

## L'ISOLATEUR D'UN HOMOMORPHISME DE GROUPES

C. CASSIDY ET P. J. HILTON

Dans ce travail, nous désignons par  $\mathcal{LN}$  la catégorie des groupes localement nilpotents. Si  $P$  est un ensemble de premiers, nous disons que  $n$  est un  $P$ -nombre et nous écrivons  $n \in P$  si tous les facteurs premiers de  $n$  appartiennent à  $P$ ; on convient toujours que  $1 \in P$ . Dans tout ce qui suit, il est souvent commode de ne pas faire explicitement la distinction dans la notation entre un ensemble  $P$  de premiers et l'ensemble de tous les entiers naturels ayant tous leurs facteurs premiers dans  $P$ ; par exemple,  $n \in P$  signifiera toujours que  $n$  est un  $P$ -nombre mais pas nécessairement un premier. L'ensemble de tous les premiers n'appartenant pas à  $P$  est désigné par  $P'$ ; on convient que  $1$  appartient à la fois à  $P$  et à  $P'$ .

Si  $G \in \mathcal{LN}$  et  $H \leq G$ , le  $P'$ -isolateur de  $H$  dans  $G$  est l'ensemble  $\{x \in G \mid x^n \in H, n \in P'\}$  qui est noté  $I(H)$  mais aussi parfois  $I_G(H)$  ou  $I_{P'}(H)$  si l'on a besoin de spécifier de quel  $P$  ou de quel  $G$  il est question. Cette notion d'isolateur d'un sous-groupe dans un groupe semble avoir été d'abord introduite puis étudiée par Malcev [12] et Plotkin [14]. Philip Hall [6], Baumslag [1] et Warfield [16] indiquent les principales propriétés des isolateurs dans leurs notes sur les groupes nilpotents. Très souvent, ces propriétés sont semblables à certaines propriétés de la localisation et Stambach [15] a d'ailleurs remarqué que  $I_{P'}(H) = e^{-1}(H_P)$  où  $I_{P'}(H)$  est le  $P'$ -isolateur de  $H$  dans  $G$  et  $e: G \rightarrow G_P$  est la  $P$ -localisation; Hilton et Stambach ont exploité cette propriété pour obtenir de nouveaux résultats à la fois sur les isolateurs et sur la localisation (voir en particulier [11]). Mentionnons enfin que les isolateurs ont été étudiés dans d'autres contextes et particulièrement en rapport avec les relations d'ordre partiel dans les groupes (voir à ce sujet [2], [3] et [5]).

Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est dit  $P'$ -isolé dans  $G$  s'il coïncide avec son  $P'$ -isolateur dans  $G$ , c'est-à-dire si  $H = e^{-1}(H_P)$ ; autrement dit,  $H$  est  $P'$ -isolé si et seulement si le carré

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{i} & G \\
 e \downarrow & & \downarrow e \\
 H_P & \xrightarrow{i_P} & G_P
 \end{array}$$

est cartésien, où  $e$  désigne la  $P$ -localisation et  $i$  (resp.  $i_P$ ) l'inclusion. Cette caractérisation des sous-groupes isolés suggère la généralisation suivante: on

Reçu le 25 novembre, 1977.

dit qu'un homomorphisme  $\phi: H \rightarrow G$  dans  $\mathcal{LN}$  est  $P'$ -isolé si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\phi} & G \\
 \downarrow e & & \downarrow e \\
 H_P & \xrightarrow{\phi_P} & G_P
 \end{array}$$

est cartésien ( $\phi_P$  est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme précédent; pour cette propriété universelle de la localisation, voir [7]). On sait par ailleurs que le  $P'$ -isolateur d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est  $P'$ -isolé dans  $G$  et que  $H_P = I(H)_P$ ; comme nous montrons ensuite que dans  $\mathcal{LN}$  tout homomorphisme  $\phi: H \rightarrow G$  se laisse factoriser de façon essentiellement

unique sous la forme  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$ , avec  $\alpha$   $P$ -bijectif et  $\beta$   $P'$ -isolé (un homomorphisme  $\alpha: H \rightarrow K$  est dit  $P$ -bijectif s'il est à la fois  $P$ -injectif - c'est-à-dire si  $\ker \alpha$  est de  $P'$ -torsion - et  $P$ -surjectif - c'est-à-dire si pour tout  $y \in K$  il existe  $n \in P'$  tel que  $y^n \in \alpha(H)$ ) et en particulier, si  $H \leq G$  et  $\phi: H \rightarrow G$  est l'inclusion, alors  $H \rightarrow I_{P'}(H) \rightarrow G$  est une telle factorisation de  $\phi$ , nous sommes justifiés de définir le  $P'$ -isolateur de  $\phi: H \rightarrow G$  comme tout homomorphisme  $P'$ -isolé  $\beta: K \rightarrow G$  pour lequel il existe un homomorphisme  $P$ -bijectif  $\alpha: H \rightarrow K$  tel que  $\phi = \beta\alpha$ . On remarque que  $\beta$  est défini à une équivalence près. Rappelons qu'un homomorphisme  $\alpha$  est  $P$ -bijectif si et seulement si  $\alpha_P$  est bijectif.

Dans ce travail, après avoir établi une bonne définition du  $P'$ -isolateur d'un homomorphisme de groupes dans  $\mathcal{LN}$ , nous étudions quelques-unes de ses propriétés fondamentales. Nous cherchons ensuite à situer  $K$  comme groupe par rapport aux groupes  $H$  et  $G$ . Par exemple, dans le cas nilpotent, que peut-on dire de la classe de nilpotence de  $K$  connaissant celles de  $H$  et  $G$ ? Quand  $H$  peut-il être identifié à un sous-groupe de  $K$  à l'aide de  $\alpha$ , ou  $K$  à un sous-groupe de  $G$  à l'aide de  $\beta$ ? Quand  $\alpha$  et  $\beta$  sont-ils surjectifs?

Un peu plus loin, nous étudions un certain nombre de relations qui existent entre les isolateurs et les "pull-backs" dans  $\mathcal{LN}$ . Enfin, étant donné certains foncteurs de  $\mathcal{LN}$  dans  $\mathcal{LN}$ , nous examinons le comportement des isolateurs par rapport à ces foncteurs; de façon précise, si  $F$  est une opération effectuée dans  $\mathcal{LN}$ , nous comparons l'isolateur de  $F(\phi)$  avec le résultat de l'opération de  $F$  sur l'isolateur de  $\phi$ . Dans cette direction, nos résultats sont en un certain sens plus faibles que ceux que l'on peut obtenir dans le cas où  $\phi$  est une inclusion; remarquons qu'il aurait été facile dans un grand nombre de cas d'obtenir de véritables généralisations des résultats classiques sur les isolateurs mais alors les énoncés auraient eu trop souvent un aspect artificiel; nous avons surtout étudié les aspects des isolateurs qui restaient naturels dans le contexte des homomorphismes de groupes.

**1. Définitions et propriétés fondamentales.** Nous signalons une fois pour toutes que tous les groupes considérés dans ce texte sont localement nilpotents afin d'avoir une bonne théorie de la localisation.

Si  $P$  est un ensemble de premiers, le  $P'$ -isolateur d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est l'ensemble  $I(H) = \{x \in G \mid x^n \in H, n \in P'\}$ .

Si  $e: G \rightarrow G_P$  désigne la  $P$ -localisation, alors  $I(H) = e^{-1}(H_P)$ . En effet, si  $x \in I(H)$ , alors  $x^n \in H$  pour un certain  $n \in P'$ , d'où  $e(x^n) \in H_P$ , puis  $e(x) \in H_P$ . Réciproquement, supposons que  $x \in G$  et  $e(x) = y \in H_P$ ; il existe  $m \in P'$  tel que  $y^m = e(h)$ ,  $h \in H$  d'où  $x^m = hu$  avec  $u^n = 1, n \in P'$ . Si  $c = \text{nil grp } \{h, u\}$ ,  $x^{mnc} = h^{nc}$  d'après [7], Corollaire 6.2, d'où  $e^{-1}(H_P) \subset I(H)$ .

Nous remarquons que cette méthode est sans doute la plus simple pour démontrer que  $I(H)$  est un sous-groupe de  $G$ .

Un sous-groupe  $K$  de  $G$  est dit  $P'$ -isolé dans  $G$  si  $x \in G, x^n \in K, n \in P'$  entraîne  $x \in K$  ou de façon équivalente si  $K = I(K)$ ; il est clair que le  $P'$ -isolateur de tout sous-groupe  $H$  de  $G$  est  $P'$ -isolé dans  $G$ .

On voit tout de suite qu'un sous-groupe  $H$  de  $G$  est  $P'$ -isolé dans  $G$  si et seulement si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i} & G \\ e \downarrow & & \downarrow e \\ H_P & \xrightarrow{i_P} & G_P \end{array}$$

est cartésien. Cette propriété suggère la définition suivante:

*Définition 1.1.* Un homomorphisme  $\phi: H \rightarrow G$  dans  $\mathcal{LN}$  est dit  $P'$ -isolé si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & G \\ e \downarrow & & \downarrow e \\ H_P & \xrightarrow{\phi_P} & G_P \end{array}$$

est cartésien.

**THÉORÈME 1.1.** *Pour tout homomorphisme  $\phi: H \rightarrow G$ , il existe une factorisation*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\phi} & G \\ \alpha \searrow & & \nearrow \beta \\ & K & \end{array}$$

dans  $\mathcal{LN}$  où  $\alpha$  est  $P$ -bijectif et  $\beta$   $P'$ -isolé.

*Preuve.* On obtient une factorisation  $\phi = \beta\alpha$  en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H & & & & \\
 \swarrow \alpha & & & & \searrow \phi \\
 & K & \xrightarrow{\beta} & G & \\
 \downarrow \rho & & & & \downarrow e \\
 H_P & \xrightarrow{\phi_P} & & G_P & \\
 \uparrow e & & & & \\
 H & & & & 
 \end{array} \tag{1}$$

dans lequel le carré est cartésien. Puisque  $e: G \rightarrow G_P$  est  $P$ -bijetif, il s'ensuit alors que  $\rho$  est  $P$ -bijetif et par conséquent  $P$ -localise puisque  $H_P$  est  $P$ -local. Puisque  $\rho$  et  $e: H \rightarrow H_P$  sont  $P$ -bijetifs, il en est de même de  $\alpha$ .

Dans le diagramme (1), l'homomorphisme  $\rho: K \rightarrow H_P$   $P$ -localise; nous conviendrons donc d'écrire tout simplement  $e$  à la place de  $\rho$  et avec cette convention, nous remarquons que  $\alpha_P = \text{Id}_{H_P}$  et  $\beta_P = \phi_P$ .

*Définition 1.2.* Une factorisation  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  de  $H \rightarrow G$  avec  $\alpha$   $P$ -bijetif et  $\beta$   $P'$ -isolé est appelée une  $PP'$ -factorisation de  $\phi$ .

Remarquons que  $H \hookrightarrow I(H) \hookrightarrow G$  est une  $PP'$ -factorisation de l'inclusion  $H \hookrightarrow G$  et que c'est même la seule dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  sont des inclusions.

**PROPOSITION 1.1.** *Pour toute  $PP'$ -factorisation  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  de  $H \xrightarrow{\phi} G$ ,  $\phi(H) \rightarrow \beta(K) \rightarrow G$  est une  $PP'$ -factorisation de  $\phi(H) \hookrightarrow G$ .*

*Preuve.* Si  $x^n = \beta(k)$  avec  $x \in G, k \in K$  et  $n \in P'$ , alors  $e(x^n) \in \beta_P(K_P) = \beta(K)_P$  d'où  $e(x) \in \beta(K)_P = \beta_P(K_P)$  et  $x \in \beta(K)$  puisque  $\beta$  est  $P'$ -isolé;  $\beta(K) \rightarrow G$  est donc  $P'$ -isolé.

Il suffit maintenant de démontrer que  $\phi(H) \rightarrow \beta(K)$  est  $P$ -surjectif. Soit  $x = \beta(k)$  avec  $k \in K$ ;  $e(x) \in \phi(H)_P$  d'où pour un certain  $n \in P'$ ,  $e(x^n) = e\phi(h)$  avec  $h \in H$  ce qui entraîne  $x^n = \phi(h).u$  avec  $u \in T_{P'}(G)$ ; on applique alors [7], Corollaire 6.2 comme précédemment.

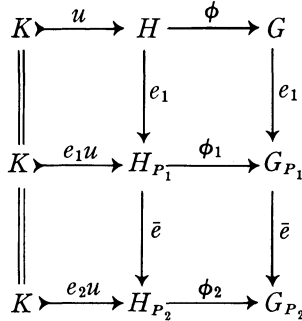
**PROPOSITION 1.2.** *Supposons  $P_1 \supset P_2$  et soit  $\phi: H \rightarrow G$  un homomorphisme. Alors,*

- i)  $\phi$   $P_1$ -bijetif  $\Rightarrow \phi$   $P_2$ -bijetif
- ii)  $\phi$   $P_2'$ -isolé  $\Rightarrow \phi$   $P_1'$ -isolé.

*Preuve.* i) est bien connu et pour prouver ii), supposons le diagramme

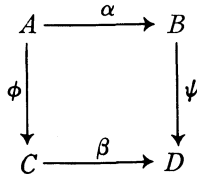
$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\phi} & G \\
 \downarrow e_2 & & \downarrow e_2 \\
 H_{P_2} & \xrightarrow{\phi_2} & G_{P_2}
 \end{array}$$

cartésien. En posant  $(K, u) = \ker \phi$ , on obtient un diagramme commutatif

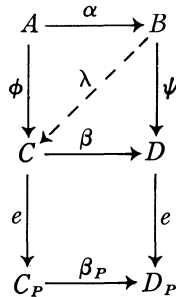


dans lequel  $\bar{e}e_1 = e_2$  et  $(K, e_i u) = \ker \phi_i$ ,  $i = 1, 2$ ; en effet, puisque  $\phi$  est  $P_2'$ -isolé,  $(K, e_2 u) = \ker \phi_2$  et comme la localisation est exacte,  $K$  est  $P_2$ -local donc  $P_1$ -local car  $P_1 \supset P_2$ ; il s'ensuit que  $(K, e_1 u) = \ker \phi_1$  et le diagramme précédent est commutatif. Considérons maintenant  $x \in G$ ,  $y \in H_{P_1}$  tels que  $e_1(x) = \phi_1(y)$ . Comme  $e_2(x) = \phi_2 \bar{e}(y)$ , on sait qu'il existe  $a \in H$  tel que  $\phi(a) = x$  et puisque  $\phi_1(y) = e_1 \phi(a) = \phi_1 e_1(a)$ , alors  $y = e_1(ak)$  où  $k \in K$  car le diagramme précédent est commutatif. Il est clair que  $\phi(ak) = x$  et que  $ak$  est le seul élément de  $H$  vérifiant  $e_1(ak) = y$ ,  $\phi(ak) = x$  car  $\phi$  est  $P_2'$ -isolé.

PROPOSITION 1.3. *Etant donné le diagramme commutatif*



avec  $\alpha$   $P$ -bijetif et  $\beta$   $P'$ -isolé, il existe un unique  $\lambda : \beta \rightarrow C$  tel que a)  $\beta\lambda = \psi$  et b)  $\lambda\alpha = \phi$ .



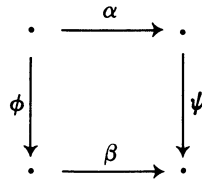
*Preuve.* Dans le diagramme ci-haut,  $\alpha$  est  $P$ -bijetif et le carré inférieur est cartésien; on peut donc définir un unique  $\lambda$  tel que a)  $\beta\lambda = \psi$  et b)  $e\lambda = \phi_P \alpha_P^{-1} e$  puisque  $e\psi = \psi_P e = \beta_P \phi_P \alpha_P^{-1} e$ . Il suffit de voir que a) b)  $\Leftrightarrow$  a)  $\bar{b}$ ). Or étant donné a)  $\bar{b}$ ),  $e\lambda\alpha = \phi_P \alpha_P^{-1} e\alpha = \phi_P e = e\phi$  et  $\beta\lambda\alpha = \psi\alpha = \beta\phi$  d'où  $\lambda\alpha = \phi$ . Par ailleurs, étant donné b),  $e\lambda = \lambda_P e = \phi_P \alpha_P^{-1} e$ .

Un corollaire important de cette proposition est le théorème suivant qui établit l'unicité des  $PP'$ -factorisations de  $\phi$  à une équivalence près.

**THÉORÈME 1.2.** *Si  $H \xrightarrow{\alpha_1} K_1 \xrightarrow{\beta_1} G$  et  $H \xrightarrow{\alpha_2} K_2 \xrightarrow{\beta_2} G$  sont deux  $PP'$ -factorisations de  $H \xrightarrow{\phi} G$ , il existe un unique isomorphisme  $\lambda : K_1 \rightarrow K_2$  tel que  $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$  et  $\beta_1 = \beta_2\lambda$ .*

Nous remarquons que les  $PP'$ -factorisations d'un homomorphisme dans  $\mathcal{LN}$  sont un exemple de la notion de  $(E, M)$ -factorisation introduite par Kelly ([4], [13]). Une  $(E, M)$ -factorisation des morphismes dans une catégorie  $\mathcal{A}$  est définie comme un couple de classes de morphismes dans  $\mathcal{A}$  vérifiant les axiomes suivants:

- i) tout isomorphisme appartient à la fois à  $E$  et  $M$ .
- ii)  $E$  et  $M$  sont fermés par rapport à la composition.
- iii) pour tout carré commutatif



dans  $\mathcal{A}$  avec  $\alpha \in E$  et  $\beta \in M$ , il existe un unique  $\lambda$  tel que  $\beta\lambda = \psi$  et  $\lambda\alpha = \phi$ .

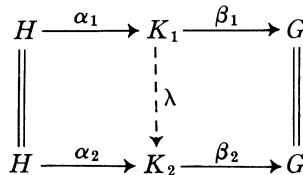
- iv) pour tout morphisme  $\phi$  dans  $\mathcal{A}$ , il existe  $\alpha \in E$  et  $\beta \in M$  tels que  $\phi = \beta\alpha$ .

**Définition 1.3.** On appelle  $P'$ -isolateur de l'homomorphisme  $\phi : H \rightarrow G$  tout homomorphisme  $P'$ -isolé  $\beta : K \rightarrow G$  pour lequel il existe un homomorphisme  $P$ -bijectif  $\alpha : H \rightarrow K$  vérifiant  $\phi = \beta\alpha$ .

Si  $H \leq G$  et  $\phi : H \hookrightarrow G$  est l'inclusion, le  $P'$ -isolateur de  $\phi$  est l'inclusion  $I(H) \hookrightarrow G$ .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des Propositions 1.2 et 1.3. Il se laisse regarder comme généralisation du Théorème 1.2.

**PROPOSITION 1.4.** *Supposons  $P_1 \supset P_2$ ; si  $H \xrightarrow{\alpha_1} K_1 \xrightarrow{\beta_1} G$  (resp.  $H \xrightarrow{\alpha_2} K_2 \xrightarrow{\beta_2} G$ ) est une  $P_1P_1'$ -factorisation (resp.  $P_2P_2'$ -factorisation) d'un homomorphisme  $\phi$ , il existe un unique  $\lambda$  rendant commutatif le diagramme*



De plus,  $\lambda$  est à la fois  $P_2$ -bijectif et  $P_1'$ -isolé.

On peut également grâce à la Proposition 1.3 définir la  $PP'$ -factorisation d'un carré:

*Définition 1.4.* On appelle  $PP'$ -factorisation du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\phi_1} & G_1 \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ H_2 & \xrightarrow{\phi_2} & G_2 \end{array}$$

le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_1 & \xrightarrow{\beta_1} & G_1 \\ h \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow g \\ H_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & K_2 & \xrightarrow{\beta_2} & G_2 \end{array}$$

dans lequel  $H_i \xrightarrow{\alpha_i} K_i \xrightarrow{\beta_i} G_i$  est une  $PP'$ -factorisation de  $H_i \xrightarrow{\phi_i} G_i$  pour  $i = 1, 2$  ( $k$  existe et est unique, en vertu de la Proposition 1.3).

Nous mentionnons enfin quelques propriétés qui montrent qu'en un certain sens le  $P'$ -isolateur peut être considéré comme un foncteur exact à gauche.

**PROPOSITION 1.5.** *Considérons la  $PP'$ -factorisation*

$$\begin{array}{ccccc} H_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_1 & \xrightarrow{\beta_1} & G_1 \\ h \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow g \\ H_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & K_2 & \xrightarrow{\beta_2} & G_2 \end{array}$$

définie précédemment. Posons  $H_0 = \ker h$ ,  $K_0 = \ker k$  et  $G_0 = \ker g$ . Si  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  et  $\phi_0$  désignent les restrictions évidentes de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  et  $\phi_1 = \beta_1\alpha_1$  respectivement, alors

$H_0 \xrightarrow{\alpha_0} K_0 \xrightarrow{\beta_0} G_0$  est une  $PP'$ -factorisation de  $H_0 \xrightarrow{\phi_0} G_0$ .

*Preuve.*  $\alpha_0$  est clairement  $P$ -bijetif puisque la localisation est exacte. Pour montrer que  $\beta_0$  est  $P'$ -isolé, donnons nous  $x \in G_0$ ,  $y \in K_{0P}$ , avec  $e(x) = \beta_{0P}y$ . Il existe  $z \in K_1$ , unique, tel que  $\beta_1(z) = x$ ,  $e(z) = y$ ; reste à démontrer que  $z \in K_0$ , c'est-à-dire, que  $k(z) = 1$ . Or  $\beta_2k(z) = g\beta_1(z) = g(x) = 1$ , et  $ek(z) = k_P e(z) = k_P(y) = 1$ , d'où  $k(z) = 1$ , et la démonstration est achevée.

L'énoncé correspondant où on pose  $\bar{H} = \text{coker } h$ ,  $\bar{K} = \text{coker } k$  et  $\bar{G} = \text{coker } g$  n'est cependant pas vrai comme le montre l'exemple suivant:

on prend  $P' = \{1, 2\}$  et le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \times 2 \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}
 \end{array}$$

Le conoyau devrait être  $0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbf{Z}/2$  mais  $0 \rightarrow \mathbf{Z}/2$  n'est pas  $P'$ -isolé.

PROPOSITION 1.6. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 G_0 & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & G_2 \\
 \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 \\
 H_0 & \longrightarrow & H_1 & \longrightarrow & H_2
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, *i*)  $\phi_1, \phi_2$   $P'$ -isolés  $\Rightarrow \phi_0$   $P'$ -isolé, *ii*)  $\phi_0, \phi_2$   $P'$ -isolés  $\Rightarrow \phi_1$   $P'$ -isolé, mais *iii*)  $\phi_0, \phi_1$   $P'$ -isolés  $\not\Rightarrow \phi_2$   $P_1'$ -isolé.

*Preuve.* *i*) est simplement un cas particulier de la Proposition 1.5. Pour prouver *ii*), on se sert des méthodes habituelles dites de "diagram chasing" comme dans la preuve de la Proposition 1.5 et on utilise le fait que la localisation est exacte. Un contre-exemple pour *iii*) est donné par

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbf{Z} & \xrightarrow{(\text{mod } 2)} & \mathbf{Z}/2
 \end{array}$$

où l'on prend  $P' = \{1, 2\}$ .

**2. Le groupe  $K$  dans une  $PP'$ -factorisation**  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  de  $H \xrightarrow{\phi} G$ . Nous essayons ici d'obtenir des renseignements sur  $K$  à partir de la donnée

initiale  $H \xrightarrow{\phi} G$ . Nous remarquons que contrairement à la situation classique,  $H$  ne peut plus être considéré comme sous-groupe de  $K$  pas plus que  $K$  peut être considéré comme sous-groupe de  $G$  en général. De plus, il se peut très bien que  $\text{nil } H > \text{nil } K$  et aussi  $\text{nil } K > \text{nil } G$ . Notre but est principalement d'établir des critères sur  $\phi$  et si possible de caractériser les homomorphismes  $\phi: H \rightarrow G$  pour lesquels  $K$  possède des propriétés données.

Nous remarquons d'abord que le résultat suivant découle immédiatement des propriétés des "pull-backs".



LEMME 2.1. Si  $\beta$  est  $P'$ -isolé, alors  $\beta$  est injectif (resp. surjectif) si et seulement si  $\beta$  est  $P$ -injectif (resp.  $P$ -surjectif).

THÉORÈME 2.1. Etant donné une  $PP'$ -factorisation  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  de  $H \rightarrow G$ .

i)  $\beta$  est injectif si et seulement si  $\phi$  est  $P$ -injectif.

ii)  $\beta$  est surjectif si et seulement si  $G$  est le  $P'$ -isolateur de  $\phi(H)$  dans  $G$ .

iii)  $\alpha$  est injectif si et seulement si  $\phi|_{T_{P'}(H)}$  est injectif.

iv)  $\alpha$  est surjectif si et seulement si  $\phi(H)$  est  $P'$ -isolé dans  $G$  et  $e(\ker \phi) = \ker \phi_P$ .

Preuve. i) Puisque  $\phi$  est  $P$ -injectif si et seulement si  $\phi_P$  est injectif, le résultat découle immédiatement du Lemme 2.1 car  $\phi_P = \beta_P$ .

ii) Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \xrightarrow{\alpha} & K & \xrightarrow{\beta} & G \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \lambda & & \parallel \\
 \phi(H) & \xrightarrow{\gamma} & \beta(K) & \xrightarrow{\delta} & G
 \end{array} \tag{2}$$

dans lequel  $\lambda = \beta$ . Puisque  $\beta(K)$  est toujours le  $P'$ -isolateur de  $\phi(H)$  dans  $G$  d'après la Proposition 1.1, le problème revient à montrer que  $\beta$  est surjectif si et seulement si  $\delta$  est surjectif, ce qui est clair en vertu de la surjectivité de  $\lambda$ .

iii) Supposons  $\alpha$  injectif et prenons  $x \in T_{P'}(H)$  ( $x \neq 1$ ). Puisque  $e(x) = 1$  et  $\alpha(x) \neq 1$ , on doit avoir  $\phi(x) \neq 1$  car  $\beta$  est  $P'$ -isolé.

Réciproquement, puisque  $\alpha$  est  $P$ -injectif,  $\alpha(x) = 1$  ( $x \neq 1$ ) entraîne que  $x \in T_{P'}(H)$  et alors  $\phi|_{T_{P'}(H)}$  n'est pas injectif.

iv) Si  $\alpha$  est surjectif, nous voyons que  $\phi(H)$  est  $P'$ -isolé dans  $G$  d'après le diagramme (2) puisque  $\gamma$  est alors surjectif et que  $\beta(K)$  est le  $P'$ -isolateur de  $\phi(H)$  dans  $G$ .

Par ailleurs si  $\alpha$  est surjectif, nous voyons que  $e(\ker \phi) \supset \ker \phi_P$ . En effet, soit  $x \in H_P$  tel que  $\phi_P(x) = 1$ ; on a alors  $(x, 1) \in K$  et puisque  $\alpha$  est surjectif, il existe  $y \in H$  tel que  $\alpha(y) = (x, 1)$  d'où  $y \in \ker \phi$  et  $e(y) = x$ . L'inclusion  $e(\ker \phi) \subset \ker \phi_P$  est évidemment toujours vérifiée.

Réciproquement, supposons  $\phi(H)$   $P'$ -isolé dans  $G$  et  $e(\ker \phi) = \ker \phi_P$ . Prenons un élément arbitraire  $(x, y)$  dans  $K$ , c'est-à-dire  $x \in H_P$ ,  $y \in G$  et  $\phi_P(x) = e(y)$ , et montrons qu'il existe  $h \in H$  tel que  $\alpha(h) = (x, y)$ . Puisque  $\phi(H)$  est  $P'$ -isolé dans  $G$  et donc  $\phi(H) = \beta(K)$ , on a  $y = \phi(\bar{h})$  pour un certain  $\bar{h} \in H$ ; par ailleurs,  $\phi_P(x) = e(y) = e\phi(\bar{h}) = \phi_P e(\bar{h})$  d'où  $x = e(\bar{h}) \text{ mod } (\ker \phi_P)$  et par hypothèse  $x = e(\bar{h}) \cdot e(h_1)$  où  $h_1 \in \ker \phi$ . Il est clair que  $h = \bar{h}h_1$  vérifie  $\alpha(h) = (x, y)$ .

Nous supposons maintenant que  $H$  et  $G$  sont nilpotents; par le fait même,  $K$  est nilpotent et  $\text{nil } K \leq \max(\text{nil } H, \text{nil } G)$ . Dans la situation classique, on a

toujours  $\text{nil } H \leq \text{nil } I(H) \leq \text{nil } G$  et si  $G$  n'a pas de  $P'$ -torsion, alors  $\text{nil } H = \text{nil } I(H)$ . Nous avons ici le résultat suivant:

**THÉORÈME 2.2.** Soit  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  une  $PP'$ -factorisation de  $H \xrightarrow{\phi} G$ . Alors,  
*i)* si  $G$  n'a pas de  $P'$ -torsion,  $\text{nil } K \leq \text{nil } H$ ,  
*ii)* si  $\phi|_{\tau_{P'}(H)}$  est injectif et en particulier si  $H$  n'a pas de  $P'$ -torsion,  $\text{nil } K \geq \text{nil } H$ .

*Preuve.* *ii)* est clair puisque  $\phi|_{\tau_{P'}(H)}$  injectif revient à dire que  $\alpha$  est injectif. Pour prouver *i)*, prenons pour  $x$  un  $(c + 1)$  – commutateur d'éléments de  $K$  où  $c = \text{nil } H$ ; on a clairement  $e(x) = 1$  car  $\text{nil } H_P \leq \text{nil } H$ ; par ailleurs,  $e\beta(x) = \phi_P e(x) = 1$  d'où  $\beta(x) = 1$  car  $G$  n'a pas de  $P'$ -torsion; puisque  $\beta$  est  $P$ -isolé,  $x = 1$  et  $\text{nil } K \leq c$ .

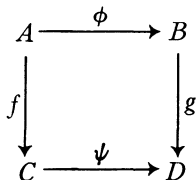
Remarquons que si ni  $H$  ni  $G$  n'ont de la  $P'$ -torsion, alors  $\text{nil } H = \text{nil } K$ . Il se peut très bien que  $\text{nil } H > \text{nil } K$ ; on prend par exemple l'homomorphisme trivial  $\phi: H \rightarrow G$  où  $H$  est un groupe de  $P'$ -torsion non trivial et  $G$  est n'importe quel groupe nilpotent sans  $P'$ -torsion; dans ce cas-là,  $K$  est trivial. De même, on peut très bien avoir  $\text{nil } K > \text{nil } G$ ; il suffit, par exemple, de considérer l'homomorphisme trivial  $\phi: H \rightarrow G$  où  $G$  est le group trivial et  $H$  n'importe quel groupe nilpotent ayant des éléments qui ne sont pas de  $P'$ -torsion. Dès que  $\phi$  est  $P$ -injectif cependant,  $\text{nil } K \leq \text{nil } G$ , car  $\beta$  est injectif.

Notons enfin que puisque  $K$  est le "pull-back" de  $e: G \rightarrow G_P$  et  $\phi_P: H_P \rightarrow G_P$ , alors  $K$  est de type fini si  $G$  est de type fini et  $\ker \phi_P$  fini.

**THÉORÈME 2.3.** Soit  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  une  $PP'$ -factorisation de  $H \xrightarrow{\phi} G$ . Si  $G$  est de type fini et si  $\ker \phi$  est de torsion et de  $P$ -torsion finie, alors  $K$  est de type fini.

**3. Isolateurs et "pull-backs".** Nous étudions ici le comportement des isolateurs et des homomorphismes  $P'$ -isolés par rapport à certains diagrammes cartésiens. Par exemple, dans de tels diagrammes, si certains homomorphismes sont  $P'$ -isolés, on peut en déduire que d'autres le sont également; nous montrons également qu'en un certain sens les "pull-backs" commutent avec les isolateurs. Nous montrons enfin que si  $H$  et  $G$  sont de type fini et si  $\ker(\phi: H \rightarrow G)$  est de torsion, alors  $\phi$  peut être considéré comme le "pull-back" de certains de ses isolateurs.

**THÉORÈME 3.1.** Dans un carré cartésien



si  $\psi$  est  $P'$ -isolé,  $\phi$  l'est aussi.

*Preuve.* Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{\phi} & B & & \\
 \searrow & & \searrow & & \\
 f \downarrow & A_P & \xrightarrow{\phi_P} & B_P & \\
 & \searrow & \searrow & \searrow & \\
 & f_P \downarrow & \psi & \downarrow g & \\
 C & \xrightarrow{\psi_P} & D & & \\
 \searrow & & \searrow & & \\
 & C_P & \xrightarrow{\psi_P} & D_P & \\
 & \downarrow & \downarrow g_P & & 
 \end{array} \tag{3}$$

Par hypothèse les carrés

$$\begin{array}{ccc}
 A \longrightarrow B & & C \longrightarrow D \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C \longrightarrow D & \text{et} & C_P \longrightarrow D_P
 \end{array}$$

sont cartésiens; de plus

$$\begin{array}{ccc}
 A_P \longrightarrow B_P & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_P \longrightarrow D_P & & 
 \end{array}$$

est également cartésien car la localisation commute avec les “pull-backs” (une preuve de ce résultat dans le cas nilpotent est donnée dans [9], Théorème I.2.10 et le résultat s’étend immédiatement à  $\mathcal{LN}$  par définition de la P-localisation dans  $\mathcal{LN}$  (voir [8]) puisque dans la catégorie des groupes  $\varinjlim$  préserve les “pull-backs”). Puisque le diagramme (3) est commutatif, il s’ensuit que le carré

$$\begin{array}{ccc}
 A \longrightarrow B & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A_P \longrightarrow B_P & & 
 \end{array}$$

est cartésien.

Une conséquence intéressante du théorème précédent est qu’en considérant la  $PP'$ -factorisation d’un carré cartésien arbitraire dans  $\mathcal{LN}$ , on obtient une factorisation de ce carré en deux carrés qui sont également cartésiens.

THÉORÈME 3.2. *Considérons le carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\phi} & G \\
 h \downarrow & & \downarrow g \\
 H' & \xrightarrow{\phi'} & G'
 \end{array} \tag{4}$$

dans  $\mathcal{L}\mathcal{N}$ . Si  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  et  $H' \xrightarrow{\alpha'} K' \xrightarrow{\beta'} G'$  désignent des  $PP'$ -factorisations de  $\phi$  et  $\phi'$  et si  $\lambda: K \rightarrow K'$  est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \xrightarrow{\alpha} & K & \xrightarrow{\beta} & G \\
 h \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow g \\
 H' & \xrightarrow{\alpha'} & K' & \xrightarrow{\beta'} & G'
 \end{array} \tag{5}$$

(voir Définition 1.4), alors tous les carrés dans le diagramme (5) sont cartésiens.

*Preuve.* On construit d'abord le "pull-back" de  $\beta'$  et  $g$  ce qui nous donne le carré

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{K} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & G \\
 \bar{\lambda} \downarrow & & \downarrow g \\
 K' & \xrightarrow{\beta'} & G'
 \end{array}$$

puis alors on construit le "pull-back" de  $\alpha'$  et  $\bar{\lambda}$ , d'où le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{H} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{K} & \xrightarrow{\bar{\beta}} & G \\
 \bar{h} \downarrow & (7) & \downarrow \bar{\lambda} & (8) & \downarrow g \\
 H' & \xrightarrow{\alpha'} & K' & \xrightarrow{\beta'} & G'
 \end{array} \tag{6}$$

dans lequel  $\bar{\alpha}$  est  $P'$ -bijectif puisque  $\alpha'$  l'est et que (7) est cartésien; de plus,  $\bar{\beta}$  est  $P'$ -isolé d'après le Théorème 3.1 puisque  $\beta'$  est  $P'$ -isolé et que (8) est cartésien. Puisque les carrés (4) et (6) sont tous deux cartésiens, le résultat découle de l'unicité des "pull-backs" et de l'unicité des  $PP'$ -factorisations.

THÉORÈME 3.3. Si  $H \xrightarrow{\phi_j} M_j \xrightarrow{\psi_j} G$ ,  $j = 1, \dots, n$ , est un "pull-back" et si tous les  $\psi_j: M_j \rightarrow G$  sont  $P'$ -isolés, alors tous les  $\phi_j: H \rightarrow M_j$  le sont également.

*Preuve.* Ce résultat a été démontré pour  $n = 2$  (Théorème 3.1). En procédant par induction, on montre ensuite que si tous les  $\psi_j$  sont  $P'$ -isolés pour  $j \neq k$ , alors  $\phi_k$  est  $P'$ -isolé.

**THÉORÈME 3.4.** *Le  $P'$ -isolateur du "pull-back" d'une famille finie d'homomorphismes dans  $\mathcal{LN}$  est le "pull-back" de la famille de leurs  $P'$ -isolateurs. De façon précise, soit  $H_j \xrightarrow{\psi_j} G$ ,  $j = 1, \dots, n$  une famille d'homomorphismes; si  $H \xrightarrow{\phi_j} H_j \xrightarrow{\psi_j} G$  est le "pull-back" de cette famille et si  $K \xrightarrow{\gamma_j} K_j \xrightarrow{\beta_j} G$  est le "pull-back" de la famille des  $P'$ -isolateurs des  $H_j \xrightarrow{\psi_j} G$ , alors  $K \xrightarrow{\beta_j \gamma_j} G$  est le  $P'$ -isolateur de  $H \xrightarrow{\psi_j \phi_j} G$ .*

*Preuve.* Il suffit de montrer que l'application  $H \xrightarrow{\psi_j \phi_j} G$  se factorise en  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta_j \gamma_j} G$  avec  $\alpha$   $P$ -bijetif et  $\beta_j \gamma_j$   $P'$ -isolé. On sait que  $\beta_j \gamma_j$  est  $P'$ -isolé d'après le théorème précédent puisque tous les  $\beta_j$  le sont. Pour montrer l'existence de  $\alpha$ , considérons pour chaque  $j$  la  $PP'$ -factorisation  $H_j \xrightarrow{\alpha_j} K_j \xrightarrow{\beta_j} G$  de  $H_j \xrightarrow{\psi_j} G$ . Puisque dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H & & K \\
 \phi_j \downarrow & & \downarrow \gamma_j \\
 H_j & \xrightarrow{\alpha_j} & K_j \\
 \psi_j \downarrow & & \downarrow \beta_j \\
 G & \xlongequal{\quad} & G
 \end{array} \tag{9}$$

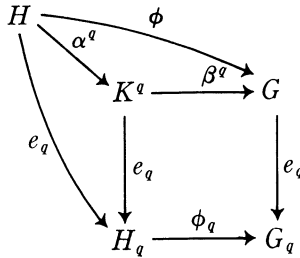
les deux diagrammes verticaux sont des "pull-backs", l'existence de  $\alpha : H \rightarrow K$  telle que  $\gamma_j \alpha = \alpha_j \phi_j$  pour chaque  $j$  est établie. En localisant le diagramme (9), on voit que chaque  $\alpha_{jP}$  est un isomorphisme puis alors que  $\alpha_P$  est un isomorphisme par unicité des "pull-backs" puisque les "pull-backs" finis commutent avec la localisation.

Notre prochain résultat est inspiré de [9], Théorème I.3.6, que nous utilisons d'ailleurs dans la démonstration. Remarquons d'abord que si  $\phi : H \rightarrow G$  est une inclusion et si  $\{q\}'$  désigne l'ensemble de tous les premiers sauf  $q$ , alors  $H$  est le "pull-back" (intersection) des inclusions  $I_{\{q\}'}(H) \rightarrow G$  où  $q$  parcourt l'ensemble  $\pi$  de tous les premiers. Dans le cas où  $\phi : H \rightarrow G$  n'est pas une inclusion, nous avons le résultat suivant:

**THÉORÈME 3.5.** *Désignons par  $H \rightarrow K^q \xrightarrow{\beta^q} G$  une  $\{q\}\{q\}'$ -factorisation de*

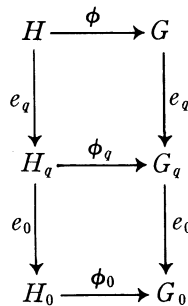
$H \xrightarrow{\phi} G$ . Si  $H$  et  $G$  sont nilpotents de type fini et si  $\ker \phi$  est de torsion, alors  $H \xrightarrow{\alpha^q} K^q \xrightarrow{\beta^q} G$ , où  $q$  parcourt  $\pi$ , est un "pull-back".

*Preuve.* Pour chaque premier  $q$ , nous avons un diagramme commutatif



Considérons le "pull-back"  $K \xrightarrow{\lambda^q} K^q \xrightarrow{\beta^q} G$ ; il existe un homomorphisme  $\mu : H \rightarrow K$  tel que  $\lambda^q \mu = \alpha^q$  pour chaque  $q$ . On voit facilement que  $\mu$  est injectif puisque si  $x \neq 1$  est un élément de  $H$ , alors  $e_q(x) \neq 1$  pour un certain  $q$ , d'où  $e_q \lambda^q \mu(x) \neq 1$ .

Montrons maintenant que  $\mu$  est surjectif. Il suffit pour cela de démontrer qu'il existe  $\nu : K \rightarrow H$  tel que  $\mu\nu = \text{Id}_K$ . Remarquons d'abord que le diagramme



est commutatif pour tout  $q \in \pi$  et que  $H$  (resp.  $G$ ) est le "pull-back" des  $H_q$  (resp.  $G_q$ ) sur  $H_0$  (resp.  $G_0$ ), la rationalisation de  $H$  (resp.  $G$ ) d'après [9], Théorème I.3.6, puisque  $H$  et  $G$  sont de type fini. De plus,  $\phi_0$  est injectif car  $\ker \phi$  est de torsion par hypothèse. L'homomorphisme  $\nu : K \rightarrow H$  est défini comme l'unique homomorphisme tel que  $e_q \nu = e_q \lambda^q$ ; on voit qu'un tel homomorphisme existe et est unique si on s'assure que  $e_0 e_q \lambda^q$  ne dépend pas de  $q$ . Puisque  $\phi_0$  est injectif, cela revient à montrer que  $\phi_0 e_0 e_q \lambda^q$  ne dépend pas de  $q$ , ce qui est clair car  $\phi_0 e_0 e_q \lambda^q = e_0 e_q \beta^2 \lambda^q$  ( $e_0 e_q$  est la rationalisation de  $G$ , donc ne dépend pas de  $q$  et  $K \xrightarrow{\lambda^q} K^q \xrightarrow{\beta^q} G$  est un "pull-back").

Il ne reste qu'à vérifier que  $\mu\nu = \text{Id}_k$  ce qui revient à montrer que  $\lambda^q = \lambda^q\mu\nu$  pour tout  $q$ . Puisque  $\lambda^q\mu = \alpha^q$ , il faut montrer que  $\lambda^q = \alpha^q\nu$  pour tout  $q$ . Or, comme

$$\begin{array}{ccc} K^q & \xrightarrow{\beta^q} & G \\ e_q \downarrow & & \downarrow e_q \\ H_q & \xrightarrow{\phi_q} & G_q \end{array}$$

est un "pull-back", l'égalité est bien vérifiée puisque d'une part  $e_q\lambda^q = e_q\alpha^q\nu$  et d'autre part  $\beta^q\lambda^q = \beta^q\alpha^q\nu$ ; cette dernière égalité découle de  $e_q\beta^q\lambda^q = \phi_q e_q\lambda^q = \phi_q e_q\nu = \phi_q e_q\alpha^q\nu = e_q\beta^q\alpha^q\nu$  et du fait que  $G \xrightarrow{e_q} G_q \xrightarrow{e_0} G$  est un "pull-back" d'après [9], Théorème I.3.6.

Si  $\ker \phi$  n'est pas de torsion, la conclusion n'est plus nécessairement vraie comme le montre l'exemple  $\phi: \mathbf{Z} \rightarrow 0$ ; on a alors la factorisation  $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_q \rightarrow 0$  pour chaque  $q$  mais  $\mathbf{Z}$  n'est pas le "pull-back" des  $\mathbf{Z}_q \rightarrow 0$ .

Nous remarquons que nous pouvons évidemment supprimer la condition que  $G$  soit de type fini. Cependant, nous ne savons pas si la condition que  $H$  soit de type fini est vraiment essentielle.

Nous remarquons enfin que si  $\phi: H \rightarrow G$  est une inclusion et si  $I_{\{q\}'}(H)$  désigne le  $\{q\}'$ -isolateur de  $H$  dans  $G$  (ou dans  $I_\pi(G)$ , ce qui revient au même), alors  $H$  est aussi le "pull-back" des inclusions  $I_{\{q\}'}(H) \hookrightarrow I_\pi(H)$ ; il serait donc naturel de remplacer dans le théorème précédent  $K^q \xrightarrow{\beta^q} G$  par  $K^q \xrightarrow{\gamma^q} K$  où  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  est une  $\pi'$ -factorisation de  $G$  et où l'homomorphisme  $\gamma^q$  est uniquement déterminé par les Propositions 1.2 et 1.3; il se pose cependant quelques difficultés dues au fait que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & H & & \\ & & \searrow \alpha & & \\ & & & & K \\ & \alpha^q \searrow & & \xrightarrow{\gamma^q} & K \\ & & K^q & & \downarrow e_q \\ e_q \downarrow & & \downarrow e_q & & \\ & & H_q & \xrightarrow{\alpha_q} & K_q \end{array}$$

le carré n'est pas nécessairement un "pull-back".

**4. Quelques autres propriétés des isolateurs.** Soit  $Q$  un groupe fixe. Si  $H$  et  $G$  sont des  $Q$ -groupes localement nilpotents et si  $\phi: H \rightarrow G$  est un

$Q$ -homomorphisme, on montre facilement que les homomorphismes  $\alpha$  et  $\beta$  d'une  $PP'$ -factorisation  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  de  $\phi$  sont également des  $Q$ -homomorphismes (ici  $H_P$  est muni de la  $Q$ -structure obtenue en localisant l'action de  $Q$  sur  $H$  puis alors  $K$  devient un  $Q$ -groupe en tant que "pull-back").

Pour tout  $Q$ -groupe  $G$ , nous désignons par  $G^Q$  le sous-groupe des éléments de  $G$  qui restent fixes sous l'action de  $Q$ . Pour tout homomorphisme  $\phi: H \rightarrow G$ , nous désignons par  $\phi^Q: H^Q \rightarrow G^Q$  l'homomorphisme induit par  $\phi$ .

**THÉORÈME 4.1.** *Soient  $H$  et  $G$  des  $Q$ -groupes nilpotents avec  $Q$  de type fini et soit  $\phi: H \rightarrow G$  un  $Q$ -homomorphisme. Si  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  est une  $PP'$ -factorisation de  $\phi$ , alors  $H^Q \xrightarrow{\alpha^Q} K^Q \xrightarrow{\beta^Q} G^Q$  est une  $PP'$ -factorisation de  $H^Q \xrightarrow{\phi^Q} G^Q$ .*

*Preuve.* Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \xrightarrow{\alpha} & K & \xrightarrow{\beta} & G \\
 & \searrow e & \downarrow e & & \downarrow e \\
 & & H_P & \xrightarrow{\phi_P} & G_P
 \end{array}$$

dans lequel le carré est cartésien. Nous obtenons par restriction un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H^Q & \xrightarrow{\alpha^Q} & K^Q & \xrightarrow{\beta^Q} & G^Q \\
 & \searrow e^Q & \downarrow e^Q & & \downarrow e^Q \\
 & & (H_P)^Q & \xrightarrow{\phi_P^Q} & (G_P)^Q
 \end{array} \tag{10}$$

Puisque  $H$  et  $G$  sont nilpotents et  $Q$  est de type fini, on a  $(G_P)^Q = (G^Q)_P$  et  $(H_P)^Q = (H^Q)_P$  d'après [10], Proposition 5.6; de plus,  $e^Q: H^Q \rightarrow (H_P)^Q$  et  $e^Q: G^Q \rightarrow (G_P)^Q$   $P$ -localisent. On voit tout de suite que le carré dans le diagramme (10) est cartésien et puisque  $e^Q: G^Q \rightarrow (G_P)^Q$  est  $P$ -bijetif, alors  $e^Q: K^Q \rightarrow (H_P)^Q$  est également  $P$ -bijetif. Enfin,  $e^Q: H^Q \rightarrow (H_P)^Q$  et  $e^Q: K^Q \rightarrow (H_P)^Q$  étant  $P$ -bijetifs, il en est de même de  $\alpha^Q: H^Q \rightarrow K^Q$ .

En utilisant le même procédé, on peut montrer des résultats similaires pour les termes des  $Q$ -suites centrales ascendantes et descendantes (voir [10]).

**THÉORÈME 4.2.** *Si  $Q$  est de type fini et si  $H$  et  $G$  sont nilpotents avec  $\exp T_{P'}(H)$  et  $\exp T_{P'}(G)$  finis, alors pour toute  $PP'$ -factorisation  $H \xrightarrow{\alpha} K \xrightarrow{\beta} G$  de  $H \xrightarrow{\phi} G$ ,  $v^i_Q H \xrightarrow{v^i_Q \alpha} v^i_Q K \xrightarrow{v^i_Q \beta} v^i_Q G$  est une  $PP'$ -factorisation de  $v^i_Q H \xrightarrow{v^i_Q \phi} v^i_Q G$ .*



THÉORÈME 4.3. Si  $H$  et  $G$  sont nilpotents,  $\Gamma^i_Q H \xrightarrow{\Gamma^i_Q \alpha} \Gamma^i_Q K \xrightarrow{\Gamma^i_Q \beta} \Gamma^i_Q G$  est une  $PP'$ -factorisation de  $\Gamma^i_Q H \xrightarrow{\Gamma^i_Q \phi} \Gamma^i_Q G$ .

On sait en effet d'après [10], Théorème 3.5, que si  $N$  est un  $Q$ -groupe qui est nilpotent comme groupe, alors  $\nu^i_Q(N_P) = (\nu^i_Q N)_P$  pourvu que  $Q$  soit de type fini et que  $\exp T_{P'}(N)$  soit fini. Par ailleurs, pour tout  $Q$ -groupe nilpotent  $N$ , on a  $\Gamma^i_Q(N_P) = (\Gamma^i_Q N)_P$  d'après [10], Corollaire 3.3. On procède alors comme dans la preuve du Théorème 4.1.

## BIBLIOGRAPHIE

1. G. Baumslag, *Lecture notes on nilpotent groups*, A.M.S. Regional Conference Series No. 2 (1971).
2. R. Botto Mura and A. H. Rhemtulla, *Solvable groups in which every maximal partial order is isolated*, Pacific J. Math. 51 (1974), 509–514.
3. ——— *Ordered solvable groups satisfying the maximal condition on isolated subgroups and groups with finitely many relatively convex subgroups*, J. Algebra 36 (1975), 38–45.
4. P. J. Freyd, and G. M. Kelly, *Categories of continuous functors I*, J. Pure and Applied Alg. 2 (1972), 169–191.
5. L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, (Pergamon Press, New York, 1963).
6. P. Hall, *Edmonton notes on nilpotent groups*, Queen Mary College Math. Notes (1969).
7. P. J. Hilton, *Localization and cohomology of nilpotent groups*, Math. Z. 132 (1973), 263–286.
8. ——— *On direct limits of nilpotent groups*, Lecture Notes in Math. 418, Springer (1974), 68–77.
9. P. J. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *Localization theory for nilpotent groups and spaces* (Notas de Mathematica, North Holland, 1975).
10. P. J. Hilton and U. Stambach, *On group actions on groups and associated series*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 80 (1976), 43–55.
11. ——— *On localization and isolators*, Houston J. Math. 2 (1976), 195–206.
12. A. I. Malcev, *Sur une classe d'espaces homogènes*, Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 13 (1949), 9–32 (en russe).
13. J. Meisen, *On bicategories of relations and pullback spans*, Comm. in Alg. 1 (1975), 377–401.
14. B. I. Plotkin, *Sur la théorie des groupes non-abéliens sans torsion*, Mat. Sb. 30 (1952), 197–212 (en russe).
15. U. Stambach, *Homology in group theory* (Lecture Notes in Math. 359, Springer, 1973).
16. R. B. Warfield, *Nilpotent groups* (Lecture Notes in Math. 513, Springer, 1976).

Université Laval,  
 Québec, Québec;  
 Case Western Reserve University,  
 Cleveland, Ohio