Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2001) **44**, 295–315 ©

SUR LA STABILITÉ POUR L'ÉQUATION MONODIMENSIONNELLE D'UN GAZ VISQUEUX ET CALORIFÈRE AVEC LA FRONTIÈRE VARIABLE

RACHID BENABIDALLAH

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via Buonarroti n.2, 56127 Pisa, Italy (rachid@mail.dm.unipi.it)

(Received 14 October 1999)

Abstract We consider the equation of a one-dimensional viscous heat-conducting compressible gas in the variable domain with the appropriate boundary conditions. We study the large-time behaviour of the solution in the particular case where the displacement of the variable boundary is given by $L(t) = L_0(1 + at)^\alpha$ with $0 < \alpha < 1$, where a is a positive constant and L_0 is the initial amplitude of our domain.

Keywords: viscous polytropic gas; stability; moving boundary

AMS 2000 *Mathematics subject classification:* Primary 35B40; 76N15

1. Introduction

Dans cet article on se propose d'établir le comportement asymptotique de la solution pour l'équation monodimensionnelle d'un gaz visqueux et calorifère. Le domaine occupé par le gaz que nous considérons est borné par une frontière rigide d'une part et par une frontière variable de l'autre part.

On considére un gaz visqueux et calorifère et on désigne par ϱ, T et v la densité, la température et la vitesse respectivement. Si on suppose que la chaleur spécifique c_{v}, le coefficient de viscisité μ et de conductibilité calorifique χ constants alors le système d'équations régissant le mouvement du gaz est donné par

$$\begin{gathered}\varrho(\partial_t v + v\partial_x v) = \partial_x(\mu\partial_x v - R\varrho T),\\ \partial_t\varrho + \partial_x(\varrho v) = 0,\\ c_{\mathrm{v}}\varrho(\partial_t T + v\partial_x T) = \chi\partial_x^2 T + (\mu\partial_x v - R\varrho T)\partial_x v,\end{gathered}$$

où R est la constante universelle des gaz qui (voir, par exemple, [**3**]) satisfait à la condition

$$R < c_{\mathrm{v}}.$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

A l'instant initial $t = 0$, le gaz occupe un domaine borné, l'intervalle $]0, L_0[$ dans lequel sont supposées connues les données initiales

$$v|_{t=0} = v_0, \qquad \varrho|_{t=0} = \varrho_0, \qquad T|_{t=0} = T_0$$

et pour $t > 0$, le gaz occupe l'intervalle $]0, L(t)[$ aux limites duquel sont verifiées les conditions suivantes

$$v|_{x=0} = 0, \qquad v|_{x=L(t)} = L'(t) = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t},$$
$$\partial_x T|_{x=0} = 0, \qquad \partial_x T|_{x=L(t)} = 0.$$

Pour étudier le comportement asymptotique de la solution, il nous convient de transformer notre système d'équations en une expression relative à une coordonnée lagrangienne. Nous utilisons celle de masse, qui, désignée par m, est reliée à la coordonnée eulerienne x, par les relations

$$\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}x,$$
$$x(m,t) = x(m,0) + \int_0^t \tilde{v}(m,s)\,\mathrm{d}s, \qquad \tilde{v}(m,t) = v(x(m,t),t).$$

Pour simplifier la notation, nous noterons sans risque de confusion, (v, ϱ, T) au lieu de $(\tilde{v}, \tilde{\varrho}, \tilde{T})$. La masse totale étant finie, on peut, moyennant d'éventuels changements de variables évidents, choisir $[0, 1]$ comme intervalle de la variable m.

Cela étant, exprimées dans la coordonnée lagrangienne massique, les équations du gaz s'écrivent sous la forme

$$\partial_t v = \partial_m(\varrho(\mu\partial_m v - RT)), \tag{1.1}$$
$$\partial_t \varrho + \varrho^2 \partial_m v = 0, \tag{1.2}$$
$$c_{\mathrm{v}}\partial_t T = \chi\partial_m(\varrho\partial_m T) + \varrho(\mu\partial_m v - RT)\partial_m v, \tag{1.3}$$

avec les conditions aux limites et initiales

$$v|_{m=0} = 0, \qquad v|_{m=1} = L', \qquad \partial_m T|_{m=0} = \partial_m T|_{m=1} = 0, \tag{1.4}$$
$$v|_{t=0} = v_0, \qquad \varrho|_{t=0} = \varrho_0, \qquad T|_{t=0} = T_0. \tag{1.5}$$

Si on pose

$$v = u + \frac{x}{L}L', \qquad x(m,t) = \int_0^m \frac{1}{\varrho(r,t)}\,\mathrm{d}r, \tag{1.6}$$

le système (1.1)–(1.3) avec ses conditions aux limites et initiales (1.4)–(1.5) devient

$$\partial_t u = \partial_m(\varrho(\mu\partial_m u - R\varrho T)) - \frac{L'}{L}\partial_t x + x\left(\left(\frac{L'}{L}\right)^2 - \frac{L''}{L}\right), \tag{1.7}$$
$$\partial_t \varrho + \varrho^2 \partial_m u + \frac{L'}{L}\varrho = 0, \tag{1.8}$$
$$c_{\mathrm{v}}\partial_t T = \chi\partial_m(\varrho\partial_m T) + \varrho\left(\mu\partial_m u + \mu\frac{L'}{L\varrho} - RT\right)\left(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho}\right), \tag{1.9}$$

$$u|_{m=0} = u|_{m=1} = 0, \qquad \partial_m T|_{m=0} = \partial_m T|_{m=1} = 0, \tag{1.10}$$
$$u|_{t=0} = u_0, \qquad \varrho|_{t=0} = \varrho_0, \qquad T|_{t=0} = T_0. \tag{1.11}$$

En utilisant la relation évidente

$$u = \partial_t x - (x/L)L', \tag{1.12}$$

on peut réécrire le système (1.7)–(1.9) sous la forme suivante

$$\partial_t(Lu) = \partial_m(L\varrho(\mu\partial_m u - RT)) - L''x, \tag{1.1 bis}$$
$$\partial_t(L\varrho) + L\varrho^2\partial_m u = 0, \tag{1.2 bis}$$
$$c_{\mathrm{v}}\partial_t T = \chi\partial_m(\varrho\partial_m T) + \varrho\left(\mu\partial_m u + \mu\frac{L'}{L\varrho} - RT\right)\left(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho}\right). \tag{1.3 bis}$$

L'existence et l'unicité de la solution globale ont été démontrées par Kazhikhov [**1**] et, dans le cas où $\inf \varrho_0$ est éventuellement nul, par Yashima *et al*. [**9**] et par Yashima et Benabidallah [**7**, **8**]. Le comportement asymptotique de la solution de l'équation à symétrie sphérique dans une couronne bornée et de l'équation monodimensionnelle dans des domaines non bornés a été établi par Jiang [**4**, **5**]. Nous signalons en outre que dans [**6**] les auteurs ont considéré le système hyperbolique correspondant aux équations (1.1)–(1.3) avec la présence d'un terme source non linéaire dans l'équation d'énergie. Ils étudient le processus de compression du gaz à l'aide d'un piston horizontal en supposant que la vitesse de celui ci à l'extrémité $m = 0$ est donnée par $v(0,t) = at^{n_0}$ où $a > 0$ et n_0 est un nombre non nécessairement positif qui dépend des données du problème. Ils démontrent que pour certaines valeurs de n_0 la solution du système n'existe pas (au sens où l'énergie devient infinie) et pour d'autres valeurs la solution est une onde de chocs qui se meut loin du piston.

Dans le présent travail nous allons étudier le comportement asymptotique de la solution du système (1.7)–(1.11) qui diffère du système considéré dans [**6**] par son caractère parabolique dominant dans le cas particulier où le comportement de la frontière variable est du type

$$L(t) = L_0(1+at)^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.13}$$

où L_0 est l'amplitude initiale de notre domaine et a une constante positive. Le choix (1.13) de la frontière variable est motivé par l'étude faite dans [**10**] où les auteurs ont démontré que, dans le cas de la frontière libre caractérisée par l'absence de la composante normale du tenseur de contrainte à l'extrémité $m = L(t)$, l'amplitude L satisfait à l'encadrement

$$\underline{c}t^{\alpha} \leqslant L(t) < \bar{c}(1+t), \qquad \alpha = \frac{c_{\mathrm{v}}}{c_{\mathrm{v}} + R} - \varepsilon,$$

avec deux constantes positives $\underline{c}$ et $\bar{c}$.

Remarque 1.1. Le cas où la constante a figurant dans (1.13) est nulle, notre résultat (voir Théorème 1.2) nous fournit seulement des estimations globale en temps qu'on retrouve d'ailleurs dans le travail de Jiang [**4**]. Pour atteindre un résultat de stabilité

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

d'autres estimations sont nécessaires. Mais celles ci nous porterons dans le cas où la constante a est nulle à un résultat déjà établi par Jiang dans [**4**, **5**] où il démontre un comportement asymptotique exponentiel pour des conditions d'adhésion aux limites (vitesse nulle). Donc, pour obtenir notre résultat sur la stabilité dans un domaine en expansion, on considèrera la constante a strictement positive; c'est-à-dire le cas de la frontière variable.

Par la suite on supposera aussi l'existence de deux constantes positives $\overline{\varrho_0}$ et $\underline{\varrho_0}$ telles que

$$0 < \underline{\varrho_0} \leqslant \varrho_0(m) \leqslant \overline{\varrho_0} < \infty, \quad \forall m \in [0,1]. \tag{1.14}$$

Alors on a le résultat.

Théorème 1.2. *Si, outre l'hypothèse (1.14), on suppose que*

$$\partial_m \varrho_0 \in L^2(0,1), \qquad u_0 \in L^4(0,1), \qquad T_0 \in L^2(0,1),$$

alors on a

$$\frac{c_1}{L(t)} \leqslant \varrho(m,t) \leqslant \frac{c_2}{L(t)} \quad \forall m \in [0,1] \quad \forall t \geqslant 0, \tag{1.15}$$

$$\|\partial_m \varrho\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{c_3}{L^\beta(t)} \quad \forall t \geqslant 0, \quad \beta = 1 - \frac{R}{2c_{\mathrm{v}}} > 0, \tag{1.16}$$

$$\|u\|^2_{L^2(0,1)} + \|T\|_{L^1(0,1)} \leqslant \begin{cases} \dfrac{c_4}{L^{p(\alpha)-\varepsilon}} & \textit{pour } \dfrac{c_{\mathrm{v}}}{R + c_{\mathrm{v}}} \leqslant \alpha < 1, \\[2ex] \dfrac{c_4}{L^{R/c_{\mathrm{v}}}} & \textit{pour } 0 < \alpha \leqslant \dfrac{c_{\mathrm{v}}}{R + c_{\mathrm{v}}}, \end{cases} \tag{1.17}$$

où c_i $(i = 1, \dots, 4)$ sont des constantes positives ne dépendant que des données du problème et ε est un nombre positif suffisamment petit. Quant à

$$p(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha} > 0.$$

Démonstration. Elle résultera des Propositions 4.1, 4.2, 4.7 et 4.8 du § 4. □

Mais avant on commencera par dériver (voir (2.15)) une formule de représentation pour la densité qui nous sera utile pour démontrer les estimations (1.15) et (1.16).

2. Formule de représentation pour la densité

Dans cette section on dégagera une formule de représentation pour la densité.

En effet, on pose

$$\sigma(m,t) = \varrho(\mu \partial_m u - RT), \tag{2.1}$$

$$\varphi(m,t) = \int_0^t \sigma(m,s)\,\mathrm{d}s + \int_0^m u_0\,\mathrm{d}r - \int_0^t \frac{L''}{L} \int_0^m x(r,s)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{L'}{L} \int_0^m u\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s. \tag{2.2}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

En vertu de (1.1) bis et (2.1), on a

$$\partial_m\varphi = \int_0^t \frac{1}{L}\partial_s(Lu)\,\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{L'}{L}u\,\mathrm{d}s + u_0 = \int_0^t \partial_s u\,\mathrm{d}s + u_0;$$

c'est-à-dire

$$\partial_m\varphi = u. \tag{2.3}$$

D'autre part, on a

$$\partial_t\varphi = \varrho(\mu\partial_m u - RT) - \frac{L''}{L}\int_0^m x(r,t)\,\mathrm{d}r - \frac{L'}{L}\int_0^m u\,\mathrm{d}r. \tag{2.4}$$

Comme (voir (1.12)), on a

$$\begin{aligned}\frac{L''}{L}\int_0^m x(r,t)\,\mathrm{d}r &+ \frac{L'}{L}\int_0^m u\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^m \left(\frac{L'}{L}\partial_t x + x\left[\frac{L''}{L} - \left(\frac{L'}{L}\right)^2\right]\right)\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^m \frac{x}{L}L'\,\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{2.5}$$

compte tenu de (2.3), (2.5) et de la relation

$$\partial_t\left(\frac{1}{L\varrho}\right) = \frac{1}{L}\partial_m u, \tag{2.6}$$

conséquence immédiate de (1.8), il résulte de (2.4) que

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{1}{L\varrho}\varphi\right) &- \frac{1}{L}\partial_m(u\varphi) \\ &= -\frac{1}{L}(u^2 + RT) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{L\varrho}\int_0^m \frac{x}{L}L'\,\mathrm{d}r\right) + (\partial_m u)\left(\frac{\mu}{L} + \frac{L'}{L^2}\int_0^m x\,\mathrm{d}r\right).\end{aligned} \tag{2.7}$$

En outre, grâce aux conditions aux limites (1.10) et à la relation (1.12), on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\partial_m u)\left(\frac{\mu}{L} + \frac{L'}{L^2}\int_0^m x\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}m &= -\frac{L'}{L^2}\int_0^1 xu\,\mathrm{d}m \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L'}{2L^2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}m\right) + \frac{L''}{2L^2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

Cela étant, en intégrant (2.7) sur $[0,t]\times[0,1]$, il vient compte tenu de (1.10)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{L\varrho}\varphi\,\mathrm{d}m = \int_0^1 &\frac{1}{L_0\varrho_0}\varphi(m,0)\,\mathrm{d}m \\ &+ \frac{L_0'}{L_0^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(m,0)\,\mathrm{d}m + \int_0^1 \frac{1}{\varrho_0}\int_0^m x(r,0)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}m\right) \\ &- \frac{L'}{L^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(m,t)\,\mathrm{d}m + \int_0^1 \frac{1}{\varrho}\int_0^m x(r,t)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}m\right) \\ &+ \int_0^t \frac{L''}{2L^2}\int_0^1 x^2(m,s)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{1}{L}\int_0^1 (u^2+RT)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.8}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

Grâce aux conditions aux limites (1.10), la relation (2.6) implique que

$$\int_0^1 \frac{1}{L\varrho}\,\mathrm{d}m = \int_0^1 \frac{1}{L_0\varrho_0}\,\mathrm{d}m = 1 \quad \forall t > 0, \tag{2.6 bis}$$

de sorte que, la formule de la moyenne nous donne, pour tout $t > 0$, l'existence d'un point $m_0 = m_0(t) \in [0,1]$ tel que

$$\varphi(m_0(t), t) = \int_0^1 \frac{1}{L\varrho}\varphi\,\mathrm{d}m. \tag{2.9}$$

On considére maintenant l'équation

$$\mu\partial_m\partial_s \log\left(\frac{1}{L\varrho}\right) - R\partial_m(\varrho T) = \frac{1}{L}\partial_s(Lu) + \frac{x}{L}L'', \tag{2.10}$$

qui résulte immédiatement des équations (1.1 bis) et (1.2 bis). En intégrant (2.10) sur $[m_0(t), m]$ (ou $[m, m_0(t)]$), on obtient à l'aide de (2.1) et (2.5) (voir aussi (1.2 bis))

$$\mu\partial_s \log\left(\frac{1}{L\varrho}\right) - R\varrho T = \sigma(m_0(t), s) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{m_0(t)}^m \left(u + \frac{x}{L}L'\right)\mathrm{d}r \quad (0 \leqslant s \leqslant t),$$

qui implique

$$\begin{aligned}\mu \log\left(\frac{L_0\varrho_0}{L\varrho}\right) - R\int_0^t \varrho T\,\mathrm{d}s = \int_0^t \sigma(m_0(t), s)\,\mathrm{d}s + \int_{m_0(t)}^m \left(u + \frac{x}{L}L'\right)\mathrm{d}r \\ - \int_{m_0(t)}^m \left(u_0(r) + \frac{x(r,0)}{L_0}L_0'\right)\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Compte tenu de (2.2) et (2.8), (2.9), il résulte de (2.11) que

$$\log\left(\frac{L_0\varrho_0}{L\varrho}\right) - \frac{R}{\mu}\int_0^t \varrho T\,\mathrm{d}s = a(m,t) - b(m,t), \tag{2.12}$$

où

$$\begin{aligned} a(m,t) &= \frac{1}{\mu}\int_0^1 \frac{1}{L_0\varrho_0}\varphi(m,0)\,\mathrm{d}m - \frac{1}{\mu}\int_0^m u_0\,\mathrm{d}r \\ &\quad + \frac{1}{\mu}\int_{m_0(t)}^m u\,\mathrm{d}r + \frac{1}{\mu}\int_{m_0(t)}^m \frac{x}{L}L'\,\mathrm{d}r - \frac{L_0'}{\mu L_0}\int_{m_0(t)}^m x(r,0)\,\mathrm{d}r \\ &\quad + \frac{L_0'}{\mu L_0^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(m,0)\,\mathrm{d}m + \int_0^1 \frac{1}{\varrho_0}\int_0^m x(r,0)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}m\right) \\ &\quad - \frac{L'}{\mu L^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(m,t)\,\mathrm{d}m + \int_0^1 \frac{1}{\varrho}\int_0^m x(r,t)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}m\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\mu}\int_0^t \frac{L''}{L^2}\int_0^1 x^2(m,s)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$b(t) = \int_0^t \frac{1}{L} \int_0^1 (u^2 + RT)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s. \tag{2.14}$$

Ceci étant, il est aisé d'en déduire de la relation (2.12) la formule de représentation pour la densité; à savoir

$$\frac{1}{L\varrho} = \frac{A(m,t)}{B(t)}\left(\frac{1}{L_0\varrho_0} + \frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L(s)} T(m,s)\frac{B(s)}{A(m,s)}\,\mathrm{d}s\right), \tag{2.15}$$

avec

$$A(m,t) = \exp a(m,t), \qquad B(t) = \exp b(t). \tag{2.16}$$

La formule (2.15) étant établie, dans la suite on dégagera certaines estimations du type énergie qui nous seront utiles pour établir le comportement asymptotique de la solution. Ici et dans la suite par c on désignera des constantes qui ne dépenderont que des données du problème.

3. Estimations *a priori*

Lemme 3.1. *Si* $u_0 \in L^2(0,1)$ *et* $T_0 \in L^1(0,1)$, *alors on a*

$$\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m + \int_0^t \frac{L'}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + RT)\,\mathrm{d}m \leqslant c, \tag{3.1}$$

$$\int_0^t \left[\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m \int_0^1 \varrho\left(\frac{\partial_m T}{T}\right)^2 \mathrm{d}m\right]\mathrm{d}s \leqslant c, \tag{3.2}$$

$$\int_0^t \left[\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m \int_0^1 \frac{\varrho}{T}\left(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho}\right)^2 \mathrm{d}m\right]\mathrm{d}s \leqslant c. \tag{3.3}$$

Démonstration. En multipliant l'équation (1.1 bis) par $(1/L)u$ et en l'adjoignant à l'équation (1.3 bis), on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t(\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T) &+ \frac{L'}{L}(u^2 + RT)\\ &= \chi\partial_m(\varrho\partial_m T) + \partial_m\left(\varrho u\left(\mu\partial_m u + \mu\frac{L'}{L\varrho} - RT\right)\right) + \mu\frac{L'^2}{L}\frac{1}{L\varrho} - \frac{x}{L}L''u.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Puisque

$$0 \leqslant x = x(m,t) \leqslant L, \tag{3.5}$$

il est aisé de voir que

$$\left|\frac{L''}{L}\int_0^1 xu\right| \leqslant |L''|\int_0^1 |u|\,\mathrm{d}m \leqslant \frac{L'}{2L}\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m + \frac{L''^2 L}{2L'}$$

de sorte que, compte tenu des conditions (1.10), de (3.4) on tire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m + \frac{L'}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + RT)\,\mathrm{d}m \leqslant \mu\frac{L'^2}{L} + \frac{L''^2 L}{2L'}. \tag{3.6}$$

D'où, grâce à l'expression (1.13) de L, l'estimation (3.1) en découle immédiatement.

Quant aux estimations (3.2) et (3.3), on considére d'abord l'équation

$$\begin{aligned} -c_{\mathrm{v}}\partial_t \log T - R\partial_t \log\left(\frac{1}{L\varrho}\right) + \chi\partial_m\left(\frac{\varrho}{T}\partial_m T\right) \\ + \chi\frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2 + \mu\frac{\varrho}{T}\left(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho}\right)^2 = R\frac{L'}{L}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

obtenue en multipliant l'équation (1.3 bis) par $-1/T$ et en utilisant la relation

$$\partial_t \log\left(\frac{1}{L\varrho}\right) = \varrho\partial_m u, \tag{3.8}$$

conséquence immédiate de (1.2 bis).

Si on intégre maintenant (3.7) sur $[0,1]$ et on l'adjoint à (3.6), on obtient compte tenu de (2.6), l'inégalité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t) + V(t) \leqslant R\frac{L'}{L} + \mu\frac{L'^2}{L} + \frac{L''^2 L}{2L'}, \tag{3.9}$$

avec

$$V(t) = \frac{L'}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + RT)\,\mathrm{d}m + \chi\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2 + \mu\int_0^1 \frac{\varrho}{T}\left(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho}\right)^2 \mathrm{d}m, \tag{3.10}$$

$$U(t) = \int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m + c_{\mathrm{v}}\int_0^1 \varphi(T)\,\mathrm{d}m + R\int_0^1 \varphi\left(\frac{1}{L\varrho}\right)\mathrm{d}m, \tag{3.11}$$

où la fonction φ est donnée par

$$\varphi(x) = x - \log x - 1.$$

Cela étant, en multipliant (3.6) par U donné par (3.11) et (3.9) par

$$\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m,$$

on obtient en les adjoignant

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[U(t)\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m\right] + V(t)\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m + U(t)\frac{L'}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + RT)\,\mathrm{d}m \\ \leqslant R\frac{L'}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m + \left(\mu\frac{L'^2}{L} + \frac{L''^2 L}{2L'}\right)\left[U(t) + \int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m\right]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

De l'inégalité (3.9) il vient

$$U(t) \leqslant U(0) + \int_0^t \left(\mu\frac{L'^2}{L} + \frac{L''^2 L}{2L'}\right)\mathrm{d}s + R\log\left(\frac{L(t)}{L_0}\right)$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

de sorte que, compte tenu de l'expression (1.13) de L et de (3.1), un calcul élémentaire nous donne

$$\int_0^t \left[U(t) + \int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m\right]\left(\mu\frac{L'^2}{L} + \frac{L''^2 L}{2L'}\right)\mathrm{d}s \leqslant c. \tag{3.13}$$

En intégrant maintenant (3.12) sur $[0,t]$, on obtient, en vertu de (3.13) et de (3.1), les estimations (3.2) et (3.3). Ce qui achève la démonstration de Lemme 3.1. □

Le Lemme 3.1 étant établi, on peut alors démontrer le Théorème 1.2, qui, comme on l'avait déjà noté, résultera des propositions suivantes.

4. Comportement asymptotique

Proposition 4.1. *Sous les hypothèses (1.14) et (1.13) il existe une constante positive* $\overline{M}$ *telle que*

$$\frac{1}{L\varrho} \leqslant \overline{M} \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Démonstration. En rappelant l'expression (2.16) de A (voir aussi (2.13)), on déduit de (3.1) et de (2.6 bis), l'existence d'une constante A_0 telle que

$$A_0^{-1} \leqslant A(m,t) \leqslant A_0, \quad \forall m \in [0,1], \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4.2}$$

En outre, on vérifie sans peine que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 T\,\mathrm{d}m - \tfrac{1}{4}\max_{0\leqslant m\leqslant 1}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m \int_0^1 T\,\mathrm{d}m \\ \leqslant T \leqslant 2\int_0^1 T\,\mathrm{d}m + \max_{0\leqslant m\leqslant 1}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m \int_0^1 T\,\mathrm{d}m.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ceci étant, en rappelant la formule de représentation (2.15) et l'expression (2.16) de B (voir aussi (2.14)), on a compte tenu de (1.14) et (4.2), (4.3)

$$\frac{1}{L\varrho} \leqslant \frac{A_0}{L_0\underline{\varrho_0}} + 2A_0^2\frac{R}{\mu}(I_1(t) + I_2(t)) \tag{4.4}$$

avec

$$I_1(t) = \int_0^t \frac{1}{L}\left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s, \tag{4.5}$$

$$I_2(t) = \int_0^t \max_{0\leqslant m\leqslant 1}\left(\frac{1}{L\varrho}\right)\left(\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m\right)\left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s, \tag{4.6}$$

où (voir (2.14), (2.16))

$$\frac{B(s)}{B(t)} = \exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_s^t \frac{1}{L}\int_0^1 \left(u^2 + RT\right)\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s. \tag{4.7}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

Or, on a (voir (4.7))

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leqslant \int_0^t \frac{1}{L}\biggl(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\biggr)\exp\biggl(-\frac{R}{\mu}\int_s^t \frac{1}{L}\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\biggr)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\mu}{R}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp\biggl(-\frac{R}{\mu}\int_s^t \frac{1}{L}\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\biggr)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\mu}{R}\biggl(1-\exp\biggl(-\frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L}\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s\biggr)\biggr), \end{aligned}$$

d'où

$$I_1(t) \leqslant \frac{\mu}{R} \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{4.5 bis}$$

Quant au terme I_2, sachant que $B(s)/B(t) \leqslant 1$, il est aisé de voir que

$$I_2(t) \leqslant \int_0^t \max_{0\leqslant m\leqslant 1}\biggl(\frac{1}{L\varrho}\biggr)\biggl(\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m\biggr)\biggl(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\biggr).$$

En adjoignant ces estiamtions à (4.4), il vient

$$\frac{1}{L\varrho} \leqslant A_0\biggl(\frac{1}{L_0\underline{\varrho_0}}+2A_0\biggr)+2A_0^2\frac{R}{\mu}\int_0^t \max_{0\leqslant m\leqslant 1}\biggl(\frac{1}{L\varrho}\biggr)\biggl(\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m\biggr)\biggl(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\biggr)\,\mathrm{d}s,$$

de sorte que le Lemme de Gronwall nous donne, compte tenu de (3.2), l'inégalité (4.1). Ce qui achève la démonstration de la Proposition 4.1. □

Proposition 4.2. *Sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 4.1 il existe une constante positive $\underline{M}$ telle que*

$$\frac{1}{L\varrho} \geqslant \underline{M}, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Démonstration. Pour démontrer la Proposition 4.2, on commencera d'abord par établir quelques estimations. En effet, on a

Lemme 4.3. *Il existe une constante positive c telle que*

$$\int_0^t \frac{1}{L}\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s \leqslant c. \tag{4.9}$$

Démonstration. De l'inégalité

$$|u| \leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant 1}\biggl(\frac{1}{\varrho}\biggr)^{1/2}\biggl(\int_0^1 \frac{\varrho}{T}\biggl(\partial_m u+\frac{L'}{L\varrho}\biggr)^2\mathrm{d}m\biggr)^{1/2}\biggl(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\biggr)^{1/2}+L', \tag{4.10}$$

il en découle, compte tenu de (2.6 bis) et de (3.3), l'estimation (4.9). □

Lemme 4.4. *Soit $0 \leqslant s < t$. Il existe une constante positive b telle que*

$$\frac{B(s)}{B(t)} = \exp\biggl(-\frac{1}{\mu}\int_s^t \frac{1}{L}\int_0^1 \Bigl(u^2+RT\Bigr)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\biggr)\,\mathrm{d}s \leqslant b\biggl[\frac{L(s)}{L(t)}\biggr]^{R/c_{\mathrm{v}}}. \tag{4.11}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. En multipliant (3.4) par $1/L'$, on obtient

$$\partial_t\biggl(\frac{1}{L'}(\tfrac{1}{2}u^2+c_{\mathrm{v}}T)\biggr)+\frac{1}{L}(u^2+RT)+\frac{L''}{L'^2}(\tfrac{1}{2}u^2+c_{\mathrm{v}}T)$$
$$=\chi\frac{1}{L'}\partial_m(\varrho\partial_m T)+\partial_m\biggl(\varrho u\frac{1}{L'}\biggl(\mu\partial_m u+\mu\frac{L'}{L\varrho}-RT\biggr)\biggr)+\mu\frac{L'}{L}\frac{1}{L\varrho}-\frac{x}{LL'}L''u. \tag{4.12}$$

Or (voir (1.12)), on a

$$\frac{x}{LL'}L''u=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl(x^2\frac{L''}{LL'}\biggr)-x^2\frac{L'''}{2LL'}-x^2\frac{L''}{2L^2}+x^2\frac{L''^2}{2LL'^2}.$$

Donc, en intégrant (4.12) sur $[0,1]$, il vient compte tenu de (1.10)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl[\frac{1}{L'}\int_0^1\biggl(\tfrac{1}{2}u^2+c_{\mathrm{v}}T+x^2\frac{L''}{2L}\biggr)\,\mathrm{d}m\biggr]$$
$$+\frac{1}{L}\int_0^1(u^2+RT)\,\mathrm{d}m+\frac{L''}{L'^2}\int_0^1(\tfrac{1}{2}u^2+c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m-\frac{L'''}{2LL'}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}m$$
$$=\mu\frac{L'}{L}-\frac{L''^2}{2LL'^2}\int_0^1 x^2+\frac{L''}{2L^2}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}m. \tag{4.13}$$

Soit $s\leqslant\tau<t$. En intégrant (4.13) sur $[s,\tau]$, il vient, compte tenu de l'expression (1.13) de L et de (3.5),

$$\frac{1}{L'}\int_0^1(\tfrac{1}{2}u^2+c_{\mathrm{v}}T)+\int_s^\tau\frac{1}{L}\int_0^1\Bigl(u^2+RT\Bigr)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'$$
$$\geqslant\mu\log\biggl(\frac{L(\tau)}{L(s)}\biggr)+\int_s^\tau q(s')\,\mathrm{d}s'+L(s)\frac{L''(s)}{2L'(s)}, \tag{4.14}$$

où (voir (1.13))

$$q(t)=\tfrac{1}{2}L''(t)\biggl(1-\frac{L(t)L''(t)}{L'^2(t)}\biggr)\leqslant 0.$$

Ceci étant, on pose

$$Z(s,\tau)=\int_s^\tau\frac{1}{L}\int_0^1\Bigl(u^2+c_{\mathrm{v}}T\Bigr)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'.$$

Donc il résulte de (4.14) (et de la relation $c_{\mathrm{v}}>R$)

$$\partial_\tau(LZ)\geqslant\mu L'(\tau)\log\biggl(\frac{L(\tau)}{L(s)}\biggr)+L'(\tau)\int_s^\tau q(s')\,\mathrm{d}s'+L'(\tau)\frac{L''(s)}{2L'(s)}L(s), \tag{4.15}$$

En intégrant maintenant (4.15) sur $[s,t]$, on obtient, compte tenu de (1.13)

$$\int_s^t\frac{1}{L}\int_0^1\Bigl(u^2+c_{\mathrm{v}}T\Bigr)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\geqslant\mu\log\biggl(\frac{L(t)}{L(s)}\biggr)-\mu\nu, \tag{4.16}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

avec ν une constante positive donnée par

$$\nu = 1 + (1-\alpha)\frac{L_0}{2\mu} - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty q(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'inégalité (4.16) étant établie, il en découle immédiatement l'estimation (4.11) avec

$$b = \exp\left(\frac{\nu R}{c_{\mathrm{v}}}\right).$$

$\square$

Démonstration de la Proposition 4.2. En rappelant la formule (2.15), en vertu de (4.3), il vient

$$\frac{1}{L\varrho} \geqslant \frac{R}{2\mu A_0^2}\Big(I_1(t) - I_2(t)\Big), \tag{4.17}$$

où I_1 et I_2 sont donnés dans (4.5) et (4.6). En rappelant l'expression (4.5) de I_1, on a (voir aussi (4.7))

$$I_1(t) = I_{11}(t) + I_{12}(t)$$

avec

$$\begin{aligned}
I_{11}(t) &= \frac{1}{R}\int_0^t \frac{1}{L}\left(\int_0^1 (u^2+RT)\,\mathrm{d}m\right)\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_s^t \frac{1}{L}\int_0^1 \Big(u^2+RT\Big)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s,\\
I_{12}(t) &= -\frac{1}{R}\int_0^t \frac{1}{L}\left(\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m\right)\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_s^t \frac{1}{L}\int_0^1 \Big(u^2+RT\Big)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que

$$\begin{aligned}
I_{11}(t) &= \frac{\mu}{R}\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_s^t \frac{1}{L}\int_0^1 \Big(u^2+RT\Big)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s\\
&= \frac{\mu}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L}\int_0^1 \Big(u^2+RT\Big)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s\right)\right] = \frac{\mu}{R}\left[1 - \frac{B(0)}{B(t)}\right].
\end{aligned}$$

Donc (4.11) implique que

$$I_{11}(t) \geqslant \frac{\mu}{R}\left(1 - b\left[\frac{L(0)}{L(t)}\right]^{R/c_{\mathrm{v}}}\right). \tag{4.18}$$

Quant au terme I_{12}, en vertu de (4.11), on a

$$I_{12} \geqslant -\frac{b}{R}\int_0^t \frac{1}{L}\left(\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m\right)\left(\frac{L(s)}{L(t)}\right)^{R/c_{\mathrm{v}}}\mathrm{d}s. \tag{4.19}$$

Soit maintenant $\delta > 1$. Puisque (voir (1.13)), on a

$$\left[\frac{L(s)}{L(t)}\right]^{R/c_{\mathrm{v}}} \leqslant \frac{1}{\delta^{\alpha R/c_{\mathrm{v}}}} \leqslant 1 \qquad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant \frac{t+1}{\delta} - 1 < t, \tag{4.20}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

il s'ensuit que

$$\int_0^{((t+1)/\delta)-1} \frac{1}{L}\left(\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m\right)\left(\frac{L(s)}{L(t)}\right)^{R/c_\mathrm{v}} \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{\delta^{\alpha R/c_\mathrm{v}}}\int_0^\infty \frac{1}{L}\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m\mathrm{d}t,$$

de sorte que, en vertu de (4.9), il résulte de (4.19) et de (4.20) que

$$I_{12}(t) \geqslant -\frac{c}{\delta^{\alpha R/c_\mathrm{v}}} - \frac{b}{R}\int_{((t+1)/\delta)-1}^t \frac{1}{L}\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s. \tag{4.21}$$

Si on somme les inégalités (4.18) et (4.21), on obtient

$$I_1(t) \geqslant \frac{\mu}{R} - \frac{\mu b}{R}\left(\frac{L(0)}{L(t)}\right)^{R/c_\mathrm{v}} - \frac{c}{\delta^{\alpha R/c_\mathrm{v}}} - \frac{b}{R}\int_{((t+1)/\delta)-1}^t \frac{1}{L}\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s.$$

Finalement, en tenant compte de (4.1) et de (4.11), on obtient par un raisonnement analogue à (4.21) (voir (4.6) pour l'expression de I_2)

$$I_2(t) \leqslant \frac{c}{\delta^{\alpha R/c_\mathrm{v}}} + \int_{((t+1)/\delta)-1}^t \left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\left(\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}s. \tag{4.22}$$

Compte tenu de (3.2) et de (4.9), il existe $\bar{t} > 0$ tel que

$$I_1(t) - I_2(t) \geqslant \frac{\mu}{2R} - \frac{c}{\delta^{\alpha R/c_\mathrm{v}}} \quad \forall t \geqslant \bar{t},$$

de sorte que (voir (4.17)), en choisissant δ suffisamment grand, il vient

$$\frac{1}{L\varrho} \geqslant \frac{R}{2\mu A_0^2}\left(\frac{\mu}{2R} - \frac{c}{\delta^{\alpha R/c_\mathrm{v}}}\right) \geqslant \frac{1}{8A_0^2} \quad \forall t \geqslant \bar{t}. \tag{4.23}$$

Puisque la formule (2.15) implique que

$$\frac{1}{L\varrho} \geqslant \frac{A(m,t)}{L_0\varrho_0}\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{L}\int_0^1 (u^2 + RT)\,\mathrm{d}m\mathrm{d}s\right)$$

(voir aussi (2.14) et (2.16)), il vient à l'aide de (4.1), (4.2) et de (3.1)

$$\frac{1}{L\varrho} \geqslant \frac{1}{A_0 L_0 \overline{\varrho_0}}\exp\left(-c\int_0^t \frac{1}{L}\,\mathrm{d}s\right) \geqslant \frac{1}{A_0 L_0 \overline{\varrho_0}}\exp\left(-\frac{c}{L_0}t\right) \quad \forall t > 0,$$

qui nous donne

$$\frac{1}{L\varrho} \geqslant \frac{1}{A_0 L_0 \overline{\varrho_0}}\exp\left(-\frac{c}{L_0}\bar{t}\right) \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \tag{4.24}$$

Des inégalités (4.23) et (4.24) découle immédiatement l'estimation (4.1).

Ce qui achève la démonstration de la Proposition 4.2. □

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

Pour démontrer l'estimation (1.16) du Théorème 1.2, on est (voir (4.37)) amené à dériver par rapport à la variable $m \in [0,1]$ l'expression (2.15) de la densité, donc à contrôler l'expression $\sqrt{\varrho}\partial_m T$ dans $L^2(0,\infty;L^2(0,1))$. Pour celà, on utilisera une inégalité déjà introduite dans [**7**] (voir aussi [**4**]) qu'on adaptera légérement à notre cas. C'est l'objet du lemme suivant. Quant au Lemme 4.6 où l'on estime par le bas en norme dans $L^1(0,1)$ la temperature T, il nous servira également à établir la même estimation (1.16) (Théorème 1.2).

Lemme 4.5. *Si on suppose que $u_0 \in L^4(0,1)$ et $T_0 \in L^2(0,1)$, on a*

$$\int_0^1 (u^4+T^2)\,\mathrm{d}m + \int_0^t \frac{L'}{L}\int_0^1 (u^4+T^2)\,\mathrm{d}m + \int_0^t\int_0^1 \varrho(u^2(\partial_m u)^2 + (\partial_m T)^2) \leqslant c. \tag{4.25}$$

Démonstration. On considére le produit scalaire dans $L^2(0,1)$ de l'équation (3.4) avec

$$\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)^2\,\mathrm{d}m + \frac{L'}{L}\int_0^1 (u^2+RT)(\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m \\ + c_{\mathrm{v}}\chi\int_0^1 \varrho(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^8 I_i, \tag{4.26}$$

où

$$I_1 = \frac{L'}{L}\int_0^1 \frac{1}{L\varrho}(\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T), \qquad I_2 = -\frac{L''}{L}\int_0^1 xu(\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T),$$

$$I_3 = -(\chi + c_{\mathrm{v}}\mu)\int_0^1 \varrho u(\partial_m T)(\partial_m u)\,\mathrm{d}m, \qquad I_4 = -\mu\int_0^1 \varrho u^2(\partial_m u)^2\,\mathrm{d}m,$$

$$I_5 = \mu R\int_0^1 \varrho u^2 T(\partial_m u)\,\mathrm{d}m, \qquad I_6 = c_{\mathrm{v}}R\int_0^1 \varrho T u(\partial_m T)\,\mathrm{d}m,$$

$$I_7 = -\mu\frac{L'}{L}\int_0^1 u^2(\partial_m u)\,\mathrm{d}m, \qquad I_8 = -\mu c_{\mathrm{v}}\frac{L'}{L}\int_0^1 u(\partial_m T)\,\mathrm{d}m.$$

Or, compte tenu de (4.1) et de (3.5) (voir aussi (1.13)), on a

$$|I_1 + I_2| \leqslant \frac{L'}{2L}\int_0^1 (u^2+RT)(\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m + c\frac{L'}{L}\int_0^1 (u^2+T)\,\mathrm{d}m.$$

En outre, il est aisé de voir que

$$|I_3+I_4+I_5+I_6| \leqslant \tfrac{1}{4}c_{\mathrm{v}}\chi\int_0^1 \varrho(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m + c\int_0^1 \varrho u^2T^2\,\mathrm{d}m.$$

Finalement, grâce à l'expression (1.13) de L, on a

$$|I_7 + I_8| \leqslant \varepsilon \int_0^1 \varrho u^2 (\partial_m u)^2 \,\mathrm{d}m + \tfrac{1}{4} c_{\mathrm{v}} \chi \int_0^1 \varrho (\partial_m T)^2 \,\mathrm{d}m + c \frac{L'}{L} \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}m.$$

Si on adjoint ces estimations à (4.26), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}} T)^2 \,\mathrm{d}m + \frac{L'}{2L} \int_0^1 (u^2 + RT)(\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T) \,\mathrm{d}m + \tfrac{1}{2} c_{\mathrm{v}} \chi \int_0^1 \varrho (\partial_m T)^2 \,\mathrm{d}m \\ \leqslant c \frac{L'}{L} \int_0^1 (u^2 + T) \,\mathrm{d}m + c \int_0^1 \varrho u^2 T^2 \,\mathrm{d}m + \varepsilon \int_0^1 \varrho u^2 (\partial_m u)^2 \,\mathrm{d}m. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Compte tenu de (4.1), (4.8) et de (4.10), on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varrho u^2 T^2 \,\mathrm{d}m &\leqslant \frac{1}{\underline{M} L} (\max_{0 \leqslant m \leqslant 1} u^2) \int_0^1 T^2 \\ &\leqslant \biggl[\biggl(\int_0^1 \frac{\varrho}{T} \Bigl(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho} \Bigr)^2 \,\mathrm{d}m \biggr) \biggl(\int_0^1 T \,\mathrm{d}m \biggr) + \frac{L'^2}{L} \biggr] \int_0^1 T^2 \,\mathrm{d}m. \end{aligned} \tag{4.28}$$

L'inégalité (4.27) étant établie, on considére maintenant le produit scalaire dans $L^2(0,1)$ de l'équation (1.1 bis) par $(1/L)u^3$, on obtient

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 u^4 \,\mathrm{d}m + \frac{L'}{L} \int_0^1 u^4 + 3\mu \int_0^1 \varrho u^2 (\partial_m u)^2 \,\mathrm{d}m = I_1 + I_2, \tag{4.29}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= 3R \int_0^1 T u^2 (\partial_m u) \,\mathrm{d}m, \\ I_2 &= -\frac{L''}{L} \int_0^1 x u^3. \end{aligned}$$

Or, il est aisé de voir que, compte tenu de (3.5), on a

$$\begin{aligned} |I_1| &\leqslant \tfrac{3}{2}\mu \int_0^1 \varrho u^2 (\partial_m u)^2 \,\mathrm{d}m + \frac{3R^2}{2\mu} \int_0^1 \varrho T^2 u^2 \,\mathrm{d}m, \\ |I_2| &\leqslant \frac{L'}{2L} \int_0^1 u^4 \,\mathrm{d}m + \frac{L''^4 L^3}{4L'^3}, \end{aligned}$$

de sorte que (4.29), nous donne

$$\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^1 u^4 \,\mathrm{d}m + \frac{L'}{2L} \int_0^1 u^4 \,\mathrm{d}m + \tfrac{3}{2}\mu \int_0^1 \varrho u^2 (\partial_m u)^2 \,\mathrm{d}m \leqslant \frac{3R^2}{2\mu} \int_0^1 \varrho T^2 u^2 \,\mathrm{d}m + \frac{L''^4 L^3}{4L'^3}. \tag{4.30}$$

Si on adjoint (4.30) à (4.27) où l'on choisit $\varepsilon = \frac{3}{4}\mu$, on obtient compte tenu de l'inégalité (4.28)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\biggl(\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)^2\,\mathrm{d}m + \int_0^1 u^4\,\mathrm{d}m\biggr) + \frac{L'}{2L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^4 + R^2T^2)\,\mathrm{d}m \\ + \tfrac{1}{2}c_{\mathrm{v}}\chi\int_0^1 \varrho(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m + \tfrac{3}{4}\mu\int_0^1 \varrho u^2(\partial_m u)^2\,\mathrm{d}m \\ \leqslant c\frac{L'}{L}\int_0^1 (u^2 + T)\,\mathrm{d}m \\ + c\biggl[\biggl(\int_0^1 \frac{\varrho}{T}\biggl(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho}\biggr)^2\mathrm{d}m\biggr)\biggl(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\biggr) + \frac{L'^2}{L}\biggr]\int_0^1 T^2\,\mathrm{d}m. \qquad (4.31)\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.1) et (3.3), à l'aide du Lemme de Gronwall, on déduit facilement de (4.31) l'estimation (4.25). □

Lemme 4.6. *Sous l'hypothèse*

$$\log T_0 \in L^1(0,1), \qquad \log \varrho_0 \in L^1(0,1),$$

on a

$$\int_0^1 T\,\mathrm{d}m \geqslant \frac{c}{L^{R/c_{\mathrm{v}}}(t)} \quad \forall t \geqslant 0. \qquad (4.32)$$

Démonstration. En intégrant l'équation (3.7) sur [0,1], on obtient compte tenu de (1.10)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \log\biggl(\frac{T^{c_{\mathrm{v}}}}{\varrho^R}\biggr)\mathrm{d}m = \chi\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2 + \mu\int_0^1 \frac{\varrho}{T}\biggl(\partial_m u + \frac{L'}{L\varrho}\biggr)^2\mathrm{d}m.$$

D'où on tire

$$\int_0^1 \log\biggl(\frac{T^{c_{\mathrm{v}}}}{\varrho^R}\biggr)\mathrm{d}m \geqslant \int_0^1 \log\biggl(\frac{T_0^{c_{\mathrm{v}}}}{\varrho_0^R}\biggr)\mathrm{d}m. \qquad (4.33)$$

La fonction log étant concave, on déduit de l'inégalité ci-dessus

$$\log\int_0^1 \biggl(\frac{T}{\varrho^{R/c_{\mathrm{v}}}}\biggr)^{1/2}\mathrm{d}m \geqslant \frac{1}{2c_{\mathrm{v}}}\int_0^1 \log\biggl(\frac{T_0^{c_{\mathrm{v}}}}{\varrho_0^R}\biggr)\mathrm{d}m. \qquad (4.34)$$

Puisque

$$\int_0^1 T\,\mathrm{d}m \geqslant \biggl[\int_0^1 \biggl(\frac{T}{\varrho^{R/c_{\mathrm{v}}}}\biggr)^{1/2}\mathrm{d}m\biggr]\biggl[\int_0^1 \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{d}m\biggr]^{-R/c_{\mathrm{v}}},$$

compte tenu de (2.6 bis), l'estimation (4.32) découle immédiatement de l'inégalité (4.34). □

Les Lemmes 4.5 et 4.6 étant établis, on peut maintenant énoncer et démontrer le résultat suivant.

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

Proposition 4.7. *Si outre l'hypothèse (1.14), on suppose que*

$$\partial_m \varrho_0 \in L^2(0,1), \tag{4.35}$$

alors on a

$$\|\partial_m \varrho\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{c}{L^\beta(t)} \quad \forall t \geqslant 0, \quad \beta = 1 - \frac{R}{2c_{\mathrm{v}}}. \tag{4.36}$$

Démonstration. En dérivant par rapport à m la formule (2.15), il vient

$$\partial_m\left(\frac{1}{L\varrho}\right) = \sum_{i=1}^{4} I_i(m,t), \tag{4.37}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\partial_m A}{B}\left[\frac{1}{L_0\varrho_0} + \frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{A(m,s)}\,\mathrm{d}s\right],\\
I_2 &= \frac{A}{B(t)}\left[\partial_m\left(\frac{1}{L_0\varrho_0}\right) + \frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{A(m,s)}\,\mathrm{d}s\right],\\
I_3 &= \frac{A}{B(t)}\left[\frac{1}{L_0\varrho_0} - \frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{A(m,s)}\frac{\partial_m A}{A}\,\mathrm{d}s\right],\\
I_4 &= \frac{A}{B(t)}\left[\frac{1}{L_0\varrho_0} + \frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L(s)}(\partial_m T(m,s))\frac{B(s)}{A(m,s)}\,\mathrm{d}s\right].
\end{aligned}$$

En rappelant l'expression (2.16) de A (voir aussi (2.13)), on a

$$\partial_m A = \left(\frac{1}{\mu}(u-u_0) + \frac{x}{\mu L}L' - \frac{x_0}{\mu L_0}L_0'\right)A. \tag{4.38}$$

Compte tenu de (3.1) e de (3.5) (voir aussi (1.13)), on a

$$\|\partial_m A\|_{L^2(0,1)} \leqslant (2A_0/\mu)(\|u\|_{L^2(0,1)} + \|u_0\|_{L^2(0,1)} + 2\alpha L_0) \leqslant c. \tag{4.39}$$

En outre, en vertu de (4.1) et de (4.3), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{L(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s \leqslant{}& 2\int_0^t \frac{1}{L}\left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s\\
&+ \overline{M}\int_0^t\left(\int_0^1 \frac{\varrho}{T^2}(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}m\right)\left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Compte tenu de (4.5 bis) (voir aussi (4.5)), de (3.2) et du fait que $B(s)/B(t) \leqslant 1$, il vient

$$\int_0^t \frac{1}{L(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s \leqslant c, \tag{4.40}$$

de sorte que (4.39), (4.40), (4.35) et (1.14), nous donne

$$\|I_1\|_{L^2(0,1)} \leqslant c.$$

D'autre part, il est aisé de voir que, compte tenu de (4.35), un raisonnement analogue à I_1 nous donne

$$\|I_2\|_{L^2(0,1)} \leqslant c.$$

Quant au terme I_3, compte tenu de (4.38), on a

$$I_3 = I_{31} + I_{32} + I_{33}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_{31} &= \frac{A}{B(t)}\left(\frac{1}{L_0\varrho_0} - \frac{R}{\mu^2}\left(u_0 + \frac{x_0}{L_0}L_0'\right)\int_0^t \frac{1}{L(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{A(m,s)}\,\mathrm{d}s\right),\\
I_{32} &= \frac{A}{B(t)}\left(\frac{1}{L_0\varrho_0} + \frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{L'(s)}{L^2(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{A(m,s)}x(m,s)\,\mathrm{d}s\right),\\
I_{33} &= \frac{A}{B(t)}\left(\frac{1}{L_0\varrho_0} + \frac{R}{\mu}\int_0^t \frac{1}{L(s)}T(m,s)\frac{B(s)}{A(m,s)}u(m,s)\,\mathrm{d}s\right).
\end{aligned}$$

Les mêmes arguments qui nous ont conduits à estimer le terme I_1 (voir aussi (3.5) et l'expression (1.13) de L) nous donnent

$$\|I_{31} + I_{32}\|_{L^2(0,1)} \leqslant c.$$

Pour le terme I_{33}, on remarque d'abord que, en vertu de (4.40), (4.7) et de (3.1), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left[\int_0^t \frac{1}{L(s)}T\frac{B(s)}{B(t)}u\,\mathrm{d}s\right]^2 \mathrm{d}m &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t \frac{1}{L(s)}T\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^t \frac{1}{L(s)}Tu^2\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}m\\
&\leqslant c\int_0^1\int_0^t \frac{1}{L(s)}Tu^2\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\leqslant c\int_0^t \frac{1}{L}(\max_{0\leqslant m\leqslant 1} u^2)\left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}s\\
&\leqslant c\int_0^t \frac{1}{L}(\max_{0\leqslant m\leqslant 1} u^2)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Les inégalités (3.3), (4.1) et (4.10) (voir aussi (1.13)), impliquent que

$$\int_0^1 \left[\int_0^t \frac{1}{L(s)}T\frac{B(s)}{B(t)}u\,\mathrm{d}s\right]^2 \mathrm{d}m \leqslant c. \tag{4.41}$$

En rappelant l'expression de I_{33}, on déduit de (4.35), de (4.2) et de (4.41) que

$$\|I_{33}\|_{L^2(0,1)} \leqslant c,$$

et donc

$$\|I_3\|_{L^2(0,1)} = \|I_{31} + I_{32} + I_{33}\|_{L^2(0,1)} \leqslant c.$$

En ce qui concerne le dernier terme I_4, on remarque d'abord que, compte tenu de (4.25) et (4.1), on a

$$\int_0^1 \left[\int_0^t \frac{1}{L(s)}(\partial_m T)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s\right]^2 \mathrm{d}m \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^t \varrho(\partial_m T)^2\,\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^t \frac{1}{L^2\varrho}\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}m$$
$$\leqslant c\int_0^t \frac{1}{L}\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s. \tag{4.42}$$

En outre, grâce à (4.32) et (3.1), on a

$$\int_0^t \frac{1}{L}\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s \leqslant c\int_0^t \frac{1}{L^{1-(R/c_\mathrm{v})}}\left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s$$
$$\leqslant cL^{R/c_\mathrm{v}}\int_0^t \frac{1}{L}\left(\int_0^1 T\,\mathrm{d}m\right)\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s,$$

de sorte que, en vertu de (4.5 bis) (voir aussi (4.5)), il vient

$$\int_0^t \frac{1}{L}\frac{B(s)}{B(t)}\,\mathrm{d}s \leqslant cL^{R/c_\mathrm{v}}. \tag{4.43}$$

Si on rappelle l'expression du terme I_4, on déduit de (1.14), (4.2), (4.35) et de (4.43), l'estimation

$$\|I_4\|_{L^2(0,1)} \leqslant cL^{R/c_\mathrm{v}}.$$

Ceci étant, en adjoignant à (4.37) les estimations des termes I_i ($i = 1, \dots, 4$), on déduit que

$$\int_0^1 \left|\partial_m\left(\frac{1}{L\varrho}\right)\right|^2 \mathrm{d}m \leqslant c(1 + L^{R/c_\mathrm{v}}), \tag{4.44}$$

et compte tenu de (4.8), il découle immédiatement de (4.44), l'estimation

$$\|\partial_m\varrho\|_{L^2(0,1)} \leqslant \frac{c}{L^\beta(t)} \quad \forall t \geqslant 0, \quad \beta = 1 - \frac{R}{2c_\mathrm{v}}.$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition 4.7. □

Proposition 4.8. *Si on suppose que $u_0 \in L^2(0,1)$ et $T_0 \in L^1(0,1)$, alors on a*

$$\int_0^1 (u^2 + T)\,\mathrm{d}m \leqslant \begin{cases} \dfrac{c}{L^{p(\alpha)-\varepsilon}}, & \textit{pour } \dfrac{c_\mathrm{v}}{R + c_\mathrm{v}} \leqslant \alpha < 1, \\[2mm] \dfrac{c}{L^{R/c_\mathrm{v}}}, & \textit{pour } 0 < \alpha < \dfrac{c_\mathrm{v}}{R + c_\mathrm{v}}, \end{cases} \tag{4.45}$$

où ε est un nombre positif suffisamment petit et

$$p(\alpha) = (1/\alpha) - 1 > 0.$$

https://doi.org/10.1017/S0013091599001121 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Supposons que

$$\frac{c_{\mathrm{v}}}{R+c_{\mathrm{v}}} \leqslant \alpha < 1,$$

de sorte que, en rappelant la condition $R < c_{\mathrm{v}}$, on a

$$2 > \frac{R+c_{\mathrm{v}}}{c_{\mathrm{v}}} \geqslant \frac{1}{\alpha} > 1. \tag{4.46}$$

Comme (voir l'expression (1.13) de L)

$$\frac{L''}{L'^2}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m,$$

en multipliant (3.6) par $1/L'$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{L'}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m\right] + D(t) \leqslant \mu\frac{L'}{L} + \frac{L''^2 L}{2L'^2}, \tag{4.47}$$

où

$$\begin{aligned} D(t) &= \frac{1}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + RT)\,\mathrm{d}m + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m \\ &= \left(2-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{L}\int_0^1 \tfrac{1}{2}u^2\,\mathrm{d}m + \left(\frac{c_{\mathrm{v}}+R}{c_{\mathrm{v}}} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{L}\int_0^1 c_{\mathrm{v}}T\,\mathrm{d}m. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Grâce (4.46) on voit que $D(t) \geqslant 0$. En intégrant (4.47) sur $[0,t]$ on obtient

$$\frac{1}{L'}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m \leqslant \mu\log\left(\frac{L(t)}{L_0}\right) + \int_0^\infty \frac{L''^2 L}{2L'^2}\,\mathrm{d}s.$$

En rappelant maintenant l'expression (1.13) de L, on tire de l'inégalité ci-dessus

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m \leqslant cL'(1+\log L) &= c\alpha a L_0(1+at)^{\alpha-1}(1+\log L) \\ &= c\alpha a L_0^{1/\alpha}(L_0(1+at)^{\alpha})^{1-(1/\alpha)}(1+\log L) \\ &= c\alpha a L_0^{1/\alpha}L^{1-(1/\alpha)}(1+\log L) \\ &= c\alpha a L_0^{1/\alpha}L^{1-(1/\alpha)+\varepsilon}(1+\log L)L^{-\varepsilon} \leqslant \frac{c'}{L^{p(\alpha)-\varepsilon}}, \end{aligned}$$

où c' est une constante ne dépendant que des données du problème, ε est un nombre positif arbitrairement petit et $p(\alpha) = 1/\alpha - 1 > 0$.

Par contre si

$$0 < \alpha < c_{\mathrm{v}}/(R+c_{\mathrm{v}}),$$

et donc

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} - \frac{R+c_{\mathrm{v}}}{c_{\mathrm{v}}} > 0, \tag{4.49}$$

en écrivant D donné par (4.48) sous la forme

$$D(t) = \left(1 - \frac{R}{c_{\mathrm{v}}}\right)\frac{1}{L}\int_0^1 \tfrac{1}{2}u^2 \,\mathrm{d}m - \gamma\frac{1}{L}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m,$$

on déduit de (4.47) que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mu}{\gamma} + \frac{1}{L'}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m\right] \leqslant \gamma\frac{L'}{L}\left[\frac{\mu}{\gamma} + \frac{1}{L'}\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m\right] + \frac{L''^2 L}{2L'^2}.$$

D'où, à l'aide du Lemme de Gronwall (voir aussi (1.13)), on tire

$$\int_0^1 (\tfrac{1}{2}u^2 + c_{\mathrm{v}}T)\,\mathrm{d}m \leqslant cL'L^{\gamma} = c'L^{-R/c_{\mathrm{v}}}, \tag{4.50}$$

avec une constante positive c'; c'est-à-dire la seconde estimation de (4.45).

Ce qui achève la démonstration de la Proposition 4.8 et comme on l'a déjà noté celle du Théorème 1.2. □

Remerciements. Je tiens à remercier le referee des *Proceedings of Edinburgh Mathematical Society* pour ses corrections et ses suggestions.

References

1. A. V. Kazhikhov, Sur la solubilité globale des problèmes aux limites monodimensionels pour les équations d'un gaz visqueux et calorifère (en russe), *Dinamika Sploshnoj Sredy, Novosibirsk* **24** (1976), 45–61.
2. A. V. Kazhikhov, Sur la solubilité des problèmes aux valeurs initiales-limitées pour les équations d'un gaz visqueux et calorifère, *C. R. Acad. Sci. Paris* A **284** (1977), 317–320.
3. L. Landau et El Lifchizt, Physique satistique (première partie) (traduction française Editions Mir, 1984).
4. S. Jiang, Large-time behaviour of solutions to the equations of a viscous polytropic ideal gas, *Ann. Mat. Pura Applic.* **175** (1998), 253–275.
5. S. Jiang, Large-time behaviour of solutions to the equations of a one-dimensional viscous polytropic ideal gas in unbounded domains, *Commun. Math. Phys.* **200** (1999), 181–193.
6. P. P. Volosevisch, N. A. Darin et E. I. Levanov, The problem of a piston moving in a gas with energy sources, *Zh. Vichisl. Mat. Mat. Fiz.* **23** (1983), pp. 693–701.
7. H. F. Yashima et R. Benabidallah, Equation à symétrie sphérique d'un gaz visqueux et calorifère avec la surface libre, *Ann. Mat. Pura Applic.* **168** (1995), 75–117.
8. H. F Yashima et R. Benabidallah, Unicité de la solution de l'équation monodimensionnelle ou à symétrie sphérique d'un gaz visqueux et calorifère, *Rend. Circolo Mat. Palermo* **42** (1993), 152–218.
9. H. F. Yashima, M. Padula et A. Novotný, Equation monodimensionnelle d'un gaz visqueux et calorifère avec des conditions aux limites moins restrictives, *Ric. Mat.* **42** (1993), 199–284.
10. H. F. Yashima et N. B. Lahmar, Sur l'expansion d'un gaz visqueux et calorifère avec la surface libre en une dimension et à symétrie sphérique, Quaderni Dip. Mat. Univ. Torino (1999).