arrow[r, "\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),1}"] \arrow[d, "(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})"'] & \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K, T^*(1)) \arrow[d, "\pi_0"] \\
\mathbf{D}_p(V^*(1)) \arrow[r, "\exp_{f,V^*(1)}"] & H^1(K, V^*(1)).
\end{tikzcd}$$

En prenant l'adjoint, on en déduit la proposition. Lorsque $1-\varphi$ n'est pas inversible sur $\mathbf{D}_p(V^*(1))$, on utilise le diagramme commutatif plus précis

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V^*(1)) \arrow[r, "\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),1}"] \arrow[d, "1-p^{-1}\varphi^{-1}"'] & \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K, T^*(1)) \arrow[d, "\pi_0"] \\
Y \arrow[r, "\exp_{f,V^*(1)}"] & H^1(K, V^*(1)),
\end{tikzcd}$$

où $Y = (\mathbf{D}_p(V^*(1)) \oplus \mathbf{D}_p(V^*(1))/\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V))/\mathrm{Im}(\alpha)$ et où

$$\alpha\colon \mathbf{D}_p(V^*(1)) \to \mathbf{D}_p(V^*(1)) \oplus \mathbf{D}_p(V^*(1))/\mathrm{Fil}^0$$

est donnée par $d \mapsto ((1-\varphi)d, d)$ et on conclut de la même manière. $\square$

Lorsque $1-\varphi$ est inversible, on a donc

$$(1-\varphi)^{-1}\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = \lambda_{/f,1}(\pi_0(x))$$

et

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = -\lambda_{/f,2}(\pi_0(x)) \in \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V).$$

1.2.8. Supposons maintenant que $\pi_0(x)$ appartient à $H^1_f(K, V)$; d'après ce qui précède, $\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = 0$. On calcule alors sa dérivée. On note

$$\partial^r.f = \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^r \langle\chi^s\rangle(f)\right)_{|s=0}$$

pour $f \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ ou $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$ lorsque cela est défini; on a $\partial^0.f = \mathbf{1}(f)$. La proposition suivante est une reformulation de (4)

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION. *Supposons* $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V) \neq 0$ *ou* $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \neq 0$. *Pour* $x \in Z^1_\infty(K, T)$ *et si* $\pi_0(x)$ *appartient à* $H^1_f(K,V)$*, on a*

$$\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = 0$$

et

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x) \equiv \overline{\log_f}\,\pi_0(x) \bmod (1-\varphi)\,\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V),$$

ou encore lorsque $1-\varphi$ *est inversible sur* $\mathbf{D}_p(V)$*,*

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x) \equiv \log_{f,1}\pi_0(x) \bmod \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V).$$

1.3. Prolongement du logarithme à $H^1_g(K,T)$

1.3.1. Comme V est supposée cristalline, la description des représentations p-adiques semi-stables en termes de (φ, N)-modules filtrés permet de décrire $H^1_g(K, V)$ comme $H^1(C^{\cdot})$ où $C^{\cdot}$ est le complexe

$$\mathbf{D}_p(V) \to \mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_p(V)[-1] \oplus t_V \to \mathbf{D}_p(V)[-1],$$

la première application étant donnée par $d \mapsto ((1-\varphi)d, 0, d)$ et la seconde par $(d_1, d_2, d_3) \mapsto -(1-\varphi)d_2$, $\mathbf{D}_p(V)[-1]$ étant obtenu par décalage (l'opérateur N est nul sur $\mathbf{D}_p(V)$). Explicitement, comme le noyau de la deuxième application est simplement

$$\mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_p(V)[-1]^{\varphi=1} \oplus t_V = \mathbf{D}_p(V) \oplus \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \oplus t_V$$

et que $H^1_f(K,V)$ se calcule comme le conoyau de $\mathbf{D}_p(V) \to \mathbf{D}_p(V) \oplus t_V$, on déduit de cette description un scindage de l'inclusion $H^1_f(K,V) \to H^1_g(K,V)$ et un prolongement $\log_g$ du logarithme $\log_f$ à $H^1_g(K,V)$. Remarquons que cette description impose d'avoir choisi un plongement de B_{st} dans B_{dR}, ou ce qui revient au même d'avoir choisi un prolongement du logarithme usuel à $K^\times$. Le choix adapté à la théorie d'Iwasawa cyclotomique est $\log_p p = 0$: p est caractérisé parmi les uniformisantes de $\mathbb{Q}_p$ comme étant une norme universelle dans l'extension $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$. Dans ce paragraphe, nous allons donner une interprétation semblable de $\log_g$ en termes de 'normes universelles'. Pour cela, si $Z^1_\infty(K,T)_f$ (resp. $Z^1_\infty(K,T)_g$) est l'ensemble des éléments x de $Z^1_\infty(K,T)$ tels que $\pi_0(x) \in H^1_f(K,V)$ (resp. $\pi_0(x) \in H^1_g(K,V)$), on commence par construire un scindage S^ε de la suite

$$0 \to Z^1_\infty(K,T)_f \to Z^1_\infty(K,T)_g \to \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$$

après avoir tensorisé par $\mathcal{K}(G_\infty)$. Ce scindage aura la propriété que $\mathcal{L}_0(S^\varepsilon(a))$ appartient à $\mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ pour $a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$. Nous supposons désormais que $V^{G_K} = 0$ et même que 1 n'est pas valeur propre de φ.

1.3.2. Soit $x = (x_n)$ un élément de $Z^1_\infty(K,T)$ dont l'image dans $H^1(K,T)$ est nulle: $x_n \in H^1(K(\mu_{p^{n+1}}),T)$, $\mathrm{Tr}_{K_{n+1}/K_n}(x_{n+1}) = x_n$ pour $n > 0$ et $\mathrm{Tr}_{K_0/K}(x_0) = 0$. Il est montré dans [PR94] que l'homomorphisme naturel

$$Z^1_\infty(K,T)_{G_\infty} \to H^1(K,T)$$

est injectif (pour $V^{G_K} = 0$). Il existe un élément $y \in Z^1_\infty(K,T)$ unique tel que

$$x = (\tau - 1)y,$$

où τ est un générateur de G_∞ (en effet, y est déterminé à un élément de $Z^1_\infty(K, T)^{G_K} = T^{G_K}$ près et ce dernier module est nul). L'image $\pi_0(y)$ de y dans $H^1(K,V)$ ne dépend que de x.

Comme $Z^1_\infty(K,T)$ est un $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module sans torsion, on déduit du paragraphe 1.3.2 que si x est un élément de $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)$ dont l'image dans $H^1(K,V)$ est nulle, il existe $y \in \mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)$ tel que $(\tau-1)y = x$.

1.3.3. REMARQUE. On peut calculer 'explicitement' $\pi_0(y)$ à l'aide des opérateurs de Kolyvagin (voir [So92]). Comme $V^{G_K} = 0$, il existe un entier α annulant $(T/MT)^{G_K}$ pour toute puissance M de p. On considère l'opérateur de Kolyvagin relativement à K_n/K et à α. Notons-le $\mathrm{kol}_n^{(\alpha)}$. On obtient donc, à partir d'un élément $x = \varprojlim x_n \in Z^1_\infty(K,T)$ dont l'image dans $H^1(K,T)$ est nulle, des éléments

$$\mathrm{kol}_n^{(\alpha)}(x_n) \in H^1(K, T/p^nT).$$

LEMME. *Sous les hypothèses précédentes, les* $\mathrm{kol}_n^{(\alpha)}(x_n)$ *sont compatibles pour les applications induites par les projections* $T/p^nT \to T/p^{n'}T$ *pour* $n' \leqslant n$ *et définissent un élément* $\mathrm{kol}^{(\alpha)}(x)$ *de* $H^1(K,T)$ *et on a* $\mathrm{kol}^{(\alpha)}(x) = \alpha\pi_0(y)$.

DÉMONSTRATION. On écrit $x = (\tau-1)y$. Si y_n est la projection de y dans $H^1(K_n,T)$, on a $x_n = (\tau_n - 1)y_n$ où τ_n désigne la projection de τ dans $\mathrm{Gal}(K_n/K)$ (τ_n est un générateur du groupe cyclique $\mathrm{Gal}(K_n/K)$). Posons $D_n = \sum_{i=0}^{(p-1)p^n} i\tau_n^i$ et $\mathrm{Tr}_n = \sum_{i=0}^{(p-1)p^n} \tau_n^i$. On a alors

$$D_n(x_n) = (\tau_n - 1)D_n(y_n) = \mathrm{Tr}_n(y_n) - p^n(p-1)x_n.$$

D'où, $D_n(x_n) \equiv \mathrm{Tr}_n(y_n) \bmod p^n H^1(K_n,T)$. On en déduit que $y_{-1} = \mathrm{Tr}_n(y_n)$ vérifie

$$\alpha y_{-1} \equiv \alpha D_n(x_n) \equiv \mathrm{kol}_{p^n}^{(\alpha)}(x_n) \bmod p^n$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

et αy_0 est la limite des $\mathrm{kol}_{p^n}^{(\alpha)}(x_n) \in H^1(K_0, T/p^nT)$. $\square$

L'élément

$$\mathrm{kol}_p(x) = \frac{1}{\alpha \log \chi(\tau)} \mathrm{kol}^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\log \chi(\tau)} \pi_0(y)$$

de $H^1(K, V)$ est indépendant de α et de τ.

1.3.4. Si τ est un générateur de G_∞, on pose

$$\Pi_\tau(T) = (1 - p^{-1}\varphi) \log \frac{(1+T)^{\chi(\tau)} - 1}{T}$$

et pour $a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi = p^{-1}}$

$$\Pi_\tau^{(a)} = a\Pi_\tau(T) = (1-\varphi)\left(a \log \frac{(1+T)^{\chi(\tau)} - 1}{T}\right),$$

φ agissant à la fois sur $\mathbf{D}_p(V)$ et sur $1+T$ (par $\varphi(1+T) = (1+T)^p$). Comme $((1+T)^{\chi(\tau)} - 1)/T$ appartient à $\mathbb{Z}_p^\times + T\mathbb{Z}_p[[T]]$, $\Pi_\tau(T) \in \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p[[T]]$ par le lemme de Dwork. De plus Π_τ^a est un élément de $\mathcal{D}_\infty(V)$ (il est facile de vérifier que $\sum_{\zeta \in \mu_p} \Pi_\tau^a(\zeta(1+T) - 1) = 0$, ce qui caractérise les éléments de $\mathcal{D}_\infty(V)$) et appartient à l'image de $\mathbb{Q}_p[[T]] \otimes \mathbf{D}_p(V)$ par l'opérateur $1-\varphi$. Notons pour h entier,

$$X_{\tau,h}^{(a)} = \Omega_{V,h}^\varepsilon(\Pi_\tau^{(a)}(T)) \in \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z_\infty^1(K, T).$$

Pour h assez grand, $X_{\tau,h}^{(a)}$ appartient à $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes Z_\infty^1(K, T)$. L'image de $X_{\tau,h}^{(a)}$ dans $H^1(K, V)$ est nulle. Il existe donc un élément $Y \in \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z_\infty^1(K, T)$ tel que $X_{\tau,h}^{(a)} = (\tau - 1)Y$. On vérifie facilement que Y ne dépend pas du choix de τ; on le note $Y_h^{(a)}$. On a donc

$$X_{\tau,h}^{(a)} = (\tau - 1)Y_h^{(a)}$$

et on déduit des propriétés de $\Omega_{V,h}^\varepsilon$ que $Y_{h+1}^{(a)} = l_h Y_h^{(a)}$ avec $l_h = h - (\log \tau/\log \chi(\tau))$. En particulier, $Y_1^{(a)} = (l_1 \ldots l_{h-1})^{-1} Y_h^{(a)}$ et $\mathcal{L}_h(Y_h^{(a)}) = \mathcal{L}_1(Y_1^{(a)}) = l_0^{-1}\mathcal{L}_0(Y_1^{(a)})$ et pour $h \geqslant 1$, $X_{\tau,h}^{(a)}$ est 'défini' en $\mathbf{1}$.

1.3.5. L'élément $\omega_1 = \varprojlim (1 - \zeta_n)$ de $Z_\infty^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p(1))$ est l'élément cyclotomique. Par la théorie similaire pour $\mathbb{Q}_p(1)$ (due alors à Coleman), on peut définir $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(\omega_1) \in (\tau - 1)^{-1}\Lambda \otimes \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$. On a

$$(\tau - 1)\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(\omega_1).(1+T) = -\Pi_\tau(T).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

Il est relié à la fonction de Kubota–Leopoldt. Reprenons les notations de [PR94b]. Posons $\omega = \omega_1 \otimes \varepsilon^{\otimes -1} \in Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p)$ avec $\varepsilon = (\zeta_n)$. On pose

$$\mathcal{L}_{K-L} = -\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p,0}(\omega)^\iota \in (\chi(\tau)^{-1}\tau - 1)^{-1}\Lambda,$$

où ι est l'involution de Λ induite par $\tau \mapsto \tau^{-1}$. L'élément $\mathcal{L}_{K-L}$ vérifie la propriété suivante: pour tout entier j positif et impair

$$\chi^j(\mathcal{L}_{K-L}) = \zeta_{\{p\}}(-j) = (1-p^j)\zeta(-j),$$

où ζ est la fonction ζ de Riemann. Enfin, si Tw est l'opérateur de twist de $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ induit par $\tau \mapsto \chi(\tau)\tau$, on a

$$Tw(\mathcal{L}_{K-L}) = -Tw(\mathcal{L}^\iota_{\mathbb{Q}_p,0}(\omega)) = \mathcal{L}^\iota_{\mathbb{Q}_p(1),1}(\omega_1).$$

LEMME. *On a* $\mathcal{L}_{V,0}(Y_1^{(a)}) = -l_0 Tw(\mathcal{L}^\iota_{K-L})a$.

Remarquons aussi que $\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(Y_1^{(a)})) = (1-p^{-1})a = (1-\varphi)a$.

DÉMONSTRATION. En effet,

$$\begin{aligned}
&(\tau - 1)\mathcal{L}_{V,1}(Y_1^{(a)}).(1+T)\\
&\quad = \mathcal{L}_{V,1}(X_{\tau,1}^{(a)}).(1+T) = \Pi^a_\tau(T) = a\Pi_\tau(T)\\
&\quad = -a(\tau-1)\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(\omega_1).(1+T).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{L}_{V,0}(Y_1^{(a)}) = l_0\mathcal{L}_{V,1}(Y_1^{(a)}) = -l_0\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_p(1),1}(\omega_1)a = -l_0 Tw(\mathcal{L}^\iota_{K-L})a. \qquad \square$$

1.3.6. Notons $\mathcal{D}'_\infty(V)$ l'extension de Λ-modules de $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ par $\mathcal{D}_\infty(V)$ définie par le cocycle $\tau \mapsto (a \mapsto \Pi_\tau^{(a)}(T))$

$$0 \to \mathcal{D}_\infty(V) \to \mathcal{D}'_\infty(V) \to \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \to 0.$$

Il existe donc un unique élément $\widetilde{\Pi}_a \in \mathcal{D}'_\infty(V)$ (indépendant de τ) dont l'image dans $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ est a et tel que $(\tau-1)\widetilde{\Pi}_a = \Pi_\tau^{(a)}$. Moralement, $\widetilde{\Pi}_a = (1-\varphi)(a\log(T))$. Ce qui précède peut se résumer en la proposition suivante

PROPOSITION. *Pour h assez grand, l'application $\Omega^\varepsilon_{V,h}$ se prolonge en une application de $\mathcal{D}'_\infty(V)$ dans $\mathcal{H}(G_\infty) \otimes \widetilde{Z}^1_\infty(K,T)$ déterminée par $\widetilde{\Pi}^a \mapsto Y_h^{(a)}$ et pour $h \geqslant 1$, l'image de $\Omega^\varepsilon_{V,h}$ est définie en* $\mathbf{1}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

1.3.7. PROPOSITION. *Soit $a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$. L'image $\pi_0(Y_1^{(a)})$ de $Y_1^{(a)}$ dans $H^1(K,V)$ appartient à $H_g^1(K,V)$ et on a*

$$\lambda_g(Y_1^{(a)}) = \lambda_g(\pi_0(Y_1^{(a)})) = a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}.$$

DÉMONSTRATION. Comme nous avons supposé que 1 n'est pas valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_p(V)$, il est facile de vérifier que pour tout $x_0 \in H_f^1(K,V^*(1))$, il existe un élément $g \in \mathcal{K}(G_\infty) \otimes \mathbf{D}_p(V)$, défini en $\mathbf{1}$, tel que $\Omega^{\varepsilon}_{V^*(1),1}(g) = x_0 \in H^1(K,V^*(1))$. D'après 1.2.3, on a $(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(g) \equiv \overline{\log_f}\, x_0 \bmod (1-\varphi)\,\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$. D'autre part, posons $\Pi_\tau^{(a)} = \widetilde{\Pi}_\tau^{(a)}.(1+T)$ avec $\widetilde{\Pi}_\tau^{(a)} \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \otimes \mathbf{D}_p(V)$. La loi de réciprocité dit que

$$\langle \Omega^{\varepsilon}_{V,1}(\widetilde{\Pi}_\tau^{(a)}), \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),0}(g)\rangle_V = [\widetilde{\Pi}_\tau^{(a)}, g^\iota]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

On remarque que

$$\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),0}(g) = l_0^{-1}\Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g).$$

Comme

$$\Omega^{\varepsilon}_{V,1}(\Pi^{(a)}_{\tau,1}) = (\tau-1)Y_1^{(a)},$$

on obtient

$$\left\langle -\frac{\tau-1}{l_0}Y^{(a)}, \Omega^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1}(g)\right\rangle_K = [\Pi_\tau^{(a)}, g^\iota]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

D'où, en évaluant cette expression sur le caractère trivial $\mathbf{1}$,

$$\log\chi(\tau)\langle \pi_0(Y_1^{(a)}), x_0\rangle_K = [\Pi_\tau^{(a)}(0), \mathbf{1}(g)]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

On a

$$\Pi_\tau^{(a)}(0) = a\left(1-\frac{1}{p}\right)\log\chi(\tau) = \log\chi(\tau)(1-\varphi)a,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\log\chi(\tau)\langle \pi_0(Y_1^{(a)}), x_0\rangle_K &= \log\chi(\tau)[(1-\varphi)a, g(0)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &= \log\chi(\tau)[a,(1-p^{-1}\varphi^{-1})g(0)]_{\mathbf{D}_p(V)}\\ &= \log\chi(\tau)[a,\overline{\log_f}\, x_0]_{\mathbf{D}_p(V)}.\end{aligned}$$

En inversant les rôles de V et de $V^*(1)$ dans 1.1.6, on a

$$\langle \pi_0(Y_1^{(a)}), x_0\rangle_K = [\lambda_{/f,1}(\pi_0(Y_1^{(a)})), \overline{\log_f}\, x_0]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

D'où,

$$[\lambda_{/f,1}(\pi_0(Y_1^{(a)})), \overline{\log_f}\, x_0]_{\mathbf{D}_p(V)} = [a, \overline{\log_f}\, x_0]_{\mathbf{D}_p(V)}.$$

Comme cela est vrai quelque soit x_0 dans $H^1_f(K,T)$, on en déduit que

$$\lambda_{/f,1}(\pi_0(Y_1^{(a)})) = a.$$

En particulier, comme $(1-p^{-1}\varphi^{-1})a = 0$, $\lambda_{/f,2}(\pi_0(Y_h^{(a)})) = 0$ et $\pi_0(Y_1^{(a)})$ appartient à $H^1_g(K,V)$. $\square$

1.3.8. On pose pour $a \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$, $S^\varepsilon(a) = Y_1^{(a)} \in \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)_g$. L'application S^ε est un scindage de l'application

$$Z^1_\infty(K,T)_g \to \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}},$$

une fois étendu les scalaires à $\mathcal{K}(G_\infty)$. Si $Z^1_\infty(K,T)_f$ est l'ensemble des éléments de $Z^1_\infty(K,T)$ dont l'image dans $H^1(K,V)$ est dans $H^1_f(K,V)$, on obtient une application

$$\widetilde{S}^\varepsilon \colon Z^1_\infty(K,T)_g \to \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(K,T)_f$$

définie par $\widetilde{S}^\varepsilon(x) = x - S^\varepsilon(\lambda_g(x))$. On a alors

$$\mathcal{L}_0(x) = \mathcal{L}_0(\widetilde{S}^\varepsilon(x)) + l_0 Tw(\mathcal{L}^\iota_{K-L}) \otimes \lambda_g(x).$$

Remarquons que $Tw(\mathcal{L}^\iota_{K-L})$ a un pôle simple en $\mathbf{1}$, ce qui implique que $l_0Tw(\mathcal{L}^\iota_{K-L})$ est défini et non nul en $\mathbf{1}$. Par contre si η est un caractère non trivial de G_∞, $l_0Tw(\mathcal{L}^\iota_{K-L})$ est nul en η, ce qui est cohérent avec le fait que la η-composante de $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ est bien sûr nulle.

On obtient une section de l'inclusion $H^1_f(K,V) \to H^1_g(K,V)$ en posant

$$\widetilde{s}(x_0) = x_0 - \pi_0(S^\varepsilon(\lambda_g(x_0))) \in H^1_f(K,V) \tag{5}$$

pour $x_0 \in H^1_g(K,V)$, ce qui permet d'étendre le logarithme $\log_f$ à $H^1_g(K,V)$ en posant $\log_g x = \log_f \widetilde{s}(x)$. Ce prolongement dépend de l'extension cyclotomique. On peut vérifier que cette section est la même que celle dont on a parlé au début du paragraphe 1.3.1. En particulier, prenons $V = \mathbb{Q}_p(1)$. Notons e_{-1} la base canonique de $\mathbf{D}_p(\mathbb{Z}_p(1))$. Alors, $S^\varepsilon(e_{-1})$ est égal à l'élément $(1-\zeta_n)_n$ modulo $\mathbb{Z}_p(1)$. L'image de $S^\varepsilon(e_{-1})$ dans $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p \otimes (\mathbb{Q}_p^\times)_p$ est bien définie et est égale à p. Ainsi, si $q \in \mathbb{Q}_p \otimes (\mathbb{Q}_p^\times)_p$, $\widetilde{S}^\varepsilon(q)$ est simplement égal à $qp^{-\mathrm{ord}_p(q)} \in \mathbb{Z}_p^\times$. Le logarithme $\log_{g,\mathbb{Q}_p(1)}$ de $\mathbb{Q}_p^\times$ dans $\mathbb{Q}_p$ défini ici est donc le logarithme d'Iwasawa défini de la manière naturelle sur $\mathbb{Z}_p^\times$ et prolongé à $\mathbb{Q}_p^\times$ par $\log_p p = 0$.

On peut alors réécrire la proposition 1.2.8

1.3.9. PROPOSITION. *Supposons* $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V)$ *ou* $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ *non nul et* $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=1}=0$. *Soit x appartenant à $Z^1_\infty(K,T)_g$. On a*

$$\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x))=(1-\varphi)\lambda_g(x)=(1-p^{-1})\lambda_g(x), \tag{6}$$

d'où $(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x))=0$, *et*

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x)\equiv\log_g\pi_0(x)\bmod \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_p(V). \tag{7}$$

DÉMONSTRATION. Démontrons (7). Comme $\mathcal{L}_0(x)-\mathcal{L}_0(\widetilde{S}^\varepsilon(x))$ appartient à $\mathcal{K}(G_\infty)\otimes\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$, on a

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathcal{L}_0(x)=(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathcal{L}_0(\widetilde{S}^\varepsilon(x)).$$

On applique alors la proposition 1.2.8 à $\widetilde{S}^\varepsilon(x)$ (sa projection dans $H^1(K,V)$ appartient à $H^1_f(K,V)$). En utilisant (5), on en déduit (7). □

2. Exemple du carré symétrique

2.1. ETUDE LOCALE (CAS ORDINAIRE)

2.1.1. Soit $V_p(E)$ la représentation associée à une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_p$: $V_p(E)=\mathbb{Q}_p\otimes\varprojlim E_{p^n}$. On suppose ici que E a bonne réduction ordinaire. Posons $V=\mathrm{Sym}^2(V_p(E))$. Les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_p(V)$ sont α_p^{-2}, β_p^{-2} et p^{-1} avec α_p unité p-adique. On note e_0 une base de $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=\alpha_p^{-2}}$, e_{-1} une base de $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$, e_{-2} une base de $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=\beta_p^{-2}}$. On peut les choisir à partir d'une base (f_{-1},f_0) de vecteurs propres de $\mathbf{D}_p(V_p(E))$ vérifiant $\varphi f_0=\alpha_p^{-1}f_0$, $\varphi f_{-1}=\beta_p^{-1}f_{-1}$ par les formules $e_0=f_0^2$, $e_{-1}=f_0.f_{-1}$, $e_{-2}=f_{-1}^2$. Si $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V_p(E))$ est engendré par $f_0+\mu_pf_{-1}$, la filtration de $\mathbf{D}_p(V)$ est donnée par $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)=\mathbb{Q}_p\omega$ avec $\omega=e_0+2\mu_pe_{-1}+\mu_p^2e_{-2}$ et $\mathrm{Fil}^{-1}\,\mathbf{D}_p(V)=\mathbb{Q}_p\omega\oplus\mathbb{Q}_p(e_{-1}+\mu_pe_{-2})=\mathbb{Q}_p(e_{-1}+\mu_pe_{-2})\oplus\mathbb{Q}_p(e_0+\mu_pe_{-1})$. Rappelons que la représentation $V_p(E)$ est scindée si et seulement si $\mu_p\neq0$ (on utilise pour cela l'équivalence de catégories entre la catégorie des représentations p-adiques ordinaires de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et la catégorie des φ-modules filtrés ordinaires de la théorie de Fontaine: $\mu_p=0$ si et seulement si $\mathbf{D}_p(V_p(E))$ est somme directe de 2 φ-modules filtrés ordinaires non nuls, ce qui est équivalent à ce que $V_p(E)$ soit décomposée, cf. par exemple [PR94c] et [PR90].

Nous *supposons désormais que* $\mu_p\neq0$. Cela signifie donc que $E/\mathbb{Q}_p$ n'est pas le relèvement canonique de sa réduction. Nous utiliserons l'isomorphisme $\wedge^2V_p(E)=\mathbb{Q}_p(1)$, pour fixer une base (f_{-1},f_0) telle que $f_0\wedge f_{-1}$ soit la base canonique 1 de $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$. Ce choix fixe alors e_{-1} et par l'application induite par la projection $\mathrm{Fil}^{-1}\,\mathbf{D}_p(V) \to \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$, l'image de $e_{-1} \in \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ dans $\mathbb{Q}_p = \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$ est 1. D'autre part, $\mathbf{e} \underset{\text{déf}}{=\!=} e_0 \wedge e_{-1} \wedge e_{-2}$ et

$$\omega_{\mathbf{e}} \underset{\text{déf}}{=\!=} \frac{1}{2\mu_p}\omega = \frac{1}{2\mu_p}e_0 + e_{-1} + \frac{\mu_p}{2}e_{-2}$$

sont alors complètement déterminés.

Remarquons que

$$(1 - p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_p(V) \cap \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V) = 0$$

car μ_p est supposé non nul. Nécessairement $\lambda_{/f,1}$ est donc à valeurs dans $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ et $\lambda_{/f,2}(H^1(\mathbb{Q}_p, V)) = 0$. Enfin, pour des raisons de dimension, $H^1(\mathbb{Q}_p, V) = H^1_g(\mathbb{Q}_p, V)$ et donc les $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$-modules $Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)_g$ et $Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)$ sont égaux.

2.1.2. PROPOSITION. *Soit $x \in Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)$. On a*

$$\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = (1 - p^{-1})\lambda_g(x) = (1 - \varphi)\lambda_g(x)$$

et

$$(1 - \varphi)^{-1}(1 - p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x) \wedge e_{-1} \wedge e_{-2} = \log_g \pi_0(x) \wedge \omega_{\mathbf{e}} \wedge e_{-2}.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons que si $d \in \mathbb{Q}_p e_{-2} \oplus \mathbb{Q}_p e_0$ et $d' \in \mathbf{D}_p(V)$ sont tels que $d \equiv d'$ modulo $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, alors

$$d \wedge e_{-1} \wedge e_{-2} = d' \wedge \omega_{\mathbf{e}} \wedge e_{-2}. \tag{8}$$

En effet, comme $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ est de dimension 1, $d' \wedge \omega_{\mathbf{e}}$ ne dépend que de d' modulo $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ et on a donc l'égalité $d \wedge \omega_{\mathbf{e}} = d' \wedge \omega_{\mathbf{e}}$. On écrit $d = \delta_{-2}e_{-2} + \delta_0 e_0$. On a $d \wedge e_{-1} \wedge e_{-2} = \delta_0\mathbf{e}$. D'autre part,

$$d \wedge \omega_{\mathbf{e}} = \delta_0 e_0 \wedge e_{-1} + \tfrac{1}{2}(\delta_0\mu_p - \delta_{-2}\mu_p^{-1})e_0 \wedge e_{-2} - \delta_{-2}e_{-1} \wedge e_{-2}.$$

Donc,

$$d' \wedge \omega_{\mathbf{e}} \wedge e_{-2} = d \wedge \omega_{\mathbf{e}} \wedge e_{-2} = \delta_0\mathbf{e}.$$

D'où (8). La proposition se déduit alors facilement de (7) en remarquant que $(1 - p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x)$ appartient à $\mathbb{Q}_p e_0 \oplus \mathbb{Q}_p e_{-2}$. □

2.1.3. La représentation V étant ordinaire, elle admet une filtration

$$0 \subset \mathrm{Fil}^2_p\,V \subset \mathrm{Fil}^1_p\,V \subset V$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

en $G_{\mathbb{Q}_p}$-représentations vérifiant: $\mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^2_p V) = \mathbb{Q}_p e_{-2}$, $\mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^1_p V) = \mathbb{Q}_p e_{-2} \oplus \mathbb{Q}_p e_{-1} = D^{\mathrm{sc}}$. Le quotient $\mathrm{Fil}^1_p V/\mathrm{Fil}^2_p V$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p(1)$. On reprend une idée de Greenberg pour construire une application $\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}$

$$H^1(\mathbb{Q}_p, V) \to \mathbb{Q}_p \otimes (\mathbb{Q}_p^\times)_p = \mathbb{Q}_p \otimes \varprojlim \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Q}_p^{\times\, p^n}$$

de la manière suivante. On remarque que $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p V) = H^1(\mathbb{Q}_p, V)$. En effet, le noyau de l'application naturelle $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p V) \to H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ est un quotient de $H^0(\mathbb{Q}_p, V/\mathrm{Fil}^1_p V)$ qui est nul et les espaces vectoriels $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p V)$ et $H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ sont tous deux de dimension 3 (on utilise la formule

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(\mathbb{Q}_p, W) &= \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_p(W)\\ &\qquad + \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(\mathbb{Q}_p, W) + \dim_{\mathbb{Q}_p} H^0(\mathbb{Q}_p, W^*(1))\end{aligned}$$

ce qui donne 3 pour V et $2+0+1$ pour $\mathrm{Fil}^1_p V$). L'application $\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}$ cherchée est alors le composé

$$\begin{aligned}H^1(\mathbb{Q}_p, V) &= H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p V) \to H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p V/\mathrm{Fil}^2_p V)\\ &= H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1)) \cong \mathbb{Q}_p \otimes (\mathbb{Q}_p^\times)_p,\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant donné par la théorie de Kummer. On a alors un isomorphisme

$$\mathbb{Q}_p \otimes (\mathbb{Q}_p^\times)_p \cong \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$$

donné par $q \mapsto (\log_p q, \mathrm{ord}_p(q))$ (avec $\log_p p = 0$). On pose

$$\ell(q) = \frac{\log_p q}{\mathrm{ord}_p(q)} \in \mathbb{Q}_p \cup \infty.$$

2.1.4. DÉFINITION. Si $y \in H^1(\mathbb{Q}_p, V)$, *l'invariant de Greenberg* $\ell(y)$ de y est

$$\ell(y) = \ell(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y)).$$

Il ne dépend que de la droite engendrée par y.

2.1.5. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\mathbb{Q}_p, V) & \xrightarrow{\lambda_g} & \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \\
\uparrow & & \| \\
H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p V) & \xrightarrow{\lambda_g} & \mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^1_p V)^{\varphi=p^{-1}} \\
\downarrow & & \| \\
H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1)) & \xrightarrow{\lambda_g} & \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))^{\varphi=p^{-1}} = \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))
\end{array}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

est commutatif. On en déduit que

$$\lambda_g(y) = \mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y))e_{-1}. \tag{9}$$

Remarquons qu'en particulier, $\mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y))$ est non nul (et donc $l(y) \in \mathbb{Q}_p$) si et seulement si y n'appartient pas à $H^1_f(\mathbb{Q}_p, V)$. Interprétons maintenant $\log_p \mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y)$. De la fonctorialité des constructions faites, on déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r, "S^\varepsilon"] \arrow[d, equal] & \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T) \\
\mathbf{D}_p(\mathrm{Fil}^1_p V)^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r, "S^\varepsilon"] \arrow[d, equal] & \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1 T) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r, "S^\varepsilon"] & \mathcal{K}(G_\infty) \otimes Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1)).
\end{tikzcd}$$

Ainsi, $\log_p \mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y)e_{-1}$ est la projection sur $\mathbb{Q}_p e_{-1}$ parallèlement à $\mathbb{Q}_p e_{-2}$ de $\log_f \widetilde{s}(y) = \log_g y$ ($\log_g y \in D^{\mathrm{sc}}$ car on voit y, et donc $\widetilde{s}(y)$, comme appartenant à $H^1(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p V)$) ou encore que

$$\log_p \mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y)e_{-1} \wedge e_{-2} = \log_g y \wedge e_{-2}.$$

D'où la proposition

2.1.6. PROPOSITION. *Soit* $x \in Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)$ *tel que* $\mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(\pi_0(x)))$ *soit non nul. Alors,*

$$\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) = (1 - p^{-1})\,\mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(\pi_0(x)))e_{-1} \quad \text{et} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(1-\varphi)^{-1}&(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x) \wedge e_{-1} \wedge e_{-2} \\ &= -\frac{1}{2\mu_p}\ell(\pi_0(x))\,\mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(\pi_0(x)))\mathbf{e}.\end{aligned} \tag{11}$$

DÉMONSTRATION. On transforme la formule de la proposition 2.1.2 et on utilise le fait que $\log_g \pi_0(x) \in D^{\mathrm{sc}}$, que

$$\log_g \pi_0(x) \wedge e_{-2} = \log_p \mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(\pi_0(x))e_{-1} \wedge e_{-2}$$

et que $e_{-1} \wedge \omega_{\mathbf{e}} \wedge e_{-2} = -(2\mu_p)^{-1}$. $\square$

L'équation (11) peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}&\partial.\mathcal{L}_0(x) \wedge e_{-1} \wedge e_{-2}\\ &\quad = -\frac{1}{2\mu_p}(1-\alpha_p^{-2})\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)^{-1} \ell(\pi_0(x))\,\mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(\pi_0(x)))\mathbf{e} \qquad (12)\end{aligned}$$

(seule, l'action de φ sur e_0 intervient). D'autre part, posons $\lambda_g(y) = \widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(y)e_{-1}$; on a donc $\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(y) = \mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y))$. Nous verrons que dans le cas supersingulier, $\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(y)$ a un sens alors que $\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(y)$ n'en a plus.

2.2. ETUDE LOCALE (CAS SUPERSINGULIER)

On suppose ici que $V_p(E)$ a bonne réduction supersingulière en p et que $a_p = 0$. Alors, V est la somme directe de W_1 et de $W_2 \cong \mathbb{Q}_p(1)(\varepsilon)$ où ε est le caractère quadratique non ramifié de $\mathbb{Q}_p$ (on a donc $\varepsilon(p) = -1$), ce qui se voit par exemple sur la description du carré symétrique de $\mathbf{D}_p(V_p(E))$; $\mathbf{D}_p(W_1)$ se décrit de la manière suivante: $\mathbf{D}_p(W_1) = \mathbb{Q}_p e_{-1} \oplus \mathbb{Q}_p e_0$, avec $\varphi e_{-1} = p^{-1}e_{-1}$, $\varphi e_0 = -p^{-1}e_0$ et $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(W_1) = \mathrm{Fil}^{-1}\,\mathbf{D}_p(W_1) = \mathbb{Q}_p(e_0 - e_{-1})$, $\mathrm{Fil}^{-2}\,\mathbf{D}_p(W_1) = \mathbf{D}_p(W_1)$. Les notations ont été choisies pour que les résultats puissent s'exprimer de la même manière dans le cas ordinaire et dans le cas supersingulier. Remarquons que la base (e_0, e_{-1}) est fixée à un multiple près.* Comme $\det \mathbf{D}_p(W_1) = \mathbb{Q}_p(2)(\varepsilon)$, elle est donc déterminée au signe près par $\mathbf{e}' = e_{-1} \wedge e_0$. On note e_{-2} une base de $\mathbf{D}_p W_2$: on a donc $\varphi e_{-2} = -p^{-1}e_{-2}$. On pose encore $\mathbf{e} = e_0 \wedge e_{-1} \wedge e_{-2}$ et $\omega_{\mathbf{e}} = e_{-1} - e_0$. Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_p(V) = \mathbb{Q}_p e_0 \oplus \mathbb{Q}_p e_{-2}$ est d'intersection nulle avec $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, $H^1(\mathbb{Q}_p, V) = H^1_g(\mathbb{Q}_p, V)$ et $H^1(\mathbb{Q}_p, W_2) = H^1_g(\mathbb{Q}_p, W_2) = H^1_f(\mathbb{Q}_p, W_2)$.

2.2.1. Soit x un élément de $Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)$: $x = (x_1, x_2)$ avec $x_1 \in Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, W_1)$ et $x_2 \in Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, W_2)$. On a $\mathcal{L}_0(x) = \mathcal{L}_0(x_1) \oplus \mathcal{L}_0(x_2)$. Commençons par regarder la deuxième composante. Dans W_2, on a $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(W_2) = \mathbf{D}_p(W_2)^{\varphi = p^{-1}} = 0$. La proposition 1.2.6 implique que $\mathcal{L}_0(x_2)$ en un zéro en $\mathbf{1}$ d'ordre $\geqslant 1$ et que

$$\begin{aligned}\partial.\mathcal{L}_0(x_2) &= -\frac{(1+p^{-1})}{2}\log_f\,\pi_0(x_2)\\ &= -(1-\varphi)(1-p^{-1}\varphi^{-1})^{-1}\log_f\,\pi_0(x_2) \in \mathbb{Q}_p e_{-2}.\end{aligned}$$

Dans W_1, on a $\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x_1)) = (1-p^{-1})\lambda_g(x_1) \in \mathbb{Q}_p e_{-1}$ et

$$(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x_1) \equiv \log_g\,\pi_0(x_1) \bmod \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(W_1).$$

* Mais une fois choisi $e_{-1} \wedge e_0$ (c'est-à-dire un isomorphisme entre le déterminant de W et $\mathbb{Q}_p(2)(\varepsilon)$), si l'on impose que $\omega_{\mathbf{e}} = e_{-1} - e_0$, (e_{-1}, e_0) est fixé au signe près.

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

2.2.2. Pour $y \in H^1(\mathbb{Q}_p, V)$, $\lambda_g(y)$ appartient à la droite engendrée par e_{-1}. Posons $\lambda_g(y) = \widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(y)e_{-1}$. Introduisons l'analogue de l'invariant de Greenberg. L'injection de $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ dans $\mathbf{D}_p(W_1)$ induit un isomorphisme

$$i\colon \mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}} \to t_{W_1}(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{D}_p(W_1)/\mathrm{Fil}^0\, \mathbf{D}_p(W_1).$$

Si y est un élément de $H^1(\mathbb{Q}_p, W_1)$, on note $\ell(y)$ l'élément de $\mathbb{Q}_p$ tel que

$$\log_{g,W_1} y = \ell(y) i(\lambda_g(y)).$$

Il ne dépend d'aucun choix et on a

$$\log_{g,W_1} y \equiv \ell(y)\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(y)e_{-1} \equiv \ell(y)\lambda_g(y) \bmod \mathrm{Fil}^0\, \mathbf{D}_p(W_1).$$

Si $y = (y_1, y_2)$ est un élément de $H^1(\mathbb{Q}_p, V)$, on pose $\ell(y) = \ell(y_2)$ qui ne dépend que de la droite engendrée par y. On a alors la proposition

2.2.3. PROPOSITION. *Soit $x \in Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, T)$. On a*

$$\begin{aligned} \mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) &= (1-\varphi)\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(\pi_0(x))e_{-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)\lambda_g(\pi_0(x)) \in \mathbb{Q}_p e_{-1} \quad \textit{et} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x) \wedge e_{-1} \wedge e_{-2} \\ &\quad = \ell(\pi_0(x))\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(\pi_0(x)))\mathbf{e}. \end{aligned} \tag{14}$$

DÉMONSTRATION. Comme $(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x_2)$ appartient à la droite $\mathbb{Q}_p e_{-2}$, il n'intervient pas dans l'équation (14). D'autre part, on remarque que

$$\log_{g,W_1} y \wedge \omega_{\mathbf{e}} = \ell(y)\lambda_g(y) \wedge \omega_{\mathbf{e}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} &(1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x) \wedge e_{-1} \\ &\quad = (1-\varphi)^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})\partial.\mathcal{L}_0(x) \wedge \omega_{\mathbf{e}} \\ &\quad = \log_g \pi_0(x_1) \wedge \omega_{\mathbf{e}} \\ &\quad = \ell(\pi_0(x))\lambda_g(\pi_0(x)) \wedge \omega_{\mathbf{e}} \\ &\quad = -\ell(\pi_0(x))\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(\pi_0(x)))e_{-1} \wedge e_0 \end{aligned}$$

d'où, l'équation (14). □

Si l'on veut faire apparaître les facteurs d'Euler, on remarque encore que seule l'action de φ sur e_0 intervient et la formule (14) devient

$$\begin{aligned}&\partial.\mathcal{L}_0(x)\wedge e_{-1}\wedge e_{-2}\\ &\quad=2^{-1}(1+p^{-1})\ell(\pi_0(x))\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(\pi_0(x))\mathbf{e}\\ &\quad=(1-\alpha_p^{-2})\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)^{-1}\ell(\pi_0(x))\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(\pi_0(x))\mathbf{e},\end{aligned}\tag{15}$$

où $\alpha_p=\sqrt{-p}$ et $\beta_p=-\sqrt{-p}=p\alpha_p^{-1}$.

Il est commode de poser $\mu_p=\frac{1}{2}$ dans le cas supersingulier. Les formules sont alors les mêmes dans le cas ordinaire et dans le cas supersingulier.

2.3. Fonction L p-adique de $\mathrm{Sym}^2(E)$

2.3.1. Supposons maintenant que E est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, ayant bonne réduction en p. Soit $h_1(E)$ le motif dont la réalisation p-adique est $V_p(E)=\mathbb{Q}_p\otimes\varprojlim E_{p^n}$ et $M=\mathrm{Sym}^2(h_1(E))$. On note M_{dR} sa réalisation de de Rham, M_B sa réalisation de Betti, M_B^+ la partie fixe par l'involution de M_B. Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel M_B est muni d'un $\mathbb{Z}$-réseau $\mathcal{M}=\mathrm{Sym}^2(H_1(E,\mathbb{Z}))$. On note $V=M_p=\mathrm{Sym}^2(V_p(E))$ la réalisation p-adique de M. On fait le choix d'une base de $h_1(E)_{\mathrm{dR}}$ dont le déterminant est la base canonique 1 de $\mathbb{Z}(1)_{\mathrm{dR}}$. On note $\mathbf{e}$ la base de $\det M_{\mathrm{dR}}$ qui s'en déduit. On choisit enfin une $\mathbb{Z}$-base ε du motif de Tate $\mathbb{Z}(1)$ et une $\mathbb{Z}$-base ω_B^+ de $\det\mathcal{M}^+$ ($\mathcal{M}^+$ est un $\mathbb{Z}$-module de rang 2).

Soit $L(M,s)=\prod_l L(M,s)$ (resp. $L_{\{p\}}(M,s)=\prod_{l\neq p}L(M,s)$) la fonction L complexe de M (resp. la fonction L complexe de M incomplète en p). Le motif M est critique (en 0) et lorsque E est une courbe elliptique modulaire, le produit est convergent en $s=0$ et $L(M,0)$ et

$$L_{\{p\}}(M,0)=(1-\alpha_p^{-2})(1-\beta_p^{-2})(1-p^{-1})L(M,0).$$

sont non nuls.

2.3.2. Il est conjecturé dans [PR95] l'existence d'une fonction L p-adique $\mathbf{L}_{\{p\}}^p$ attachée à M, munie de sa structure entière orientée $\mathcal{M}$. C'est un homomorphisme de $\wedge^2\mathbf{D}_p(V)$ dans $\mathcal{K}_+(G_\infty)$, déterminé par son évaluation sur les caractères χ^j pour les entiers j tels que 1 et p^{-1} ne soient pas valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_p(V(-j))$. Les formules ont été données dans l'introduction. Il est aussi conjecturé ([PR95, Sect. 4.4]) qu'il existe un élément spécial $c_p^{\text{spéc}}\in\mathbb{Q}_p\otimes H^1_\infty(\mathbb{Q},T)_+$ (que l'on espère 'motivique', nous y reviendrons en 2.3.12) tel que $\mathbf{L}_{\{p\}}^p$ soit donnée pour tout $n\in\wedge^2\mathbf{D}_p(V)$ par

$$\mathbf{L}_{\{p\}}^p(n)\mathbf{e}=\mathcal{L}_0(c_p^{\text{spéc}})\wedge n.\tag{H}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

Rappelons enfin que dans le cas du carré symétrique d'une courbe elliptique ayant bonne réduction ordinaire en p, une fonction L p-adique a vraiment été construite. Elle devrait être, à une constante multiplicative près, la valeur de $\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}$ sur le paramètre $e_{-1}\wedge e_{-2}\in \det D^{\mathrm{sc}}$: $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}=\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}(e_{-1}\wedge e_{-2})$. On devrait donc avoir

$$\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}\mathbf{e}=\mathcal{L}_0(c_p^{\text{spéc}})\wedge e_{-1}\wedge e_{-2}.$$

Sous $\delta(\mathrm{Fil}^1_p V)$, il est montré dans [PR95] que $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}\in\mathbb{Q}_p\otimes\mathbb{Z}_p[[G_\infty^+]]$.

Dans le cas supersingulier, il sera commode de considérer aussi l'élément $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ vérifiant $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}\mathbf{e}=\mathcal{L}_0(c_p^{\text{spéc}})\wedge e_{-1}\wedge e_{-2}$ avec le choix des e_i qui a été fait au paragraphe 2.2. La formule (6) montre que $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ est nulle en $\mathbf{1}$.

Nous allons tirer les conséquences de ce que $\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}$ et $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ seraient définis à partir d'un élément $c_p^{\text{spéc}}$ sur le comportement en $\mathbf{1}$ de $\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}$ et de $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$. Nous ferons ensuite une conjecture reliant la valeur en $\mathbf{1}$ de $\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}$ et la valeur de la fonction L complexe $L(M,0)$. Cette conjecture ne fait pas intervenir d'invariant $\ell_p(V)$. Nous montrerons ensuite que cette conjecture implique pour la fonction $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ la conjecture de Greenberg [Gr94] faisant intervenir par contre l'invariant $\ell_p(V)$ de Greenberg.

Nous *supposons jusqu'à la fin du paragraphe* 2.3 *que* (H) *est vraie* c'est-à-dire que

$$\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}(n)\mathbf{e}=\mathcal{L}_0(c_p^{\text{spéc}})\wedge n.$$

2.3.3. Il existe un entier $r\geqslant 0$ et $\tilde{c}_{p,r}^{\text{spéc}}\in\mathbb{Q}_p\otimes H^1_\infty(\mathbb{Q},T)_+$ vérifiant

$$c_p^{\text{spéc}}=\frac{(\tau-1)^r}{\log^r\chi(\tau)}\tilde{c}_{p,r}^{\text{spéc}}$$

pour τ générateur de G_∞ et tel que $\pi_0(\tilde{c}_{p,r}^{\text{spéc}})$ soit non nul. Si $\pi_0(c_p^{\text{spéc}})$ est non nul, ce que l'on espère, r est égal à 0. On pose $c_p^{(r)}(p)=\pi_0(\tilde{c}_{p,r}^{\text{spéc}})$ et $c_p^{\text{flach}}(p)=\pi_0(c_p^{\text{spéc}})$.

2.3.4. PROPOSITION. *La fonction* $\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}$ *a un zéro d'ordre* $\geqslant r$ *en* $\mathbf{1}$. *Il est d'ordre* r *si et seulement si* $c_p^{(r)}(p)$ *n'appartient pas à* $H^1_f(\mathbb{Q},V)$ *et on a alors*

$$\begin{aligned}\partial^r.\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}(n)\mathbf{e} &= (1-p^{-1})\tilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(c_p^{(r)}(p)))e_{-1}\wedge n\\ &= (1-p^{-1})\lambda_g(c_p^{(r)}(p))\wedge n. \qquad (16)\end{aligned}$$

En particulier, si E *est modulaire et sous les hypothèses techniques de* [Fl92], *la fonction* $\mathbf{L}^{p}_{\{p\}}$ *a un zéro d'ordre* r *en* $\mathbf{1}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION. On a

$$\partial^r.\mathbf{L}^p_{\{p\}}(n) = \mathbf{1}(\mathcal{L}_0(\tilde{c}^{\text{spéc}}_{p,r})) \wedge n = (1-p^{-1})\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(\tilde{c}^{\text{spéc}}_{p,r})e_{-1} \wedge n$$

d'après l'équation (10) ou (14). On utilise alors (9) pour trouver (16). On remarque ensuite que $c_p^{(r)}(p)$ appartient a priori à $H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, V)$ et appartient à $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ si et seulement si $\lambda_g(\tilde{c}^{\text{spéc}}_{p,r}) = \lambda_g(c_p^{(r)}(p))$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda_g(c_p^{(r)}(p)) = 0$.

Lorsque E est modulaire et sous des hypothèses techniques, Flach a montré que $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ est nul. On en déduit que $c_p^{(r)}(p)$ est nul si et seulement si $\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(c_p^{(r)}(p)))$ est nul. □

2.3.5. Rajoutons pour le paragraphe 2.3 l'hypothèse que

$$H^1_f(\mathbb{Q}, V) = 0,$$

ce qui devrait être toujours vérifié. Le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, V)$ est alors de dimension 1 et c'est aussi l'image par π_0 de $\mathbb{Q}_p \otimes H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)$; l'hypothèse faite ([PR95, Chap. 3 et App. B] implique la conjecture de Leopoldt faible est vraie, c'est-à-dire que $H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)^{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})}$ est un $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module de torsion et que $H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)^{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})}$ est de rang 1.

DÉFINITION. *L'invariant de Greenberg* $\ell_p(V)$ de V est égal à $\ell(c)$ où c engendre la droite $H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, V)$. C'est un élément de $\mathbb{Q}_p$.

Dans ce qui suit, lorsque E a bonne réduction supersingulière, on prend $\mu_p = -\frac{1}{2}$.

2.3.6. PROPOSITION. $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ *a un zéro d'ordre* $r+1$ *en* $\mathbf{1}$ *si et seulement si* $\ell_p(V)$ *est non nul et on a alors*

$$\partial^{r+1}.\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}} = -\frac{1}{2\mu_p}(1-\alpha_p^{-2})\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)^{-1}\ell_p(V)\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(c_p^{(r)}(p)).$$

DÉMONSTRATION. Cela se déduit des définitions et de l'équation (12) ou (14). □

2.3.7. CONJECTURE. *L'élément* $c_p^{\mathrm{flach}}(p)$ *de* $H^1(\mathbb{Q}, V)$ *est non nul.*

PROPOSITION. *La fonction* $\mathbf{L}^p_{\{p\}}$ *ne s'annule pas en* $\mathbf{1}$ *si et seulement si* $c_p^{\mathrm{flach}}(p) \neq 0$.

Nous le supposerons désormais.

2.3.8. Fixons un élément $\omega_{\mathbb{Q}}$ non nul du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Fil}^0 M_{\mathrm{dR}}$ de dimension 1. L'application période p-adique $\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}$ est l'application de $\wedge^2\mathbf{D}_p(V)$ dans

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

$\det \mathbf{D}_p(V)$ définie par $\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(n) = \omega_{\mathbb{Q}} \wedge n$. La période complexe attachée à $\omega_{\mathbb{Q}}$ est l'élément $\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}$ de $\mathbb{C}^{\times}$ tel que

$$\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}\mathbf{e} = \omega_{\mathbb{Q}} \wedge \omega_B^{+},$$

où ω_B^{+} est la base du $\mathbb{Z}$-module orienté $\mathcal{M}$.

2.3.9. CONJECTURE. *Si $\pi_{[-1]}$ est la projection sur $\mathbf{D}_p(V)^{\varphi=p^{-1}}$ parallèlement aux autres sous-espaces propres de φ,*

$$\lambda_g(c_p^{\text{flach}}(p)) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\pi_{[-1]}(\omega_{\mathbb{Q}}). \tag{17}$$

La formule peut aussi s'écrire

$$\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(c_p^{\text{flach}}(p)) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbf{e}}}}, \tag{18}$$

ou dans le cas ordinaire

$$\mathrm{ord}_p(\mathfrak{q}_{\mathbf{e}}(c_p^{\text{flach}}(p))) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbf{e}}}}, \tag{19}$$

où $\Omega_{\infty,\omega_{\mathbf{e}}} = \Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}(\omega_{\mathbf{e}}/\omega_{\mathbb{Q}})$. Les formules précédentes mélangent les nombres complexes et p-adiques et signifient bien sûr qu'une fois mis d'un côté les nombres p-adiques et de l'autre les nombres complexes, les deux membres sont en fait rationnels et égaux.

2.3.10. CONJECTURE. *La fonction $\mathbf{L}_{\{p\}}^{p}$ vérifie*

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(\mathbf{L}_{\{p\}}^{p})\mathbf{e} = \frac{1}{2}\frac{L_{\{p\}}(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}(1-\varphi)\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}. \tag{20}$$

PROPOSITION. *Les formules* (17) *et* (20) *sont équivalentes*.

DÉMONSTRATION. On remarque d'abord que montrer (20) est équivalent à montrer que les valeurs des deux membres sur $e_{-2} \wedge e_0$ sont égales car l'évaluation sur $e_{-1} \wedge e_i$ est nulle pour $i = -2, 0$: on a

$$\begin{aligned}&(1-\varphi)\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(e_{-1} \wedge e_i)\\ &\quad = \Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}((1-p^{-1}\varphi^{-1})e_{-1} \wedge (1-p^{-1}\varphi^{-1})e_i) = 0.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

On en déduit en explicitant l'action de $1-\varphi$ et de $1-p^{-1}\varphi^{-1}$ que (20) est équivalent à

$$\begin{aligned}&(1-\alpha_p^{-2})(1-\beta_p^{-2})\mathbf{1}(\mathbf{L}^p_{\{p\}})(e_{-2}\wedge e_0)\mathbf{e}\\&\quad=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L_{\{p\}}(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(e_{-2}\wedge e_0).\end{aligned}\tag{21}$$

D'où, en passant à la fonction L complète en p,

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}(\mathbf{L}^p_{\{p\}})(e_{-2}\wedge e_0)\mathbf{e}\\&\quad=\tfrac{1}{2}(1-p^{-1})\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(e_{-2}\wedge e_0).\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise alors la formule (16) et la remarque que si l'on pose $\omega_{\mathbb{Q}}=u\omega_{\mathbf{e}}$, on a

$$\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(e_{-2}\wedge e_0)=\omega_{\mathbb{Q}}\wedge e_{-2}\wedge e_0=ue_{-1}\wedge e_{-2}\wedge e_0=u\mathbf{e}$$

car $\omega_{\mathbf{e}}=2^{-1}\mu_p^{-1}e_0+e_{-1}+2\mu_pe_{-2}$ ou $e_{-1}-e_0$. □

2.3.11. CONJECTURE. *La fonction $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ a un zéro simple en $\mathbf{1}$ et on a*

$$\partial.\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}=\tfrac{1}{2}\ell_p(V)(1-\alpha_p^{-2})\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega_{\mathbb{Q}}},\tag{22}$$

où $\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}$ est le nombre p-adique tel que

$$\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(e_{-1}\wedge e_{-2})=\omega_{\mathbb{Q}}\wedge e_{-1}\wedge e_{-2}=\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}\mathbf{e}.$$

PROPOSITION. *Les formules* (22) *et* (17) *sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. On utilise la formule (12) et le calcul de périodes suivant: dans le cas ordinaire, on a

$$\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(e_{-1}\wedge e_{-2})=u\omega_{\mathbf{e}}\wedge e_{-1}\wedge e_{-2}=(2\mu_p)^{-1}u\mathbf{e}$$

avec toujours $\omega_{\mathbb{Q}}=u\omega_{\mathbf{e}}$ et donc $\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}\mathbf{e}=(2\mu_p)^{-1}u$. Dans le cas supersingulier, $\Omega_{p,\omega_{\mathbb{Q}}}(e_{-1}\wedge e_{-2})=-u$. □

2.3.12. *Réinterprétation motivique*. Supposons l'existence d'un élément $c_l^{\mathrm{flach}}(l)\in H^1_{f,\{l\}}(\mathbb{Q},M_l)$ pour tout nombre premier. On souhaiterait que $c_l^{\mathrm{flach}}(l)$ soit motivique, c'est-à-dire qu'il provienne d'un élément $\mathfrak{c}^{\mathrm{flach}}(l)\in H^1_g(\mathbb{Q},M)$ qui aurait alors

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

bonne réduction en dehors de l. On pourrait alors considérer l'image $c_p^{\text{flach}}(l)$ de $\mathfrak{c}^{\text{flach}}(l)$ dans $H^1_g(\mathbb{Q}, M_p)$.

Soient alors l et p des nombres premiers en lesquels M ait bonne réduction. Si $l \neq p$, on pose $\mathbf{D}_l(M_p) = M_p$. Parallèlement à l'isomorphisme

$$\frac{H^1_g(\mathbb{Q}_p, M_p)}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, M_p)} \overset{\lambda^p_{g,p}}{\cong} \mathbf{D}_p(M_p)^{\varphi_p = p^{-1}},$$

on a un isomorphisme

$$\frac{H^1_g(\mathbb{Q}_l, M_p)}{H^1_f(\mathbb{Q}_l, M_p)} \overset{\lambda^p_{g,l}}{\cong} \mathbf{D}_l(M_p)^{\mathrm{Frob}_l^{-1} = l^{-1}}$$

pour $l \neq p$.

La question que l'on peut alors se poser est la suivante: Peut-on comparer les $\lambda^l_{g,p}(\mathfrak{c}^{\text{flach}}(p))$ pour l variant? On pourrait par exemple spéculer que

$$\lambda^l_{g,p}(\mathfrak{c}^{\text{flach}}(p)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1 - \frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\frac{L(M,0)}{\Omega_{\infty,\omega_{\mathbb{Q}}}}\omega, \tag{23}$$

pour une base ω convenable de $\mathbf{D}_p(M_l)^{\mathrm{Frob}_p^{-1} = p^{-1}}$ ne dépendant que de $\omega_{\mathbb{Q}}$. Quel est le lien avec l'élément construit par Flach dans [Fl92]?

2.4. Etude arithmétique

2.4.1. Notons $\mathbb{I}_{\text{arith}}(T)$ le module des fonctions L p-adiques arithmétiques de T, sous-$\mathbb{Z}_p[[G^+_\infty]]$-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\wedge^2\mathbf{D}_p(V), \mathcal{H}^+(G_\infty))$. Dans le cas qui nous intéresse, on peut le définir de la manière suivante. On déduit de l'isomorphisme $\det \mathrm{Sym}^2(T_p(E)) = \mathbb{Z}_p(2)$ un élément $\mathbf{e}_T = \mathbf{e} \in \det \mathbf{D}_p(V)$ correspondant à la base canonique de $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(2))$. Soit S un ensemble fini de places contenant p, les places où V est ramifié et les places à l'infini; si F est une extension de $\mathbb{Q}$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}$, soit $G_{S,F}$ le groupe de Galois sur F de la plus grande sous-extension de $\overline{\mathbb{Q}}/F$ non ramifiée en dehors de S. Soit $H^2_{\infty,S}(\mathbb{Q}, T)$ la limite projective des $H^2(G_{S,F_n}, T)$, $Z^2_{\infty,S}(\mathbb{Q}, T)$ la limite projective des $\oplus_{v \in S} H^2(F_{n,v}, T)$ et $H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)$ le noyau de l'application naturelle

$$H^2_{\infty,S}(\mathbb{Q}, T) \to Z^2_{\infty,S}(\mathbb{Q}, T).$$

Soit $F(H^2_\infty(\mathbb{Q}, T))$ une série caractéristique de $H^2_{\infty,S}(\mathbb{Q}, T)_+$ en tant que $\mathbb{Z}_p[[G^+_\infty]]$-module. Soit $x \in H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)_+$ tel que $H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)_+/\mathbb{Z}_p[[G^+_\infty]]x$ soit de $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-torsion, de série caractéristique F_x en tant que $\mathbb{Z}_p[[G^+_\infty]]$-module. On pose pour tout $n \in \wedge^2\mathbf{D}_p(V)$

$$I_{\text{arith}}(T)(n)\mathbf{e} = F_x^{-1} F(H^2_\infty(\mathbb{Q}, T))\mathcal{L}_0(x) \wedge n,$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

ce qui définit un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\wedge^2\mathbf{D}_p(V), \mathcal{H}^+(G_\infty))$. Le sous-$\mathbb{Z}_p[[G_\infty^+]]$-module engendré par $I_{\text{arith}}(T)$ est indépendant des choix faits et est appelé module des fonctions L p-adiques arithmétiques et noté $\mathbb{I}_{\text{arith}}(T)$. La conjecture principale affirme que $\mathbf{L}_{\{p\}}^p$ est un générateur du $\mathbb{Z}_p[[G_\infty^+]]$-module $\mathbb{I}_{\text{arith}}(T)$. Si $\mathbf{L}_{\{p\}}^p$ est obtenu à partir d'un élément spécial $c_p^{\text{spéc}}$ comme dit au paragraphe 2.3.2, la conjecture principale est équivalente à ce que les idéaux caractéristiques des modules de torsion $H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)_+$ et de $H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)_+/\mathbb{Z}_p[[G_\infty^+]]c_p^{\text{spéc}}$ sont égaux.

Si a et b sont deux éléments de $\mathbb{Q}_p$, on note $a \sim b$ si $a = ub$ avec $u \in \mathbb{Z}_p^\times$. Rappelons ([F-PR94], [PR95, 3.6]) que l'on définit des nombres $\mathrm{Tam}_{l,\omega_{tg}}(T) \in \mathbb{Q}_p^\times$ pour tout nombre premier l et ω_{tg} une base de t_V (si $l \neq p$, ces nombres ne dépendent pas de ω_{tg} et on les note aussi $\mathrm{Tam}_l(T)$).

2.4.2. PROPOSITION. *Supposons $H^1_f(\mathbb{Q}, V) = 0$. Le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbf{1}(\mathbb{I}_{\text{arith}}(T))$ est non nul. Si $I_{\text{arith}}(T)$ est un générateur de $\mathbb{I}_{\text{arith}}(T)$ et ω une base de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, on a*

$$
\begin{aligned}
&(1 - p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{1}(I_{\text{arith}}(T))\mathbf{e}\\
&\quad\sim L_p(V, 0)^{-1} \prod_l \mathrm{Tam}_{l,\omega_{tg}}(T) \frac{\sharp\text{Ш}(T^*(1))}{\sharp(V/T)^{G_{\mathbb{Q}}}\sharp(V^*(1)/T^*(1))^{G_{\mathbb{Q}}}}(1-\varphi)\Omega_{p,\omega},
\end{aligned}
$$

pour ω_{tg} base de $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ telle que $\omega_{tg} \wedge \omega = \mathbf{e}$.

On se donne toujours une base ω de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ et ω_{tg} une base de t_V tel que $\omega \wedge \omega_{tg} = \mathbf{e}$. On note ω^{-1} la base de $t_{V^*(1)}$ duale de ω. Remarquons tout de suite qu'il suffit de montrer que la formule de la proposition est vraie lorqu'on l'évalue sur $e_0 \wedge e_{-2}$ car les deux membres sont nuls sur $e_{-1} \wedge e_{-2}$ et sur $e_{-1} \wedge e_0$.

2.4.3. LEMME. *Soit x une base du $\mathbb{Z}_p$-module $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T)$ libre de rang 1. Alors, pour tout $n \in \wedge^2\mathbf{D}_p(V)$, on a*

$$\lambda_g(x) \wedge n \sim \frac{\mathrm{Tam}_{p,\omega_{tg}}(T)}{\sharp H^2(\mathbb{Q}_p, T)}\omega \wedge (1 - p^{-1}\varphi^{-1})n.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'abord de le démontrer pour $n = e_{-2} \wedge e_0$ car les deux membres de l'équation sont nuls pour $n = e_{-1} \wedge e_0$ et $n = e_{-1} \wedge e_{-2}$. On remarque ensuite que $\mathrm{Tam}_{p,\omega_{tg}}(T) = \mathrm{Tam}_{p,\omega^{-1}}(T^*(1))$ ([PR95, App. C]). Le nombre $\mathrm{Tam}_{p,\omega^{-1}}(T^*(1))^{-1}$ est à une unité près le déterminant de la suite exacte

$$0 \to H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, V) \to \mathbf{D}_p(V) \oplus \mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V) \to \mathbf{D}_p(V) \to H^2(\mathbb{Q}_p, V) \to 0,$$

calculé dans les bases x, $(e_{-1}, e_{-2}, e_0, \omega)$, (e_{-1}, e_{-2}, e_0) et dans la base $1/\sharp H^2(\mathbb{Q}_p, T)$ de $\det H^2(\mathbb{Q}_p, T) \subset \det H^2(\mathbb{Q}_p, V) = \mathbb{Q}_p$. Ce déterminant se calcule

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

explicitement et vaut à une unité près

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tam}_{p,\omega^{-1}}(T^*(1))^{-1}\\&\quad\sim \widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(x)^{-1}\sharp H^2(\mathbb{Q}_p,T)^{-1}\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\widetilde{\pi}_{[-1],\mathbf{e}}(\omega),\end{aligned}$$

où $\lambda_g(x)=\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(x)e_{-1}$ et $\pi_{[-1]}(\omega)=\widetilde{\pi}_{[-1],\mathbf{e}}(\omega)e_{-1}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(x)\ \sim\ &\sharp H^2(\mathbb{Q}_p,T)^{-1}\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)\\&\times\mathrm{Tam}_{p,\omega_{tg}}(T)\widetilde{\pi}_{[-1],\mathbf{e}}(\omega).\end{aligned}\tag{24}$$

En remarquant que $\omega\wedge e_{-2}\wedge e_0=\widetilde{\pi}_{[-1],\mathbf{e}}(\omega)\mathbf{e}$, que $\lambda_g(x)\wedge e_{-2}\wedge e_0=\widetilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(x)\mathbf{e}$ et que

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})(e_{-2}\wedge e_0)=\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)e_{-2}\wedge e_0,$$

on en déduit le lemme. □

2.4.4. La démonstration suit le même principe que [PR95, 3.6]. L'hypothèse que $H^1_f(\mathbb{Q},V)=0$ implique que $H^2(G_{S,F_\infty},V^*(1)/T^*(1))=0$ ([PR95, App. B]). On a alors la suite exacte

$$0\to H^1_\infty(\mathbb{Q},T)\to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)\to X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)\to H^2_\infty(\mathbb{Q},T)\to 0,$$

on prend les suites exactes des invariants–coinvariants qui s'en déduisent (après l'avoir coupé en deux), on reconnaît, après avoir tensorisé par $\mathbb{Q}_p$, une des suites exactes de Poitou–Tate, qui est elle-même le tensorisé par $\mathbb{Q}_p$ d'une suite exacte. La comparaison de ces deux suites avant d'avoir tensorisé par $\mathbb{Q}_p$ implique l'égalité de certains nombres et donne le résultat. Plus précisément, on définit Y comme le conoyau de $H^1_\infty(\mathbb{Q},T)\to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)$ et on a donc les suites exactes (dans la suite, on posera $\mathcal{W}=V^*(1)/T^*(1)$ pour simplifier les notations)

$$0\to H^1_\infty(\mathbb{Q},T)\to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)\to Y\to 0$$

et

$$0\to Y\to X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)\to H^2_\infty(\mathbb{Q},T)\to 0.$$

On en déduit les suites exactes

$$\begin{aligned}&0\to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q}_p,T)^{G_\infty}\to Y^{G_\infty}\to H^1_\infty(\mathbb{Q},T)_{G_\infty}\\&\quad\to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q}_p,T)_{G_\infty}\to Y_{G_\infty}\to 0\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

et

$$0 \to Y^{G_\infty} \to X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)^{G_\infty} \to H^2_\infty(\mathbb{Q},T)^{G_\infty}$$
$$\to Y_{G_\infty} \to X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \to H^2_\infty(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \to 0, \tag{25}$$

(ici $H^1_\infty(\mathbb{Q},T)^{G_\infty} = T^{G_{\mathbb{Q}_\infty}}$ est nul). On démontre comme dans [PR95, Chap. 3] les isomorphismes et les suites exactes suivantes

$$\mathbb{Q}_p \otimes H^1_\infty(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \cong H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q},V),$$

(on note $\Delta(T)$ (resp. $L(T)$) le noyau (resp. l'image) de $H^1_\infty(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \to H^1_{f,\{p\}}$ $(\mathbb{Q},T)$);

$$Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} = \prod_{l\in S} T^{G_{\mathbb{Q}_l}} = \prod_{l\in S} H^2(\mathbb{Q}_l,\mathcal{W})^\frown;$$

$$0 \to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)^{G_\infty} \to Y^{G_\infty} \to \Delta(T) \to 0,$$

d'où

$$\mathbb{Q}_p \otimes Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)^{G_\infty} \cong \mathbb{Q}_p \otimes Y^{G_\infty};$$
$$X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)^{G_\infty} \cong H^2(G_{S,\mathbb{Q}},\mathcal{W})^\frown,$$

d'où

$$\mathbb{Q}_p \otimes X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)^{G_\infty} \cong H^2(G_{S,\mathbb{Q}},V^*(1))^*;$$
$$\mathbb{Q}_p \otimes H^2_\infty(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \cong \mathbb{Q}_p \otimes \widehat{K_p},$$

où K_p est le noyau de

$$H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q},\mathcal{W}) \to H^1(\mathbb{Q}_p,\mathcal{W});$$
$$0 \to X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \to H^1(G_{S,\mathbb{Q}},\mathcal{W})^\frown \to H^1(G_\infty,(\mathcal{W})^{G_\infty})^\frown \to 0,$$

d'où

$$\mathbb{Q}_p \otimes X^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \cong H^1(G_{S,\mathbb{Q}},V^*(1))^*;$$
$$0 \to L(T) \to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \to Y_{G_\infty} \to 0$$

et

$$0 \to Z^1_{\infty,S}(\mathbb{Q},T)_{G_\infty} \to \prod_{l\in S} H^1(\mathbb{Q}_l,T)$$
$$\to \prod_{l\in S} H^1(G_{\infty,l},(\mathcal{W})^{G_{F_{\infty,l}}})^\frown \to 0.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

Ainsi, une fois tensorisée par $\mathbb{Q}_p$, la suite exacte (25) devient la suite exacte

$$\begin{aligned}0 &\to \prod_{l\in S} H^2(\mathbb{Q}_l, V^*(1))^* \to H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1))^* \to H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, V)/L(V)\\ &\to \left(\prod_{l\in S-\{p\}} H^1_f(\mathbb{Q}_l, V)\times H^1(\mathbb{Q}_p, V)\right)\Big/ L(V)\\ &\to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, V^*(1))^* \to (\mathbb{Q}_p\otimes K_p)^* \to 0\end{aligned}$$

avec $L(V) = \mathbb{Q}_p \otimes L(T)$. On rappelle d'autre part que la suite suivante est exacte

$$\begin{aligned}0 &\to \prod_{l\in S} H^2(\mathbb{Q}_l, \mathcal{W})\widehat{\ } \to H^2(G_{S,\mathbb{Q}}, \mathcal{W})\widehat{\ } \to H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, T)/L(T)\\ &\to \left(\prod_{l\in S-\{p\}} H^1_f(\mathbb{Q}_l, T)\times H^1(\mathbb{Q}_p, T)\right)\Big/ L(T)\\ &\to H^1(G_{S,\mathbb{Q}}, \mathcal{W})\widehat{\ } \to \hat{K}_p \to 0.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $H^1_f(\mathbb{Q}, V)$ et $H^1_f(\mathbb{Q}, V^*(1))$ sont nuls, et donc que $H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)^{G_\infty}$, $H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)_{G_\infty}$ et K_p sont finis, et que $L(T)$ est d'indice fini dans $H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, T)$ et en posant

$$\tau = \sharp H^0(\mathbb{Q}, V/T), \qquad \tau^* = \sharp H^0(\mathbb{Q}, \mathcal{W})$$

et $\tau_p^* = \sharp H^0(\mathbb{Q}_p, \mathcal{W}) = \sharp H^2(\mathbb{Q}_p, T)$, on montre alors comme dans [PR95, p. 107] l'égalité

$$\frac{\sharp H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)^{G_\infty}}{[H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, T)\colon L(T)]}\,\frac{\sharp K_p}{\sharp H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)_{G_\infty}}\prod_{l\in S-\{p\}} \mathrm{Tam}_l(T)\frac{\sharp\Delta(T)\tau_p^*}{\tau^*} = 1.$$

On remarque ensuite que l'on a la suite exacte

$$\begin{aligned}0 &\to (V/T)^{G_\mathbb{Q}} \to H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, T) \to H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T)\\ &\to (H^1_f(\mathbb{Q}, \mathcal{W})/K_p)\widehat{\ } \to 0.\end{aligned}$$

Comme $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathcal{W})$ est fini, il est aussi égal à $\text{Ш}(T^*(1))$. D'où

$$\begin{aligned}&\frac{\sharp H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)_{G_\infty}}{\sharp H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)^{G_\infty}}\\ &\quad= \frac{\sharp\Delta(T)\tau_p^*\prod_{l\neq p}\mathrm{Tam}_l(T)}{\tau^*}\,\frac{[H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T)\colon H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, T)/\mathrm{tor}\, s]}{[H^1_{f,\{p\}}(\mathbb{Q}, T)\colon L(T)]}\sharp\text{Ш}(T^*(1)),\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

(pour $l \notin S$, $\mathrm{Tam}_l(T)$ est égal à 1). D'autre part, soit $x \in H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)$ tel que $\mathcal{C} = H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)/\Lambda x$ soit de torsion et de série caractéristique H_x première à $\gamma - 1$. On a alors le diagramme commutatif dont les lignes et colonnes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[d] & \Delta(T) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p\pi_0(x) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_\infty(\mathbb{Q}, T)_{G_\infty} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_{G_\infty} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_p\pi_0(x) \arrow[r] \arrow[d] & L(T) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

et $\mathcal{C}^{G_\infty}$ est nul. D'où,

$$\mathbf{1}(F_x) = \sharp\mathcal{C}_{G_\infty} = \sharp\Delta(T)[L(T) \colon \mathbb{Z}_p\pi_0(x)] \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}(F_x)^{-1}\mathbf{1}(F(H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)) \\
&\quad \sim \frac{\tau_p^* \prod_{l \neq p} \mathrm{Tam}_l(T)}{\tau^*\tau}[H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T) \colon \mathbb{Z}_p\pi_0(x)]\sharp\text{Ш}(T^*(1)).
\end{aligned} \tag{26}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) \wedge (1 - \varphi)n \\
&\quad = (1 - \alpha_p^{-2})(1 - \beta_p^{-2})\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) \wedge n \\
&\quad = \left(1 - \frac{1}{p}\right)(1 - \alpha_p^{-2})(1 - \beta_p^{-2})\lambda_g(x) \wedge n \\
&\quad\quad \sim L_p(V, 0)^{-1}[H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T) \colon \mathbb{Z}_p\pi_0(x)]\lambda_g(x') \wedge n,
\end{aligned}$$

avec x' un générateur de $H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T)$. D'où en utilisant le lemme 2.4.3

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) \wedge (1 - \varphi)n \\
&\quad \sim L_p(V, 0)^{-1}[H^1_{/f}(\mathbb{Q}_p, T) \colon \mathbb{Z}_p\pi_0(x)]\frac{\mathrm{Tam}_{p,\omega_{tg}}(T)}{\tau_p^*}\omega \wedge (1 - p^{-1}\varphi^{-1})n.
\end{aligned}$$

En mettant avec (26), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}(F_x)^{-1}\mathbf{1}(F(H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)))\mathbf{1}(\mathcal{L}_0(x)) \wedge (1 - \varphi)n \\
&\quad \sim \frac{\prod_l \mathrm{Tam}_{l,\omega_{tg}}(T)}{\tau\tau^*}\sharp\text{Ш}(T^*(1))\omega \wedge (1 - p^{-1}\varphi^{-1})n.
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

D'où la proposition, en utilisant le fait que

$$(1-\varphi)(\Omega_{p,\omega})(n) = \Omega_{p,\omega}((1-p^{-1}\varphi^{-1})n)$$

et que si $L(n) = g \wedge n$,

$$(1-p^{-1}\varphi^{-1})(L)(n) = L((1-\varphi)n).$$

2.4.5. Dans ce paragraphe, on suppose V *ordinaire en* p. On pose $\mathcal{W} = V^*(1)/T^*(1)$ pour simplifier les notations.

Soit $H^1_f(F_{n,v}, \mathcal{W})$ l'image de $H^1_f(F_{n,v}, V^*(1))$ dans $H^1(F_{n,v}, \mathcal{W})$; le groupe de Selmer $H^1_f(F_n, \mathcal{W})$ est l'ensemble des $x \in H^1(F_n, \mathcal{W})$ tels que l'image de x dans $H^1(F_{n,v}, \mathcal{W})$ appartienne à $H^1_f(F_{n,v}, \mathcal{W})$ pour toute place v. Soit $H^1_f(F_\infty, \mathcal{W})$ le groupe de Selmer de $\mathcal{W}$ sur F_∞, limite inductive des $H^1_f(F_n, \mathcal{W})$. Il s'agit du groupe de Selmer strict de [Gr94]. Soit $X_{f,\infty}(\mathbb{Q}, T) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(H^1_f(F_\infty, \mathcal{W}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ le dual de Pontryagin de $H^1_f(F_\infty, \mathcal{W})$. Soit $F(X_{f,\infty}(\mathbb{Q}, T))$ une série caractéristique de ce module. Choisissons une base n_T^{sc} de det D^{sc} telle que si f est un isomorphisme de $\det(\mathrm{Fil}^1_p V)$ avec $\mathbb{Q}_p(1)$ vérifiant $f(\det \mathrm{Fil}^1_p T) = \mathbb{Z}_p(1)$, l'image dans $\mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$ de n_T^{sc} par l'application induite par f soit une base du $\mathbb{Z}_p$-module engendré par $1 \in \mathbf{D}_p(\mathbb{Q}_p(1))$.

2.4.6. PROPOSITION. *Le module* $X_{f,\infty}(\mathbb{Q}, T)_+$ *est de torsion si et seulement si* $\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T) \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \mathbb{I}_{\mathrm{arith}}(T)(n_T^{\mathrm{sc}})$ *est non nul et* $\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T)$ *est l'idéal de* $\mathbb{Z}_p[[G_\infty^+]]$ *engendré par*

$$(\gamma - 1)F(X_{f,\infty}(\mathbb{Q}, T)_+).$$

Remarquons que $(\gamma-1)F(X_{f,\infty}(\mathbb{Q}, T)_+)$ est (à une unité près) la série définie par Greenberg (notée f_A dans [Gr94]).

DÉMONSTRATION. Le calcul fait dans [PR95, Sect. 2.4.7] est encore valable à condition de remarquer que $\delta_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Fil}^1_p V)$ implique que

$$\begin{aligned}
&\prod_{j>-h} l_{-j}^{-\dim \mathrm{Fil}^j D_{\mathrm{sc}}} \wedge^2 \Omega^{\varepsilon}_{V,h}(n_T^{\mathrm{sc}})\Lambda \\
&\quad = \det\nolimits_\Lambda Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p T) \otimes (\det\nolimits_\Lambda Z^2_\infty(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p T))^{-1} \\
&\quad = \det\nolimits_\Lambda Z^1_\infty(\mathbb{Q}_p, \mathrm{Fil}^1_p T) \otimes (\det\nolimits_\Lambda \mathbb{Z}_p)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ici, $\dim \mathrm{Fil}^{-2} D_{\mathrm{sc}} = 2$, $\dim \mathrm{Fil}^{-1} D_{\mathrm{sc}} = 1$, $\dim \mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{sc}} = 0$. □

Ainsi, $\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T)$ s'annule en $\mathbf{1}$, ce qui est compatible avec la conséquence de la conjecture principale pour $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}$ avec $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}} = \mathbf{L}^{p}_{\{p\}}(n_T^{\mathrm{sc}})$ ou encore $\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}\mathbf{e} = \mathcal{L}_V(c_p^{\mathrm{spéc}}) \wedge n_T^{\mathrm{sc}}$. Cette conjecture principale affirme que

$$\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T) = (\mathbf{L}^{p,\mathrm{sc}}_{\{p\}}).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press

On peut alors montrer l'analogue de la Proposition 2.4.2 pour $\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T)$ (Greenberg [Gr94], voir aussi la thèse de M. Flach). Le calcul que nous faisons est aussi valable dans le cas supersingulier. Nous ne faisons donc pas d'hypothèse d'ordinarité dans la proposition qui suit.

On définit $\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega,T}$ par $\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega,T}\mathbf{e} = \omega \wedge n^{\mathrm{sc}}_T$.

2.4.7. PROPOSITION. *Supposons $H^1_f(\mathbb{Q}, V) = 0$. Le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbf{1}(\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T))$ a un zéro simple en $\mathbf{1}$ si et seulement si $\ell_p(V) \neq 0$. Si $I_{\mathrm{sc}}(T)$ est un générateur de $\mathbb{I}_{\mathrm{sc}}(T)$ et ω une base de $\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$, on a*

$$\partial.I_{\mathrm{sc}}(T) \sim \ell_p(V)\left(1-\frac{\beta_p}{\alpha_p}\right)(1-\alpha_p^{-2})\prod_l \mathrm{Tam}_{l,\omega_{tg}}(T)\frac{\sharp\mathrm{III}(T^*(1))}{\sharp(V/T)^{G_{\mathbb{Q}}}\sharp\mathcal{W}^{G_{\mathbb{Q}}}}\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega,T},$$

pour ω_{tg} base de $t_V = \mathbf{D}_p(V)/\mathrm{Fil}^0\,\mathbf{D}_p(V)$ telle que $\omega_{tg} \wedge \omega = \mathbf{e}$.

DÉMONSTRATION. Deux types de démonstration sont possibles dans le cas ordinaire. La première, qui est celle de Greenberg (et qui a été généralisée par M. Flach dans sa thèse), utilise la définition en termes de $X_{\infty,f}(T)$ et calcule le cardinal de $X_{\infty,f}(T)_{G_\infty}$ en terme de celui de $\mathrm{III}(T^*(1))$. On utilise alors la suite exacte de Poitou–Tate modifiée. La seconde démonstration utilise la formule

$$I_{\mathrm{sc}}(T)\mathbf{e} = F_x^{-1}F(H^2_\infty(\mathbb{Q}, T))\mathcal{L}_0(x) \wedge n^{\mathrm{sc}}_T$$

et les calculs faits précédemment. Son mérite est de s'appliquer aussi au cas supersingulier. Faisons-la. Tous les calculs nécessaires ont déjà été faits et la proposition se déduit simplement des formules

$$\partial.I_{\mathrm{sc}}(T)\mathbf{e} \sim \mathbf{1}(F_x)^{-1}\mathbf{1}(F(H^2_\infty(\mathbb{Q}, T)))\partial.(\mathcal{L}_0(x) \wedge n^{\mathrm{sc}}_T),$$

$$\partial.(\mathcal{L}_0(x) \wedge n^{\mathrm{sc}}_T) = \ell_p(V)(1-\alpha_p^{-2})\left(1-\frac{\alpha_p}{\beta_p}\right)^{-1}\tilde{\lambda}_{g,\mathbf{e}}(x)\Omega^{\mathrm{sc}}_{p,\omega}\mathbf{e},$$

de l'équation (26) et de la proposition 2.4.3. □

2.4.8. COROLLAIRE. *Supposons $H^1_f(\mathbb{Q}, V) = 0$. Alors, si $\ell_p(V)$ est non nul, le module $X_{f,\infty}(\mathbb{Q}, T)_+^{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})}$ est un module de torsion.*

DÉMONSTRATION. Si $\ell_p(V)$ est non nul, alors la composante de $I_{\mathrm{sc}}(T)$ dans $\Lambda^{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})}$ est non nulle. On déduit alors de la proposition 2.4.6 que $X_{f,\infty}(\mathbb{Q}, T)_+^{\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})}$ est de torsion. □

Références

[CS87] Coates, J. et Schmidt, K.: Iwasawa theory for the symmetric square of an elliptic curve, *J. Reine Angew. Math*. 375 (1987), 104–156.

[Co] Colmez, P.: *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local*, LMENS-96-18 (disponible par www.dmi.ens.fr/dmi/preprints/Index.lmens.96.html), *Ann. of Math*.

[FG78] Ferrero, B. et Greenberg, R.: On the behavior of p-adic L functions at $s = 0$, *Invent. Math.* 50 (1978), 91–102.

[F-PR94] Fontaine, J.-M. et Perrin-Riou, B.: *Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, dans *Motives* (Seattle) Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 55, part 1 (1994), pp. 599–706.

[Fl92] Flach, M.: A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve, *Invent. Math*. 109 (1992) 307–327.

[Gr94] Greenberg, R.: Trivial zeros of p-adic L-functions, dans *p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton–Dyer conjecture* (B. Mazur et Glenn Stevens, eds), *Contemporary Math*. 165 (1994), pp. 149–181.

[GS93] Greenberg, R. et Stevens, G.: p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, *Invent. Math*. 111 (1993), 407–447.

[Gr-T?] Greenberg, R. et Tilouine, J.: en préparation.

[Ka-Ku-Ts?] Kato, K., Kurihara, M. et Tsuji, T.: travail en préparation.

[MTT86] Mazur, B., Tate, J. et Teitelbaum, J.: On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer, *Invent. Math*. 84 (1986), 1–48.

[PR90] Perrin-Riou, B.: Représentations p-adiques, périodes et fonctions L p-adiques, dans *Séminaire de théorie des nombres* 1987–1988, édité par C. Goldstein, Birkhaüser Boston (1990), Vol. 81, pp. 213–258.

[PR94] Perrin-Riou, B.: Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, *Invent. Math*. 115 (1994), 81–149.

[PR94b] Perrin-Riou, B.: La fonction de Kubota–Leopoldt, *Contemp. Math*. 174 (1994), 65–93.

[PR94c] Perrin-Riou, B.: Représentations p-adiques ordinaires, exposé IV, *Astérisque* 223 (1994), 185–207.

[PR95] Perrin-Riou, B.: *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, *Astérisque* 229, (1995).

[PR95b] Perrin-Riou, B.: *Fonctions L p-adiques*, dans Proc. Int. Congress Math., Zürich (1994), pp. 400–410, Birkhäuser, Verlag (1995).

[PR96] Perrin-Riou, B.: *Systèmes d'Euler et représentations p-adiques*, Prépublications d'Orsay 96-04 (1996), disponible par www.math.u-psud.fr/pub/96/abs/ppo96_04.html.

[So92] Solomon, D.: On a construction of p-units in abelian fields, *Invent. Math*. 109 (1992), 329–350.

https://doi.org/10.1023/A:1000455700320 Published online by Cambridge University Press