

ZUR VERALLGEMEINERUNG DER NEPERSCHEN REGEL IN r -DIMENSIONALEN RIEMANNSCHEN RÄUMEN KONSTANTER KRÜMMUNG

J. BÖHM

*Herrn Professor Dr. H. S. M. Coxeter
zum 60. Geburtstage gewidmet*

1. Einleitung. Bei der geometrischen Interpretation von gewissen Aufgaben z.B. aus dem Bereiche der Statistik einerseits oder der Matrizenalgebra andererseits treten Simplexe in RIEMANNSCHEN RÄUMEN konstanter Krümmung auf. Ein spezieller Typus eines solchen Simplexes ist das Orthoschem. Für dieses ergibt sich da nun die Aufgabe, anzugeben, in welcher Weise die Masse der Kanten und der verschiedensten Winkel eines Orthoschems miteinander zusammenhängen. Bereits NAPIER (7) hat für das sphärische rechtwinklige Dreieck diesbezügliche Aussagen gemacht. Für den r -dimensionalen elliptischen Raum hat dann SCHLÄFLI (10) weitgehende Untersuchungen durchgeführt. Vorher hatten auch schon LOBATSCHEFSKI und ENGEL (6) analoge Betrachtungen für das hyperbolische rechtwinklige Dreieck angestellt. Jedoch die erste leicht lesbare Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Elementen eines r -dimensionalen elliptischen oder hyperbolischen Orthoschems ist von COXETER (4) gegeben worden. Dabei wird eine auf BENNETT zurückgehende dimensionsvermindernde quadratische Abbildung als Hilfsmittel benutzt, die die Orthoschemwinkel verdoppelt.

Es soll hier nicht die Aufgabe sein, dieses letztgenannte Verfahren noch einmal zu beschreiben, sondern wir wollen von der betreffenden Geometrie her nochmals zu den Ergebnissen vorstossen und somit diese vor allem geometrisch deuten. In gewissem Grade hat dies bereits SCHLÄFLI für den sphärischen Fall getan. Darum bleibt uns also für den r -dimensionalen elliptischen Fall im wesentlichen nur ein Vergleich von SCHLÄFLIS und COXETERS Resultaten. Für den hyperbolischen Fall liegen die Ergebnisse von LOBATSCHEFSKI-ENGEL in der Ebene vor, die den Aussagen von NAPIER und den für die Dimension Zwei spezialisierten von COXETER gegenübergestellt werden können. Der allgemeine r -dimensionale hyperbolische Fall dagegen wird nur bei COXETER, und zwar als analytische Fortsetzung des elliptischen Falles behandelt. Das ist vom analytischen Standpunkt sehr günstig, weil sich alle Formeln für ein festes Orthoschem im wesentlichen unverändert übertragen lassen; dafür wird aber doch die eigentliche Geometrie etwas in den Hintergrund gedrängt. Man muss hierbei etwa ganz aus der rein-imaginären hyperbolischen Geometrie in eine komplexe MINKOWSKISCHE Geometrie heraustreten, wenn man die hyperbolische Ortho-

schemkette betrachten möchte. Um dieses zu vermeiden, wollen wir hier einen geometrischen Zugang auch zu den hyperbolischen Sachverhalten suchen, so dass sowohl der analytische Übergang zur rein-imaginären Geometrie als auch die nicht-hyperbolische Orthoschemkette für ein hyperbolisches Orthoschem umgangen wird. Wir bleiben dagegen in der betreffenden Geometrie und nehmen nur eine eventuelle Dimensionserhöhung für einen Einbettungsraum in Kauf. Dieser geometrische Zugang zu dem r -dimensionalen hyperbolischen Fall wird somit unser Hauptanliegen sein.

Der hier in Rede stehende Sachverhalt in einem RIEMANNschen Raume konstanter nichtverschwindender Krümmung kann bereits im wesentlichen für die normierte Krümmung $K = \pm 1$ untersucht werden, wie wir es hier auch tun werden. Im euklidischen Falle $K = 0$ kann ein Orthoschem entweder als punktförmig entartetes elliptisches Orthoschem oder als geeignetes Auffangorthoschem eines hyperbolischen asymptotischen Orthoschems bezüglich des Fernpunktes aufgefasst werden, so dass es ausreicht, jeweils nur die elliptischen und die hyperbolischen r -dimensionalen Fälle zu untersuchen.

Zum besseren Verständnis wollen wir jeweils zuerst den ebenen Fall durchdenken. Beginnen wir zunächst mit dem elliptischen und lassen dann den hyperbolischen Fall folgen. Es soll versucht werden, durch eine Reihe von Abbildungen unsere Ausführungen weiter zu veranschaulichen. Winkel, die in den Abbildungen zusätzlich mit einem Punkt bezeichnet sind, sollen rechte Winkel darstellen. Fettgedruckte Zahlen in runden Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

2. Die Nipersche Regel für das elliptische rechtwinklige Dreieck.

Vorgelegt in der elliptischen Ebene sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten bzw. Winkeln a, b, c, α, β , die wir bezeichnen wollen durch

$$(2.1) \quad w_0 = \alpha, \quad w_1 = \frac{1}{2}\pi - a, \quad w_2 = c, \quad w_3 = \frac{1}{2}\pi - b, \quad w_4 = \beta.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$(2.2) \quad w_h' = \frac{1}{2}\pi - w_h.$$

Diese Dreieckselemente seien wie in Abb. 1 angeordnet. Durch die fünf Elemente

$$(2.3) \quad w_h \quad (h = 0, 1, 2, 3, 4)$$

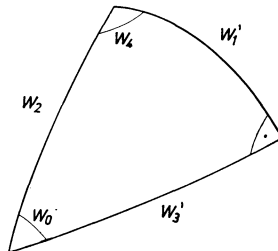


ABB. 1

wird das gegebene rechtwinklige Dreieck bestimmt; zwischen diesen Elementen bestehen aber noch gewisse Bindungen. Bei unseren Untersuchungen wollen wir uns auf

$$(2.4) \quad 0 < w_h < \frac{1}{2}\pi$$

beschränken. Es sei jedoch angemerkt, dass die Ergebnisse im elliptischen Falle auch unmittelbar auf rechtwinklige Dreiecke mit $0 \leq w_h \leq \pi$ übertragen werden können.

Nach NAPIER (7) gilt zum Beispiel für die Elemente die Bindung

$$(2.5) \quad \cos w_h = \cot w_{h-2} \cdot \cot w_{h+2}.$$

Der Index ist hier immer modulo fünf zu betrachten, was wir im folgenden stets durch den Zusatz

$$(\text{mod } 5)$$

zum Ausdruck bringen werden. Gleichung (2.5) lässt sich durch den Ansatz

$$(2.6) \quad \text{tg}^2 w_h = t_h$$

rational machen zu der hier grundlegenden Beziehung

$$(2.7) \quad t_h = t_{h-2} \cdot t_{h+2} - 1 \quad (\text{mod } 5) \quad (h = 0, 1, 2, 3, 4)$$

(GAUSS'sche Grundrelation).

Andererseits folgt wegen der Umkehrbarkeit der Schlüsse aus dem Erfülltsein der GAUSS'schen Grundrelation für die t_h die Existenz eines rechtwinkligen elliptischen Dreiecks mit den fünf Elementen $w_h, w_h = \text{arctg}(t_h)^{\frac{1}{2}}$ und $0 < w_h < \frac{1}{2}\pi, h = 0, 1, 2, 3, 4$.

Für spätere Untersuchungen benötigen wir noch eine weitere Aussage über die Bindung zwischen den Dreieckselementen, die sich jedoch sofort aus der GAUSS'schen Grundrelation ableiten lässt: Setzen wir in (2.7) gemäss der GAUSS'schen Grundrelation

$$(2.8) \quad t_{h-2} = t_{h+1} t_h - 1 \quad \text{und} \quad t_{h+2} = t_{h-1} t_h - 1$$

ein und beachten $t_h \neq 0$, dann folgt

$$t_h = \frac{1 + t_{h-1} + t_{h+1}}{t_{h-1} \cdot t_{h+1}}$$

oder

$$(2.9) \quad \frac{1}{1 + t_h} = \frac{t_{h-1}}{1 + t_{h-1}} \cdot \frac{t_{h+1}}{1 + t_{h+1}}.$$

Das bedeutet andererseits wegen (2.6) nach dem Ziehen der Quadratwurzel

$$(2.10) \quad \cos w_h = \sin w_{h-1} \cdot \sin w_{h+1} \quad (\text{mod } 5).$$

Diese auch mit dem Namen von NAPIER verknüpfte Beziehung lässt sich durch eine Indextransformation folgendermassen umformen.

Setzen wir

$$(2.11) \quad w_h = \tilde{w}_{2h-2},$$

dann erhalten wir

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_0 = w_1 = \frac{1}{2}\pi - a, & \quad \tilde{w}_1 = w_4 = \beta, & \quad \tilde{w}_2 = w_2 = c, \\ \tilde{w}_3 = w_0 = \alpha, & \quad \tilde{w}_4 = w_3 = \frac{1}{2}\pi - b \end{aligned}$$

und demnach aus (2.10) mit

$$(2.13) \quad 2h - 2 = k,$$

$$(2.14) \quad \cos \tilde{w}_k = \sin \tilde{w}_{k-2} \cdot \sin \tilde{w}_{k+2}$$

oder vermittelt Rationalmachen durch

$$(2.15) \quad \sin^2 \tilde{w}_k = -\tilde{l}_k$$

wieder die Beziehung

$$(2.16) \quad \tilde{l}_k = \tilde{l}_{k-2} \cdot \tilde{l}_{k+2} - 1 \pmod{5}.$$

Es ist bemerkenswert, dass sich nach geeigneter Umordnung der Reihenfolge der Dreieckselemente w_h auch für diese zweite NAPIERSche Beziehung bei entsprechender Deutung der t_k wiederum die GAUSS'sche Grundrelation ergibt. Dieses Ergebnis werden wir noch nutzen.

Doch kehren wir wieder zur Beziehung (2.7) zurück. Indem wir diese als eine analytische Aussage über die Dreieckselemente ansehen, können wir daraus eine geometrische Folgerung, gleichsam eine geometrische Interpretation der GAUSS'schen Grundrelation ableiten.

Die fünf Elemente w_h ($h = 0, 1, 2, 3, 4$) unseres rechtwinkligen Dreiecks in der angegebenen Reihenfolge und gelegentlicher Komplementbildung fassen wir zusammen durch das Symbol

$$(2.17) \quad \{w_0\} = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

Wir wissen, dass durch diese fünf Elemente ein rechtwinkliges elliptisches Dreieck bestimmt wird, wenn sie der GAUSS'schen Grundrelation genügen. Da aber dabei die Indizes modulo 5 zu betrachten sind, ergeben auch jeweils die fünf Elemente

$$(2.18) \quad \{w_h\} = \{w_h, w_{h+1}, w_{h+2}, w_{h+3}, w_{h+4}\}$$

für $h = 1, 2, 3$ oder 4 rechtwinklige elliptische Dreiecke, die sich wie in Abb. 2 zusammenfügen lassen. Dabei werden immer benachbarte Dreiecke mit den Elementen $\{w_h\}$ bzw. $\{w_{h+1}\}$ gemäss Abb. 3 angeordnet. Das heisst, die beiden Dreiecksecken, die die Scheitel des in beiden Dreiecken gleichzeitig vorkommenden Winkels w_h darstellen, fallen so zusammen, dass die beiden Winkel w_h als Scheitelwinkel erscheinen und jeweils die Hypotenuse des einen und die entsprechende Kathete des anderen Dreiecks auf einer Geraden liegen und sich

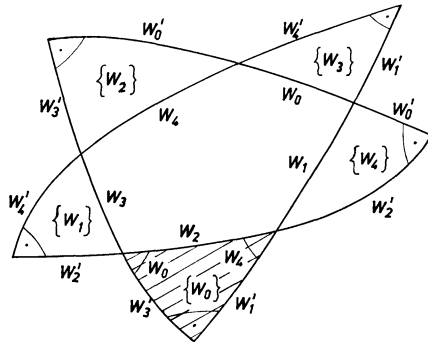


ABB. 2

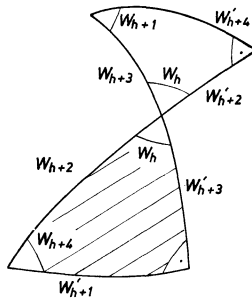


ABB. 3

zu einer Strecke von der Länge $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen (vgl. Abb. 3). Solche Dreiecke in einer derartigen Lage wollen wir Nachbardreiecke nennen. Folglich kann man andererseits auch sagen, dass ein Nachbardreieck durch Verlängerung um das Komplement der in einer Dreiecksecke zusammenstossenden Hypotenuse und Kathete über diese Ecke hinaus konstruiert werden kann.

Wir wollen uns noch überlegen, dass die so gezeichnete Kette von fünf Dreiecken, die jeweils als Nachbardreiecke konstruiert wurden, sich tatsächlich—wie in Abb. 2—nicht nur schliesst, sondern sogar das fünfte und das erste Dreieck dieser Kette, $\{w_0\}$ und $\{w_4\}$, ebenfalls Nachbardreiecke sind. Nehmen wir also im Sinne eines indirekten Beweises an, dass die Dreiecke $\{w_4\}$ und $\{w_0\}$ nicht Nachbardreiecke sind, oder, was dasselbe ist, dass $\{w_5\}$ nicht mit $\{w_0\}$ zusammenfällt. Wegen der Nachbarkonstruktion ergeben sich jedoch Pol-Polare-Beziehungen zwischen gewissen Dreieckseckpunkten und Dreiecksseiten, so dass sich da sofort ein Widerspruch ergibt. Dieser Gedanke lässt sich etwa in Abb. 4 verfolgen. Der Pol der Geraden g ist einerseits A , andererseits E , also $A = E$. Weiterhin ist sowohl s als auch \bar{s} Polare zu S .

Merken wir noch zum Schluss dieser Betrachtungen an, dass sich bereits GAUSS (5) mit dieser Figur (Abb. 2) beschäftigt hat. Er gab ihr den Namen Pentagramma Mirifikum. Da das innere Fünfeck in Abb. 2 mit den Seiten w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 übrigens zu sich selbst dual ist, wie auch aus der Pol-Polare-

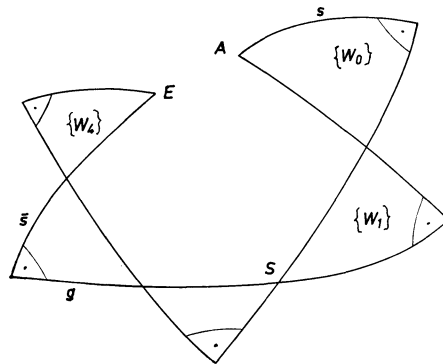


ABB. 4

Beziehung folgt, lässt sich dieses innere Fünfeck bei Kenntnis von zwei Seiten sofort konstruieren. Die rechtwinkligen Dreiecke lassen sich dann durch Verlängerung entsprechender Fünfeckseiten finden, das heisst mit anderen Worten, dass die Selbstdualität dieses inneren Fünfecks eine andere mögliche Definition der Pentagrammafigur ist. Daraus lässt sich dann die Konstruktion der Nachbardreiecke ableiten.

Die GAUSS'sche Grundrelation, die etwa der Beziehung (2.5) entspricht, zusammen mit der Pentagrammafigur als ihre geometrische Deutung wollen wir jetzt als die NEPERSche (oder NAPIERSche) Regel für das elliptische rechtwinklige Dreieck bezeichnen. Unser Anliegen ist es, diese NEPERSche Regel in zweierlei Hinsicht zu verallgemeinern.

3. Verallgemeinerung der Neperschen Regel für r -dimensionale elliptische Orthoscheme. Bereits SCHLÄFLI (10) hat sich erfolgreich mit der Verallgemeinerung der hier beschriebenen NEPERSchen Regel für r -dimensionale sphärische Räume beschäftigt. Auf Grund einer bemerkenswerten Idee von BENNETT hat COXETER (4) die SCHLÄFLISchen Gedanken wiederaufgegriffen und zunächst für den elliptischen Fall eine Verallgemeinerung der NEPERSchen Regel behandelt. Wir wollen hier von der r -dimensionalen elliptischen Geometrie her die Ergebnisse betrachten. Als Modell des elliptischen Raumes können wir uns etwa die r -dimensionale Oberfläche der Einheitshalbkugel eines euklidischen Raumes der Dimension $n = r + 1$ vorstellen.

Als erstes ist der Begriff des rechtwinkligen Dreiecks zu verallgemeinern. Im r -dimensionalen RIEMANNschen Raume konstanter Krümmung, also auch im r -dimensionalen elliptischen Raume, entspricht einem rechtwinkligen Dreieck ein sogenanntes Orthoschem. Dieses kann man etwa folgendermassen aufbauen: Man zeichne die Strecke (alles in der betreffenden Geometrie) $\overline{1, 2}$. Senkrecht dazu wird im Punkte 2 eine zweite Strecke $\overline{2, 3}$ angetragen. Dadurch ist zunächst ein rechtwinkliges Dreieck in der betreffenden ebenen Geometrie gewonnen. Falls nun die Dimension unseres Raumes $r > 2$ beträgt, trage man senkrecht zu der Ebene des Dreiecks $\overline{1, 2, 3}$ im Punkte 3 eine weitere Strecke $\overline{3, 4}$ an, usw., bis schliesslich noch senkrecht zu dem Raume, der durch das

Simplex mit den Eckpunkten $1, 2, \dots, r$ bestimmt ist, die Kante $\overline{r, r+1}$ im Punkte r angefügt wird. Diese $r+1 = n$ Punkte $1, 2, \dots, n$ definieren ein Simplex mit speziellen Eigenschaften, insbesondere mit einer Reihe von rechten Winkeln, das wir nach SCHLÄFLI ein (r -dimensionales) "Orthoschem"

$$S^{(n)} = (1, 2, \dots, n)$$

nennen wollen. Die Eckpunkte 1 und n nennen wir die Hauptecken des Orthoschems. Die Elemente von $S^{(n)}$ sind die Kanten und die (Keil-)Winkel s -ter Ordnung ($0 \leq s \leq n-2$) zwischen Unterorthoschemen (Wänden) der Dimension s , die übrigens auch wieder Orthoscheme sind. Die Kanten können demzufolge als Winkel nullter Ordnung angesehen werden. Die Winkel $(n-2)$ -ter Ordnung sind die (eigentlichen und) wesentlichen Keilwinkel. Infolge der Rechtwinkelkonstruktion sind bereits bei einem allgemeinen Orthoschem eine grosse Anzahl dieser Elemente gleich $\frac{1}{2}\pi$.

Betrachten wir jetzt ein allgemeines r -Orthoschem, das heisst ein r -dimensionales Orthoschem, im elliptischen Raume ($r = n-1$). Wir können die Elemente, denen die gleiche Masszahl für ihre Grösse zuzuordnen ist und die verschieden von $\frac{1}{2}\pi$ sind, jeweils zu einer Klasse zusammenfassen. Auch hier wollen wir wieder nur solche Orthoscheme betrachten, deren Elemente $\leq \frac{1}{2}\pi$ sind. Da es $\binom{n+2}{4}$ solcher Klassen gibt (vgl. z.B. COXETER (4) oder BÖHM (2)), liegt es nahe, die betreffenden Masszahlen für die Klassen und damit auch gleichzeitig die Orthoschem-Elemente durch vier Indizes (COXETERSche Vierzeigersymbole) aus der Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, \dots, n+1$ zu bezeichnen in der Art und mit der Eigenschaft

$$(3.1) \quad [r, s, t, u] = \begin{cases} \Pi_1[r, s, t, u] & \text{für } \Pi_1 \text{ gerade Permutation,} \\ \frac{1}{2}\pi - \Pi_2[r, s, t, u] & \text{für } \Pi_2 \text{ ungerade Permutation.} \end{cases}$$

Es lässt sich auch zeigen, dass das Element von der kleinsten Ordnung innerhalb einer Elementeklasse immer ein Winkel nullter, erster oder zweiter Ordnung ist. Demzufolge reicht es zur Beschreibung der Orthoschemelemente aus, diese Elemente von einer Ordnung kleiner als drei durch Vierzeigersymbole zu charakterisieren. Dieses ist für die Kante, das rechtwinklige Dreieck und das dreidimensionale Orthoschem aus Abb. 5 zu entnehmen. Dort wird für die Eckpunkte vorausgesetzt $k_1 < k_2 < k_3 < k_4$. Die Keilwinkel höherer Ordnung sind darum nach dem eben Gesagten damit gleichzeitig mit Vierzeigersymbolen versehen.

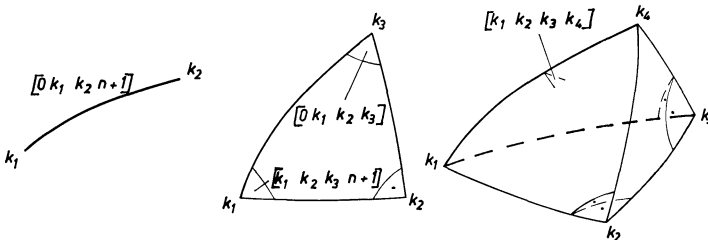


ABB. 5

Die (eigentlichen) Unterorthoscheme der Dimension zwei eines r -dimensionalen Orthoschems sind demzufolge Dreiecke mit den Orthoschem-Eckpunkten k_1, k_2, k_3 ($k_1 < k_2 < k_3$). Indem wir Hyperkugeln (Auffangkugeln) mit geeignetem Radius um eine Hauptecke eines Orthoschems schlagen, erhalten wir als Durchschnitt zwischen dem Orthoschem und der Hyperkugeloberfläche wieder ein (Unter-)Orthoschem (Auffangorthoschem) der Dimension $r - 1$. Für dieses können wir denselben Vorgang wiederholen und so weitere niederdimensionale Auffangorthoscheme erzeugen. Die Vierzeigersymbole der fünf Elemente solcher Unterorthoscheme der einen oder anderen hier beschriebenen Art ergeben sich immer als die Kombinationen zur vierten Ordnung aus fünf geeigneten natürlichen Zahlen

$$k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 \quad (0 \leq k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq n + 1).$$

Demzufolge können wir ein solches zweidimensionales Unterorthoschem (rechtwinkliges Dreieck) auch durch das Fünfzeigersymbol $[k_0, k_1, k_2, k_3, k_4]$ beschreiben (vgl. etwa für ein eigentliches solches Unterorthoschem Abb. 6).

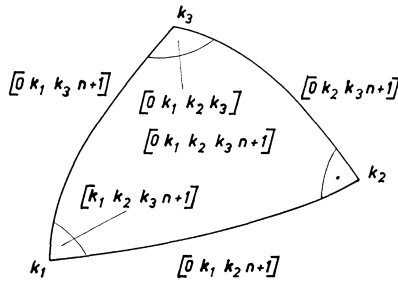


ABB. 6

Für eine Pentagramma-Figur zu einem Orthoschem $S^{(3)}$ (Fünferkette) lässt sich jetzt sofort übersehen, wie die Bezeichnung der einzelnen Pentagramma-Dreiecke durch Vierzeigersymbole zu erfolgen hat. Insbesondere erkennen wir, dass die Elemente des Nachbardreiecks zu $S^{(3)} = (1, 2, 3)$, das an die Hauptecke 1 anstößt, durch Vierzeigersymbole beschrieben werden, die aus den entsprechenden von $S^{(3)}$ hervorgehen, indem wir auf jeden Zeiger die Permutation

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} 01234 \\ 12340 \end{pmatrix} = (01234)$$

anwenden (vgl. Abb. 7).

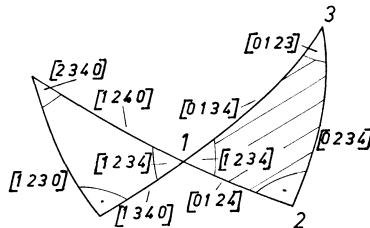


ABB. 7

Die Verallgemeinerung der Pentagramma-Figur für r -dimensionale elliptische Orthoschemen geschieht über die Nachbarorthoschem-Bildung. Man erhält das Nachbarorthoschem von $S^{(n)} = (1, 2, \dots, n)$, indem man die Kanten, die in die Ecke 1 einmünden, über diese Ecke hinaus um ihr Komplement verlängert und aus deren Endpunkten und der Hauptecke 1 ein neues Orthoschem gewinnt. Die Elemente dieses Nachbarorthoschems gehen, wie man sich sofort überlegen kann, aus den entsprechenden Elementen des Ausgangsorthoschems hervor, indem auf die Zeiger ihrer Vierzeigersymbole die Permutation

$$(3.3) \quad \begin{pmatrix} 01 \dots n & n+1 \\ 12 \dots n+1 & 0 \end{pmatrix} = (01 \dots n+1)$$

angewendet wird. Durch weitere Nachbar-Bildung erhält man diesmal eine Kette von $n+2$ Orthoschemen, die sich auch im r -dimensionalen elliptischen Falle schliesst. Das heisst, das Nachbarorthoschem des $(n+2)$ -ten Orthoschems dieser Kette ist wieder das Ausgangsorthoschem. Bereits SCHLÄFLI (10) und dann COXETER (4) haben festgestellt, dass das $(n+3)$ -te Nachbarorthoschem mit dem Ausgangsorthoschem kongruent ist; speziell für den dreidimensionalen Fall erzielte WYTHOFF (11) ein solches Ergebnis. Man muss sich noch überlegen, dass ausser der Kongruenz dieser beiden Orthoschemen die Orthoschem-Kette sich in dem obigen Sinne schliesst. Aber das folgt wiederum sofort aus der Pol-Polare-Beziehung zwischen den Hauptecken der Orthoschemen dieser Kette und gewissen Orthoschemwänden auf Grund der Nachbarkonstruktion.

Nachdem dieser geometrische Aspekt erledigt ist, wollen wir noch den analytischen untersuchen. Wir fragen also jetzt nach dem analytischen Zusammenhang zwischen den Elementen eines Orthoschems $S^{(n)}$. Aus unseren früheren Betrachtungen wissen wir nun bereits, dass jeweils fünf geeignete Elemente ein rechtwinkliges elliptisches Dreieck bilden, für die folglich die GAUSS'sche Grundrelation (2.7) gilt. Unser Orthoschem hat nach den Regeln der Kombinatorik insgesamt $\binom{n+2}{5} = s$ solche Dreiecke. Da jedes Dreieck auf Grund unserer Voraussetzungen fünf Elemente besitzt, die verschieden von $\frac{1}{2}\pi$ sind, gibt es demnach hier insgesamt $N = 5 \cdot \binom{n+2}{5}$ derartige Orthoschem-Elemente. $(n-2)$ von diesen Elementen ist allerdings das gleiche Vierzeigersymbol zugeordnet, wie auch schnell kombinatorische Betrachtungen ergeben. Eine Orthoschemkante $[0 \ k_1 \ k_2 \ n+1]$ z.B. wird dann demnach in $n-2$ (hier eigentlichen) Dreiecken auftreten, wie man auch geometrisch unmittelbar sieht. Bei geeigneter Durchnummerierung dieser $N = 5 \cdot s$ Elemente ergibt sich als Verallgemeinerung der GAUSS'schen Grundrelation die Beziehung

$$(3.4) \quad t_k = t_{k-2s} \cdot t_{k+2s} - 1 \pmod{5s}.$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass diese $5s$ Elemente in s Zyklen zu je fünf Elementen zerfallen. Würde man andererseits versuchen, durch einen Ansatz

$$(3.5) \quad t_k = t_{k-j} \cdot t_{k+j} - 1 \pmod{N}$$

die Orthoschemelemente in Zusammenhang zu bringen, so würde sich im wesentlichen wieder die oben angegebene verallgemeinerte GAUSS'sche Grundrelation (3.4) ergeben. Daraus ersehen wir, dass sich die GAUSS'sche Grundrelation auf zweidimensionale Unterorthoscheme (eigentliche und Auffangorthoscheme) und nur auf diese fortpflanzt; vgl. auch **(1)**.

Fassen wir zusammen: Die NEPERSche Regel lässt sich für r -dimensionale Orthoscheme erweitern zur verallgemeinerten GAUSS'schen Grundrelation (3.4) und der sich schliessenden $(n + 2)$ -er Kette von Nachbarorthoschemen.

Zum Abschluss sei noch bemerkt, dass es infolge einer Idee von COXETER **(4)** möglich ist, auch schnell einen formelmässigen Zusammenhang zwischen Orthoschem-Elementen anzugeben, die nicht zu ein und demselben zweidimensionalen Unterorthoschem gehören, der zwar mit Hilfe von (3.4) erfolgt, aber grosse Umrechnungen von (3.4) überspringt. Infolge der COXETER-BENNETT'schen Überlegungen hat man Veranlassung, die Grössen t_k als Doppelverhältnisse aufzufassen. Abstrahiert man dann wieder von dieser Bedeutung, bleibt schliesslich lediglich nur noch der Ansatz

$$(3.6) \quad t_k = \text{tg}^2[r, s, t, u] \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{(r, u)(s, t)}{(r, s)(t, u)} \quad (r < s < t < u)$$

mit den COXETER'schen Zweizeiger-Symbolen

$$(3.7) \quad (x_1, x_2) = f(x_1, x_2) = -(x_2, x_1),$$

die für nichtentartete Orthoscheme verschieden von Null sind. Die Antisymmetrie in (3.7) folgt aus (3.10). Die verallgemeinerte GAUSS'sche Grundrelation für das Dreieck

$$[r, s, t, u, v] \quad (0 \leq r < s < t < u < v \leq n + 1)$$

lautet dann, durch Zweizeiger-Symbole ausgedrückt,

$$(3.8) \quad \frac{(r, u)(s, t)}{(r, s)(t, u)} = \frac{(t, r)(u, v)}{(t, u)(v, r)} \cdot \frac{(u, s)(v, r)}{(u, v)(r, s)} - 1.$$

Eine Umformung ergibt

$$(3.9) \quad (r, s)(t, u) - (t, r)(u, s) + (r, u)(s, t) = 0$$

bzw.

$$(3.10) \quad f(x_1, x_2)f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)f(x_2, x_3) = 0.$$

Die Beziehung $f(x_1, x_2) = -f(x_2, x_1)$ in (3.7) ist keine Einschränkung, da nach PREŠIĆ **(8)** die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung (3.10) lautet

$$(3.11) \quad f(x_1, x_2) = g(x_1) \cdot h(x_2) - g(x_2) \cdot h(x_1)$$

mit beliebigen Funktionen $g(t)$ und $h(t)$. Ausserdem können wir sofort folgern

$$(3.12) \quad f(x_1, x_1) = 0.$$

Fordern wir noch als Anfangsbedingung

$$(3.13) \quad f(x_1, x_1 + 1) = 1,$$

dann lässt sich ein Zusammenhang zwischen jedem beliebigen $f(r, s) = (r, s)$ mit $0 \leq r < s \leq n + 1$ (r und s natürlich) und den Zweizeiger-Symbolen

$$(3.14) \quad (q, q + 2), \quad q = 0, 1, \dots, n - 1,$$

herleiten in der Gestalt

$$(3.15) \quad (r, s) = \begin{vmatrix} (r, r + 2) & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & (r + 1, r + 3) & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (s - 3, s - 1) & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & (s - 2, s) & \cdot \end{vmatrix}.$$

Diese $(q, q + 2)$ charakterisieren aber im wesentlichen die Keilwinkel $(n - 2)$ -ter Ordnung unseres Orthoschems $S^{(n)}$ infolge der Relation

$$(3.16) \quad \cos^{-2}[q - 1, q, q + 1, q + 2] = (q - 1, q + 1)(q, q + 2).$$

Somit lässt sich offensichtlich jedes Orthoschem-Element etwa durch die Keilwinkel $(n - 2)$ -ter Ordnung ausdrücken, die als eine Basis für sämtliche Orthoschem-Elemente aufgefasst werden und darum folglich zur Beschreibung eines Orthoschems dienen können.

4. Übertragung der Neperschen Regel auf den hyperbolischen Fall.

Im elliptischen Falle haben wir gesehen, dass auch für ein Orthoschem $S^{(n)}$ mit $n > 3$ immer wieder die Kenntnisse für die $S^{(3)}$ nicht nur herangezogen werden müssen, sondern sogar stets eine wesentliche Rolle spielen. Da im Hyperbolischen ähnliche Verhältnisse herrschen, wollen wir auch bei der Untersuchung des hyperbolischen Falles zunächst die Dimension $r = 2$ ausführlich untersuchen.

Wählen wir als Modell der hyperbolischen Ebene die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $\sqrt{-1}$, dann lassen sich zwar die Formeln für die Elemente eines elliptischen Dreiecks in entsprechender Weise übertragen, aber dabei muss man auf anschauliche geometrische Deutung verzichten. Zum anderen lässt sich die Pentagramma-Figur auf diese Weise nicht ins Hyperbolische fortpflanzen, da eine entsprechende Übertragung dieser Figur zu einer echten komplexen Geometrie führen würde. Folglich wollen wir zunächst den Weg einschlagen, den LOBATSCHESKI und ENGEL gewählt haben. Diese betten die hyperbolische Ebene in einem hyperbolischen dreidimensionalen Raume ein. Durch Ergänzen des vorgelegten rechtwinkligen Dreiecks in der hyperbolischen Ebene zu einem asymptotischen Orthoschem im dreidimensionalen hyper-

bolischen Raume gelingt es, auf einer geeigneten Auffangkugel ein dem hyperbolischen Dreieck zugeordnetes elliptisches rechtwinkliges Dreieck auf folgende Art und Weise zu konstruieren.

Zunächst beachten wir den Zusammenhang zwischen Parallelwinkel w_h und Parallellot v_h mittels der Funktionen

$$(4.1) \quad w_h = \Pi(v_h), \quad v_h = \Delta(w_h)$$

sowie

$$(4.2) \quad w_h' = \frac{1}{2}\pi - w_h, \quad v_h' = \Delta(w_h').$$

Speziell gilt z.B.

$$(4.3) \quad \sin w_h = \cosh v_h.$$

Betrachten wir das asymptotische hyperbolische Orthoschem $A^{(4)} = (1234)$ mit der Hauptecke 4 als Fernpunkt und dem vorgelegten rechtwinkligen hyperbolischen Dreieck 1, 2, 3 als Grundfläche (vgl. Abb. 8), dann liegt auf

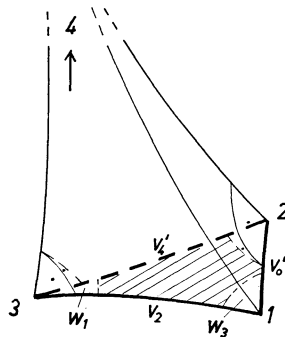


ABB. 8

einer geeigneten Auffangkugel um die Ecke 1 als Durchschnitt zwischen dieser Kugel und dem asymptotischen Orthoschem ein elliptisches rechtwinkliges Dreieck (vgl. Abb. 9). Beschreiben wir das hyperbolische Dreieck (vgl. Abb. 8)

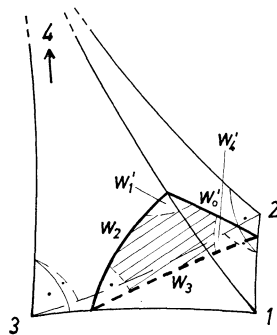


ABB. 9

entweder durch Winkel (evtl. Parallelwinkel)

$$(4.4) \quad w_0 = \frac{1}{2}\pi - \Pi(a), \quad w_1 = \alpha, \quad w_2 = \Pi(c), \quad w_3 = \beta, \quad w_4 = \frac{1}{2}\pi - \Pi(b)$$

oder durch Kanten (evtl. Parallellote)

$$(4.5) \quad \begin{aligned} v_0 &= \Delta(\frac{1}{2}\pi - \Pi(a)), & v_1 &= \Delta(\alpha), & v_2 &= c, \\ v_3 &= \Delta(\beta), & v_4 &= \Delta(\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)), \end{aligned}$$

dann ergibt sich zunächst auf Grund unserer Konstruktion als zugeordnetes elliptisches rechtwinkliges Dreieck ein solches mit den Elementen (vgl. Abb. 9)

$$(4.6) \quad \{w'_1, w'_3, w'_0, w'_2, w'_4\}$$

gemäss Schreibweise (2.17). Die Reihenfolge dieser Dreieckselemente hinsichtlich ihrer Indizierung stimmt im wesentlichen überein mit der von w_h in (2.12); für letztere gilt nämlich auf Grund der Anordnung der Dreieckselemente nach (2.17)

$$(4.7) \quad \{\tilde{w}_3 = \alpha, \tilde{w}_0 = a', \tilde{w}_2 = c, \tilde{w}_4 = b', \tilde{w}_1 = \beta\}.$$

Für eine solche Anordnung (2.12) der Dreieckselemente gilt dann (2.14). Übertragen wir dieses auf (4.6), dann ergibt sich

$$(4.8) \quad \cos w'_h = \sin w'_{h-2} \cdot \sin w'_{h+2} \pmod{5}$$

oder

$$(4.9) \quad \sin w_h = \cos w_{h-2} \cdot \cos w_{h+2} \pmod{5}.$$

Beim Übergang zu den Parallelloten ergibt sich

$$(4.10) \quad \cosh^{-1}v_h = \operatorname{tgh} v_{h-2} \cdot \operatorname{tgh} v_{h+2} \pmod{5},$$

oder mit

$$(4.11) \quad \operatorname{tgh}^2 v_h = -t_h$$

gilt die Beziehung

$$(4.12) \quad t_h = t_{h-2} \cdot t_{h+2} - 1 \pmod{5},$$

also die GAUSS'sche Grundrelation (2.7). Diese hätte sich nach einiger Rechnung auch ergeben beim Übergang von der elliptischen Kugeloberfläche zur Kugeloberfläche mit Radius $\sqrt{-1}$ durch analytische Fortsetzung der Ergebnisse im elliptischen Falle, allerdings bei sorgfältiger Unterscheidung zwischen den reellen Winkeln und den rein imaginären Kanten und nach Ersetzen der Winkel durch ihre Parallellote und entsprechend anderer Numerierung der Elemente.

Diese Zuordnung zwischen hyperbolischem und elliptischem rechtwinkligen Dreieck ist eineindeutig, wie man sich schnell überlegen kann. Wir können aber auch noch eine andere und weitaus günstigere Zuordnung finden, indem wir dem hyperbolischen rechtwinkligen Dreieck nicht gleich das hier beschriebene elliptische Auffangdreieck zuordnen, sondern dieses als Nachbardreieck von dem zuzuordnenden auffassen (vgl. Abb. 10). Dann erhalten wir eine eineindeutige Zuordnung zwischen dem elliptischen Dreieck

$$\{w'_3, w'_0, w'_2, w'_4, w'_1\}$$

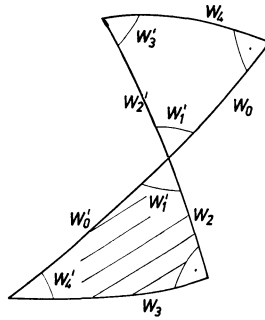


ABB. 10

(vgl. Abb. 10) und dem elementweise zuzuordnenden hyperbolischen Dreieck $\{w_1, v_0, v_2, v_4, w_3\}$ (vgl. Abb. 8), so dass, nachdem w_h durch $w'_{3h+1} \pmod 5$ ersetzt wurde, die Zuordnung die Gestalt bekommt (vgl. Abb. 11)

$$(4.13) \quad \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\} \leftrightarrow \{w'_4, v'_1, v'_2, v'_3, w'_0\}.$$

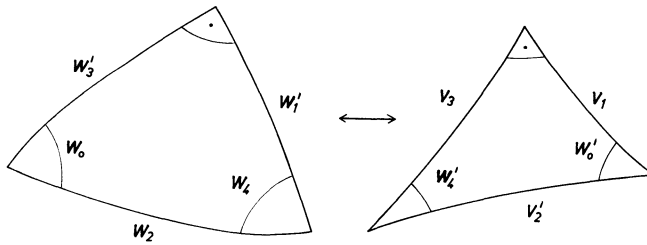


ABB. 11

Nachdem diese Zuordnung erkannt wurde, lässt sich den fünf elliptischen Dreiecken einer Pentagramma-Kette eine hyperbolische Pentagramma-Kette zuordnen (vgl. Abb. 12). Es lässt sich zeigen, dass sich die Figur schliesst,

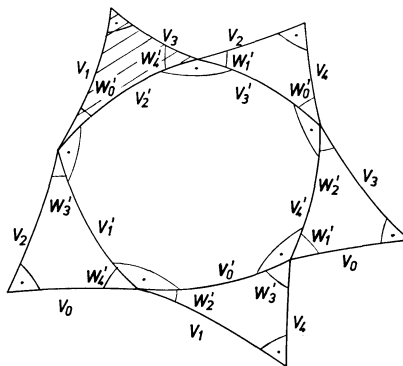


ABB. 12

wenn man zwischen den Hypotenusen zweier benachbarter Dreiecke einen rechten Winkel wählt (vgl. etwa ROESER (9)). Demzufolge können wir hier auch einem hyperbolischen rechtwinkligen Dreieck Vierzeigersymbole zuordnen wie in Abb. 13 gezeigt. Sieht man von der Funktion $\Delta(w)$ bei den Seiten ab und

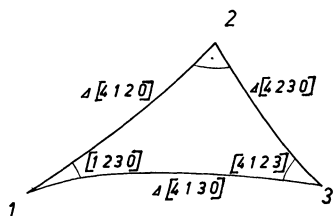


ABB. 13

betrachtet nur ihr Argument w , so ergibt sich zum elliptischen das zugeordnete hyperbolische Dreieck, indem auf die Indizes der Vierzeigersymbole der Elemente des elliptischen Dreiecks die Permutation

$$(4.14) \quad \begin{pmatrix} 04 \\ 40 \end{pmatrix} = (04)$$

angewendet wird. In der hyperbolischen Pentagramma-Kette erhält man dann das Nachbarorthoschem—wieder abgesehen von der Δ -Funktion—durch Anwenden der Permutation

$$(4.15) \quad \begin{pmatrix} 04 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 01234 \\ 12340 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 04 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 01234 \\ 42301 \end{pmatrix} = (12304).$$

Das bedeutet zunächst einen Übergang vom hyperbolischen zum elliptischen Dreieck, dann Nachbarbildung im elliptischen Bereich und darauf wieder Zurückgehen auf den hyperbolischen Fall. Dieses kann also als eine anschauliche Interpretation der bereits von COXETER (4) angegebenen Ergebnisse aufgefasst werden.

Wenden wir uns nun dem hyperbolischen r -dimensionalen Orthoschem $S^{(n)}$ ($n - 1 = r \geq 2$) zu.

Auch dieses hyperbolische Orthoschem $S^{(n)} = (1, 2, \dots, n)$ lässt sich in einem n -dimensionalen hyperbolischen Raume einbetten, wo es als Basis eines n -dimensionalen asymptotischen hyperbolischen Orthoschems $A^{(n+1)}$ mit dem Fernpunkt $n + 1$ aufgefasst werden kann. Wir erhalten wieder ein zugehöriges elliptisches Orthoschem der Dimension $n - 1$, wenn wir den Durchschnitt zwischen $A^{(n+1)}$ und der Oberfläche einer (geeigneten) Hyperkugel um die Hauptecke 1 bilden. Analog unserem Vorgehen im ebenen Falle ist es wieder günstig, zu diesem elliptischen Orthoschem das Nachbarorthoschem zu suchen und dieses dem vorgelegten hyperbolischen Orthoschem (eindeutig) zuzuordnen. Für das zugeordnete elliptische Orthoschem lässt sich wiederum die Kette von $n + 2$ elliptischen Orthoschemen bilden und zu jedem Orthoschem

dieser Kette finden wir das zugeordnete hyperbolische. Fügen wir diese hyperbolischen Orthoscheme wieder aneinander, so ergibt sich die entsprechende hyperbolische $(n + 2)$ -er Kette als Verallgemeinerung der Pentagramma-Figur.

Da Unterorthoscheme auf Auffangkugeln um eine Hauptecke wieder (elliptische) Orthoscheme sind (vgl. (2)), ist der hier in Rede stehende Durchschnitt auch ein elliptisches Orthoschem. Überlegen wir uns jetzt, wie dessen Elemente zu bezeichnen sind. Auf Grund der Ergebnisse im ebenen Falle liegt es nahe, die Elemente eines hyperbolischen $S^{(n)}$ wie in Abb. 14 zu bezeichnen

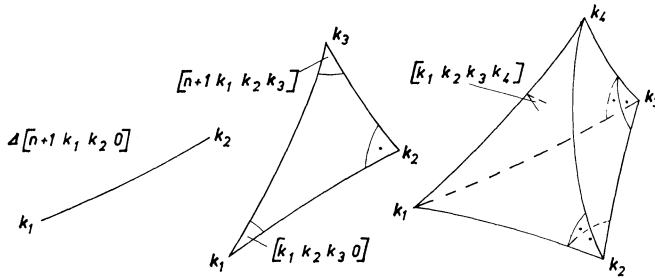


ABB. 14

$(k_1 < k_2 < k_3 < k_4)$. Den Fernpunkt des asymptotischen $A^{(n+1)}$ erhalten wir, indem wir im Punkte n die Senkrechte zu $S^{(n)}$ zeichnen. Deren Fernpunkt ist der hier gesuchte Fernpunkt $n + 1$ von $A^{(n+1)}$. Die Hauptecken von $A^{(n+1)}$ sind die Eckpunkte 1 und $n + 1$. Die Eckpunkte des Auffangorthoschems bezüglich der Hauptecke 1 werden mit \bar{k} bezeichnet, wobei \bar{k} auf der Kante zwischen den Eckpunkten 1 und k liegt. Seine Kanten sind zu bezeichnen mit

$$(4.16) \quad \begin{array}{ll} [n + 1, 1, k, 0] & \text{für } 2 \leq k \leq n \text{ bzw.} \\ [1, k_1, k_2, 0] & \text{für } 2 \leq k_1 < k_2 \leq n, \end{array}$$

je nachdem, ob die Kante vom Punkte $\overline{n + 1}$ ausgeht oder diesen Punkt nicht enthält (vgl. Abb. 15).

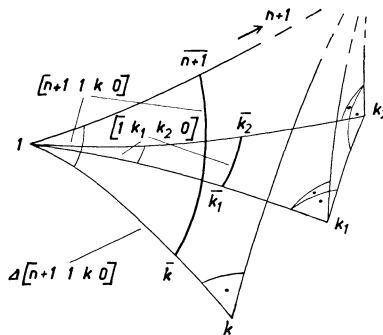


ABB. 15

Betrachten wir nun auch noch die Elemente höherer Ordnung des Auffangorthoschems $(\bar{2}, \bar{3}, \dots, \overline{n+1})$, dann können wir auch dafür wie für die Kanten leicht feststellen, dass sich sämtliche aus denen von $S^{(n)}$ ergeben (evtl. noch Parallelwinkelbildung), indem wir die Permutation

$$(4.17) \quad \begin{pmatrix} 012 \dots n & n+1 \\ 023 \dots n+1 & 1 \end{pmatrix} = (12 \dots n, n+1)$$

auf die Indizes der Vierzeigersymbole von $S^{(n)}$ anwenden. Durch Nachbarbildung im Elliptischen vermittels der Permutation

$$(4.18) \quad (01 \dots n+1)^{-1}$$

ergibt sich die Permutation

$$(4.19) \quad (12 \dots n, n+1) \cdot (n+1 \dots 10) = (0 \ n+1) = \begin{pmatrix} 0 & n+1 \\ n+1 & 0 \end{pmatrix},$$

die den Zusammenhang zwischen den Vierzeigersymbolen zweier einander zugeordneter Orthoscheme vermittelt, wo das erste ein elliptisches und das andere ein hyperbolisches ist. Damit ist ein eineindeutiger Zusammenhang zwischen diesen Orthoschemen gefunden. Die Orthoschem-Kettenbildung im Hyperbolischen erfolgt dann wieder durch Übergang vom Hyperbolischen zum Elliptischen, Nachbarbildung im Elliptischen und wieder Übergang zum Hyperbolischen vermittels der Permutation

$$(4.20) \quad (0, n+1)(012 \dots n+1)(0, n+1) = (0, n+1, 1, 2, \dots, n-1, n) \\ = \begin{pmatrix} 0 & 12 \dots n & n+1 \\ n+1 & 23 \dots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die auf die Indizes der Vierzeigersymbole anzuwenden ist. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass sich die GAUSS'sche Grundrelation auf die Elemente von $S^{(n)}$ auch im Hyperbolischen in der gleichen Weise wie im Elliptischen fortpflanzt.

Somit können wir also auch im hyperbolischen Falle eine Verallgemeinerung der NEPERSchen Regel erkennen. Unser Vorgehen haben wir derart gewählt, dass ohne Schwierigkeit ein Zusammenhang mit der COXETER-BENNETTSchen Darstellung **(4)** erkannt werden kann mit dem Unterschied, dass im hyperbolischen Falle hier eine echte Nachbarbildung im Reellen gewährleistet ist, während bei COXETER dafür eine komplexe Geometrie herangezogen werden muss. Das heisst also, das dortige Ergebnis lässt sich für eine reelle hyperbolische Nachbarbildung nicht aus dem Elliptischen übertragen. Das erkennen wir auch daran, dass im elliptischen Falle die Summen der Inhalte zweier Nachbarorthoscheme sich gegenüber dem Inhalt der einzelnen Orthoscheme in gewisser Weise vereinfachen. Im hyperbolischen Fall dagegen lässt sich die SCHLÄFLISCHE Differentialformel, die das Volumendifferential von $S^{(n)}$ in Abhängigkeiten der (wesentlichen) Keilwinkeldifferentiale angibt, auf Grund der anderen Struktur der Nachbarorthoscheme nicht wie im elliptischen Falle zusammenfassen. Sieht man allerdings von der Nachbarbildung ab und unter-

sucht etwa nur den Inhalt eines einzigen hyperbolischen $S^{(n)}$, dann darf man ohne weiteres über eine analytische Fortsetzung ins rein Imaginäre (vgl. etwa COOLIDGE (3)) sogar die Bezeichnung durch Vier- und Zweizeigersymbole der Orthoschem-Elemente beibehalten. Alle Formeln werden bis auf einen Faktor $\sqrt{-1}$ vom Elliptischen ins Hyperbolische übertragen. Will man jedoch von dieser Beschreibung eines hyperbolischen Orthoschems absehen und eine hyperbolische Orthoschemkette (anstelle einer nicht rein imaginären Kette) erhalten, so findet man etwa auf die hier angegebene Art einen Zugang.

Betrachten wir zum Schluss noch einige Spezialfälle von zwei- bzw. dreidimensionalen hyperbolischen Orthoschemen, deren reelle Kette und die zugeordnete elliptische Kette. Beginnen wir mit der Kette für $S^{(3)}$. Von Interesse ist die hyperbolische Pentagrammfigur (h) für ein einfach- bzw. doppelt-asymptotisches Dreieck und die dazu gehörige elliptische Kette (e) (Abb. 16

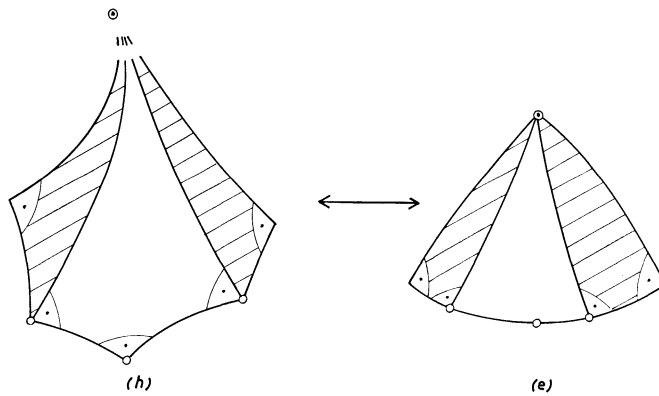


ABB. 16

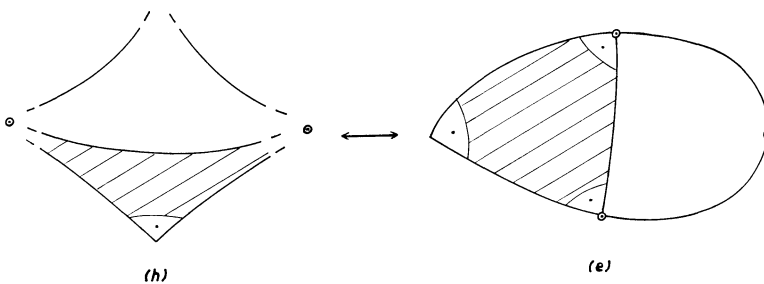


ABB. 17

bzw. Abb. 17). Die hyperbolische Orthoschemkette eines einfach- bzw. doppelt-asymptotischen Orthoschems $S^{(4)}$ mit der zugehörigen elliptischen Kette ist in den Abbildungen 18 bzw. 19 gezeichnet. Wir sehen, der übernächste Nachbar (über die geeignete Ecke hinaus) eines einfach asymptotischen Orthoschems ist

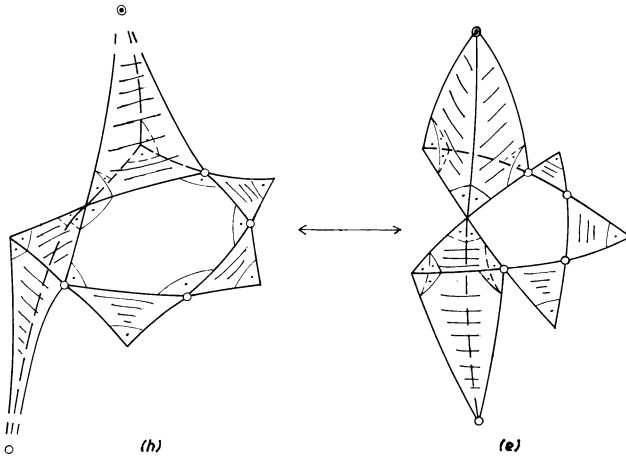


ABB 18

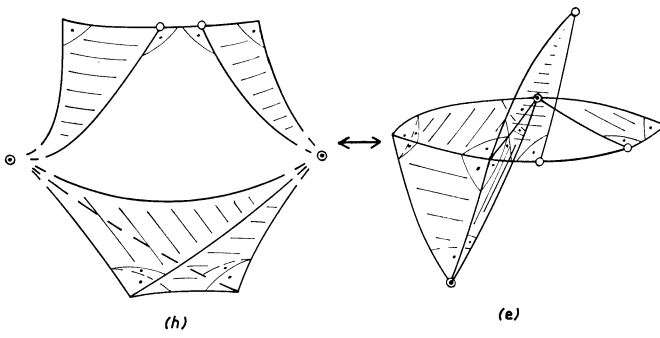


ABB. 19

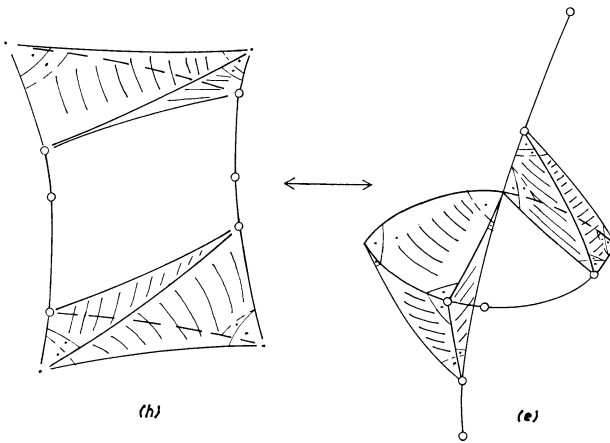


ABB. 20

wiederum ein einfach asymptotisches. Die zugehörige elliptische Kette ist orthogonal entartet. Betrachten wir die Kette für ein hyperbolisches $S^{(4)}$, bei dem alle vier Eckpunkte Fernpunkte sind, dann ergibt sich als zugehörige elliptische Kette eine solche mit stark orthogonalen elliptischen Orthoschemen (vgl. Abb. 20). Die orthogonal entarteten elliptischen Fälle (vgl. auch die Abbildungen in **(1)**) haben folglich im Hyperbolischen ihr Analogon in den asymptotischen Orthoschemen. Auch die Orthoscheme der betreffenden Kette entarten in diesen Fällen. Die GAUSS'sche Grundrelation behält aber ihre Gültigkeit.

LITERATUR

1. J. Böhm, *Über Spezialfälle bei der Inhaltsmessung in Räumen konstanter Krümmung*, Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, Math.-Nat. Reihe, 5 (1955/56), 157–164.
2. ——— *Simplexinhalt in Räumen konstanter Krümmung beliebiger Dimension*, J. Reine Angew. Math., 202 (1959), 16–51.
3. J. L. Coolidge, *The elements of non-Euclidean geometry* (Oxford, 1909).
4. H. S. M. Coxeter, *On Schläfli's generalisation of Napier's Pentagramma Mirificum*, Bull. Calcutta Math. Soc., 28 (1936), 125–144.
5. C. F. Gauss, *Werke*, 3 (Göttingen, 1876), S. 481.
6. N. J. Lobatschewski, *Zwei geometrische Abhandlungen. Kasaner Bote 1829 und 1830*, Übersetzung mit Anmerkungen von F. Engel (Leipzig 1899), S. 227 u. 326.
7. J. Napier, *Mirifici logarithmorum canonicis descriptio* (Edinburg, 1914), Buch 2, Kap. 4.
8. S. Prešić und D. S. Mitrinovic, *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur*, Publ. Elektrotechnik-Fak. Univ. Belgrad, Ser. Math.-Phys., No. 70 (1962).
9. E. Roeser, *Die nichteuklidischen Geometrien und ihre Beziehungen untereinander* (München, 1957).
10. L. Schläfli, *Gesammelte math. Abh. 1, Theorie der vielfachen Kontinuität; aus dem Jahre 1852* (Basel, 1950), S. 227ff.
11. W. A. Wythoff, *The rule of Neper in the four dimensional space*, K. Akad. Amsterdam, Proc. Sect. Sci., 9 (1907), 529–534.

*Friedrich-Schiller-Universität,
69 Jena, Deutsche Demokratische Republik*