Canad. Math. Bull. Vol. 17 (1), 1974

ETATS ACCESSIBLES DANS UN PROCESSUS DE GALTON-WATSON

PAR
SERGE DUBUC

Si S est un ensemble dénombrable sur lequel porte une chaîne de Markov, si $p_n(x, y)$ est la probabilité de transition de x à y au n^e instant, on posera $A_n(x)$ la totalité des y de S tels que $p_n(x, y)>0$, ce sont les états accessibles à partir de x à l'instant n. Dans le cas de deux types de chaînes de Markov, nous recherchons des informations sur les états accessibles; ce sera premièrement les marches aléatoires sur Z et deuxièmement les processus de Galton-Watson sur $\mathbb{N}$. Nous recherchons en particulier les obstructions arithmétiques à ce qu'un état soit accessible.

1. **Marche aléatoire sur** Z. On considère une marche aléatoire sur les entiers relatifs $S=Z$. Définissons quelques paramètres qui permettront d'analyser les états accessibles à partir de 0 à l'instant $n:A_n=A_n(0)$. La période t de la marche est le générateur positif du sous-groupe engendré par $\{a-b:a \in A_1,\ b \in A_1\}$; on suppose que la marche est purement aléatoire, c'est-à-dire que A_1 contient au moins deux états. On remarque que tous les états de A_1 sont congrus entre eux modulo t. Puisque $A_{n+m}=A_n+A_m=\{x+y:x \in A_n,\ y \in A_m\}$, alors tous les états de A_n sont congrus entre eux. Ceci nous amène à notre première proposition.

PROPOSITION 1. *On considère une marche aléatoire sur les entiers relatifs de période t; soient a et b deux états accessibles au premier instant* ($a<b$), *alors il existe un entier naturel d tels que pour tous les entiers n* $\{x:na+d\leq x\leq nb-d,\ x\equiv na(\text{mod } t)\}$ *sont des états accessibles à l'instant n à partir de* 0.

DÉMONSTRATION. On choisit des états de A_1, $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, de telle sorte que a et b font partie de ces états et le sous-groupe engendré par a_1-a_0, $a_2-a_0, \ldots,$ (a_k-a_0) contient le nombre t. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a=a_0$ et $b=a_k$, $a_0<a_1<\cdots<a_k$. Quitte à translater la marche aléatoire, on peut également supposer que $a=0$.

Si S_n est la marche aléatoire, $S'_n=(S_n-na)/t$ est une marche aléatoire dont les états accessibles A'_n sont $\{(c-na)/t:c \in A_n\}$. Cette observation permet donc de supposer que $a=0$, $t=1$. On remarque alors que

$$A_n \supseteq \left\{\sum_{i=1}^{k} n_i a_i : n_i \in \mathbb{N}\ \sum_{i=1}^{k} n_i \leq n\right\}.$$

On peut représenter les nombres $r=1, 2, \ldots, b-1$ par une combinaison linéaire des a_i à coefficients entiers:

$$r = \sum_{i=1}^{k} n(i, r)a_i.$$

On peut même supposer que $n(i, r) \geq 0$ si $i \neq k$. Posons

$$d_1 = \max\{-n(k, r) : r = 1, 2, \ldots, b-1\}$$

et

$$d_2 = \max\left\{\sum_{i=1}^{k} n(i, r) : r = 1, 2, \ldots, b-1\right\}$$

et

$$d = \max(d_1 b, d_2 b).$$

Alors si x est un entier de l'intervalle $[d, nb-d]$, on peut écrire x sous la forme $Lb+r (0 \leq r < b)$. D'où

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} n(i, r)a_i + (L+n(k, r))b$$

et

$$L+n(k, r) \geq 0$$

car

$$L \geq d_1.$$

D'autre part

$$L + \sum_{i=1}^{k} n(i, r) \leq L+d_2 \leq n.$$

Ce qui montre que x appartient à A_n.

2. **Processus de Galton-Watson.** On considère un processus de Galton-Watson. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des états, $\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ est la chaîne de Markov. Ce qui nous importe, ce sont les états accessibles à partir de 1 à l'instant n. Nous nous intéressons donc au cas où $Z_0=1$. Nous posons pour cette section $A_n=A_n(1)$. On suppose que le processus est purement aléatoire, c'est-à-dire que A_1 contient au moins deux états. On définit la période du processus comme le générateur positif du sous-groupe engendré par $\{a-b : a \in A_1,\ b \in A_1\}$. On remarque que tous les états de A_1 sont congrus entre eux modulo t. Soit r un entier congru à l'un ou l'autre des états de A_1. On montre par récurrence sur n que tous les états accessibles à partir de 1 à l'instant n sont congrus à r^n modulo t. Il suffit d'observer que

$$A_{n+1} = \{x_1+x_2+\cdots+x_m : m \in A_n,\ x_i \in A_1\} \tag{1}$$

Proposition 2. *On considère un processus de Galton-Watson de période t, soient a et b $(a<b)$ deux états accessibles au premier instant à partir d'un individu, alors il existe un nombre naturel d tel que pour tous les entiers n, $\{x : a^n+d \leq x \leq b^n-d,\ x \equiv a^n (\mathrm{mod}\ t)\}$ sont des états accessibles à l'instant n à partir d'un individu.*

Démonstration. On choisit des états de A_1, $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, de telle sorte que a et b font partie de ces états et le sous-groupe engendré par a_1-a_0, $a_2-a_0, \ldots,$

$a_k - a_0$ contient le nombre t. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$. Il est d'abord facile de vérifier par récurrence sur n que A_n contient la progression arithmétique de raison $b-a$ allant de a^n à b^n: si $m \in A_n$, alors la progression arithmétique de raison $b-a$ allant de ma à mb appartient à A_{n+1} d'après la loi (1). On remarque maintenant que $A_{n+1} = \{A_1(x) + A_1(y) : x+y \in A_n\}$. La proposition 1 nous assure que l'on peut trouver des entiers naturels x, α et β tels que $\beta - \alpha \geq t(b-a)$ et $A_1(x) \supseteq \{u : \alpha \leq u \leq \beta,\ u \equiv xa (\text{mod } t)\}$. Ceci vient du fait que $A_1(x) = \{u_1 + u_2 + \cdots + u_x : u_i \in A_1\}$. D'où A_{n+1} contient les éléments de la forme $u+v$ où $\alpha \leq u \leq \beta$, $u \equiv xa (\text{mod } t)$ et v appartient à la progression arithmétique de raison $b-a$ allant de $(a^n - x)a$ à $(b^n - x)b$. On suppose que n est suffisamment grand ($a^n \geq x$ et $(a^n - x)a \leq (b^n - x)b$). Sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha \equiv \beta \equiv xa (\text{mod } t)$. D'où A_{n+1} contient la progression arithmétique de raison t qui va de $(a^n - x)a + \alpha$ à $(b^n - x)b + \beta$. Il suffit de prendre pour d le plus grand des deux nombres $\alpha - xa$ et $\beta - xb$ pour que la proposition 2 soit établie.

Département de mathématiques,
Université de Sherbrooke