SUR LE RADICAL CORPOÏDAL D'UN ANNEAU

G. THIERRIN

Le radical d'un anneau, dans le sens général de N. Jacobson (**1**; **2**), peut être caractérisé de plusieurs manières. On peut, par exemple, le définir comme l'intersection de tous les idéaux primitifs de l'anneau envisagé. Dans ce travail, nous considérons une classe particulière d'idéaux primitifs, la classe des idéaux corpoïdaux: un idéal est dit corpoïdal si et seulement si l'anneau-quotient correspondant est un corps.[1] L'objet principal de ce travail est de donner quelques caractérisations de l'intersection C de tous les idéaux corpoïdaux d'un anneau A, intersection appelée le radical corpoïdal de l'anneau A. Si C est distinct de A,. l'anneau-quotient A/C est isomorphe à une somme sous-directe de corps Dans le cas d'un anneau commutatif, tout idéal primitif est corpoïdal, et par conséquent son radical corpoïdal coïncide avec son radical.[2]

1. Anneaux et modules interversifs. Un anneau A est dit *interversif à droite*, si l'on a

$$abA = baA, \text{ quels que soient } a, b \in A.$$

Un idéal H d'un anneau A est dit *interversif à droite*, si l'anneau-quotient A/H est interversif à droite. On voit facilement qu'un idéal H est interversif à droite, si et seulement si pour tout triple $a, b, c \in A$, il existe $x \in A$ tel que l'on ait

$$abc \equiv bax \quad (H).$$

Il s'ensuit que tout idéal contenant un idéal interversif à droite est interversif à droite. En particulier, tout idéal d'un anneau interversif à droite est interversif à droite.

Rappelons qu'un anneau A est dit *réflecteur à droite*, si, pour tout idéal à droite H de A, la relation $ab \in H$ entraîne $ba \in H$ (**3**).

THÉORÈME 1. *Pour qu'un anneau A possédant un élément unité soit interversif à droite, il faut et il suffit qu'il soit réflecteur à droite.*

La condition est nécessaire. Si $ab \in H$, où H est un idéal à droite de A, on a $abA = baA \subseteq H$. D'où $ba \in H$.

La condition est suffisante. Soient $a, b, c \in A$. L'anneau A étant réflecteur à droite et possédant un élément unité, il existe, d'après (**3**), un élément x tel

Reçu le 15 Décembre, 1958.

[1] Par corps, nous entendons un anneau dont l'ensemble des éléments distincts de zéro forme un groupe pour la multiplication.

[2] La nomenclature de ce travail est celle de N. Jacobson (**1**).

que l'on ait $ab = bax$. Par conséquent, $abc = baxc$ et l'idéal (0) est interversif à droite.

Remarquons que tout idéal à droite d'un anneau interversif à droite possédant un élément unité est un idéal bilatère.

Un A-module[3] M est dit *interversif*, si l'on a

$$uabA = ubaA, \text{ quels que soient } u \in M,\ a, b \in A.$$

Si l'anneau A est interversif à droite, tout A-module est évidemment interversif.

THÉORÈME 2. *Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il existe un A-module M irréductible, fidèle et interversif.*

La condition est nécessaire. En effet, il suffit de prendre $M = A$.

La condition est suffisante. Le A-module M étant irréductible, si $0 \neq u \in M$, on a, d'après (**1**, ch. I), $M = uA \cong A - (0 : u)$, où $(0 : u) = J$ est un idéal à droite modulaire maximal. Soient $t \in J$ et $x \in A$; on a $txA \subseteq J$ et $utxA = uxtA = 0$. D'où $xtA \subseteq J$. L'ensemble

$$J^{\cdot} . A = \{a | a \in A, aA \subseteq J\}$$

est un idéal à droite de A et $J \subseteq J^{\cdot} . A$. On a donc soit $J^{\cdot} . A = J$, soit $J^{\cdot} . A = A$. Si $J^{\cdot} . A = A$, on a $A^2 \subseteq J$, ce qui est impossible puisque J est modulaire. Par conséquent $J^{\cdot} . A = J$. Comme $xt \in J^{\cdot} . A$, on a $xt \in J$ et donc J est un idéal bilatère. Soit $N = \{v | v \in M, vJ = 0\}$. Cet ensemble N est un sous-module de M et $u \in N$. Donc $N \neq 0$ et, puisque M est irréductible, $N = M$, ce qui entraîne $J \subseteq (0 : M)$. Comme M est fidèle, on a $(0 : M) = 0$. Par conséquent, $J = 0$ et A est un corps.

COROLLAIRE. *Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il soit primitif et interversif à droite.*

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. En effet, l'anneau A étant primitif, il existe un A-module M irréductible et fidèle. Comme A est interversif à droite, le module M est interversif, et donc A est un corps, d'après le théorème.

Un idéal K d'un anneau A est dit *corpoïdal*, si l'anneau-quotient A/K est un corps. On voit facilement qu'un idéal est corpoïdal, si et seulement s'il est un idéal à droite modulaire maximal.

THÉORÈME 3. *Pour qu'un idéal K d'un anneau A soit corpoïdal, il faut et il suffit qu'il existe un A-module M irréductible et interversif, tel que l'on ait $K = (0 : M)$.*

La condition est nécessaire. L'anneau-quotient A/K étant un corps, il existe, d'après le théorème 2, un A/K-module M irréductible, fidèle et interversif. Mais ce A/K-module M peut aussi être considéré comme un A-module.

[3]Dans ce travail, le terme "module" signifie toujours module à droite.

Le A-module M est également irréductible et l'on a $K = (0 : M)$. Montrons que le A-module M est interversif. Soient $a, b \in A$ et $u \in M$. Si $u = 0$, on a évidemment $uabA = ubaA = 0$. Soit $u \neq 0$. Si $ab \in K$, alors $ba \in K$. De $abA \subseteq K$ et $baA \subseteq K$ suit $uabA = ubaA = 0$. Si $ab \notin K$, alors $ba \notin K$, $abA \not\subseteq K$ et $baA \not\subseteq K$. Comme K est un idéal à droite maximal, on a

$$A = K + abA = K + baA.$$

L'élément u étant différent de zéro, on a, puisque M est un A-module irréductible, $uA = M$. D'où

$$uA = uK + uabA = uK + ubaA = M.$$

Comme $uK = 0$, on a par conséquent

$$uabA = ubaA = M.$$

La condition est suffisante. En effet, M peut être considéré comme un A/K-module irréductible et fidèle, car on a $K = (0 : M)$ et M est un A-module irréductible. On voit d'autre part facilement que M, considéré comme A/K-module, est aussi interversif. Parconséquent l'anneau-quotient A/K est, d'après le théorème 2, un corps.

2. Radical corpoïdal. Soient A un anneau quelconque et $\sum$ l'ensemble des A-modules M_i irréductibles et interversifs. Le noyau C de $\sum$, c'est-à-dire l'ensemble $C = \bigcap\{(0 : M_i) | M_i \in \sum\}$ est appelé le *radical corpoïdal* de A. Si $\sum$ est vide, le radical corpoïdal de A est, par définition, A lui-même.

Si R est le radical[4] de A, $R \subseteq C$. Si A est interversif à droite, $R = C$.

THÉORÈME 4. *S'il est distinct de A, le radical corpoïdal C d'un anneau A est l'intersection des idéaux corpoïdaux de A.*

C'est immédiat, d'après le théorème 3.

Un anneau A est dit *c-semi-simple,* si $A \neq 0$ et si le radical corpoïdal de A se réduit à 0.

THÉORÈME 5. *Si le radical corpoïdal C de l'anneau A est distinct de A, l'anneau-quotient A/C est c-semi-simple.*

L'intersection des idéaux corpoïdaux de A étant C d'après le théorème 4, il s'ensuit facilement que l'intersection des idéaux corpoïdaux de A/C se réduit à zéro. Donc A/C est c-semi-simple.

THÉORÈME 6. *Un anneau A est isomorphe à une somme sous-directe de corps, si et seulement s'il est c-semi-simple.*

Si A est c-semi-simple, l'idéal (0) est l'intersection des idéaux corpoïdaux K_i de A. Par conséquent, A est isomorphe à une somme sous-directe des

[4]Les notions de radical et de semi-simplicité d'un anneau sont, dans ce travail, prises dans le sens général de Jacobson **(1, 2)**.

anneaux-quotients A/K_i qui sont des corps. Inversement, il est immédiat que si A est isomorphe à une somme sous-directe de corps, A est c-semi-simple.

3. Eléments c-quasi-réguliers. Si a est un élément fixé d'un anneau A, on désigne d'après Jacobson **(1)** (même si A ne contient pas d'élément unité) par $(1 - a)A$ l'idéal à droite $\{x - ax | x \in A\}$ et par $A(1 - a)$ l'idéal à gauche $\{x - xa | x \in A\}$.

Un élément z de A est dit *c-quasi-régulier*, si l'idéal à droite $(1 - z)A$ n'est contenu dans aucun idéal corpoïdal de A.

THÉORÈME 7. *Un élément z de A est c-quasi-régulier si et seulement si l'idéal à gauche $A(1 - z)$ n'est contenu dans aucun idéal corpoïdal de A.*

La démonstration de ce théorème découle immédiatement du lemme suivant:

LEMME 1. *Si K est un idéal corpoïdal de l'anneau A, les relations $x - ax \in K$ et $x - xa \in K$ sont équivalentes.*

Montrons par exemple que $x - ax \in K$ entraîne $x - xa \in K$. Si $x \in K$, c'est immédiat. Si $x \notin K$, il existe, puisque K est corpoïdal, des éléments e et x' tels que $ye \equiv y(K)$ pour tout $y \in A$ et $xx' \equiv e(K)$. De $x - ax \in K$ suit $x \equiv ax(K)$, $xx' \equiv axx'(K)$, $e \equiv ae \equiv a(K)$. D'où $x \equiv xe \equiv xa(K)$, c'est-à-dire $x - xa \in K$.

Remarquons que tout élément quasi-régulier à droite ou à gauche est c-quasi-régulier.

THÉORÈME 8. *Un élément z de A est c-quasi-régulier si et seulement si l'idéal A est le seul idéal interversif à droite contenant* $(1 - z)A$.

Supposons que z soit c-quasi-régulier. S'il existe un idéal interversif à droite H différent de A contenant $(1 - z)A$, cet idéal H est modulaire, donc contenu dans un idéal à droite (modulaire) maximal J. L'idéal $P = J \,.^{\boldsymbol{\cdot}} A = \{a | a \in A, Aa \subseteq J\}$ est primitif et $H \subseteq P$. Comme H est interversif à droite, P l'est également. Par conséquent, l'anneau-quotient A/P est primitif et interversif à droite, donc un corps d'après le corollaire du théorème 2. L'idéal P est par suite corpoïdal et contient $(1 - z)A$, contre l'hypothèse. Inversement, il est immédiat que si A est le seul idéal interversif à droite contenant $(1 - z)A$, il n'existe pas d'idéal corpoïdal contenant $(1 - z)A$, car tout idéal corpoïdal est interversif à droite.

Un idéal à droite de A est dit *c-quasi-régulier*, si tous ses éléments sont c-quasi-réguliers.

THÉORÈME 9. *Le radical corpoïdal C d'un anneau A est un idéal c-quasi-régulier, contenant tout idéal à droite c-quasi-régulier.*

Soit $z \in C$. Si z n'est pas c-quasi-régulier, $(1 - z)A$ est contenu dans un

https://doi.org/10.4153/CJM-1960-009-2 Published online by Cambridge University Press

idéal corpoïdal K. D'après le théorème 4, $z \in K$. Si x est un élément quelconque de A, on a $x - zx \in K$ et donc $x \in K$. D'où $K = A$, ce qui est impossible. Par conséquent, tout élément de C est c-quasi-régulier.

Soit T un idéal à droite c-quasi-régulier et soit $z \in T$. L'élément zx est c-quasi-régulier pour tout $x \in A$. Si $z \notin C$, il existe un A-module M irréductible et interversif tel que $z \notin (0 : M)$. Posons $K = (0 : M)$; K est un idéal corpoïdal d'après le théorème 3. Il existe $u \in M$, tel que $uz \neq 0$ et l'on a $uzA = M$, puisque M est irréductible. Par conséquent, il existe $a \in A$ tel que $uza = u$. L'élément za étant c-quasi-régulier, on a donc $(1 - za)A \nsubseteq K$. L'idéal K est un idéal à droite maximal; d'où $(1 - za)A + K = A$. Il existe donc $x \in A$ et $k \in K$ tel que l'on ait $x - zax + k = - za$, c'est-à-dire $za + x - zax = - k \in K$. On a d'autre part $0 = u - uza - (u - uza)x = u - u(za + x - zax) = u + uk$. De $k \in K$ suit $uk = 0$ et donc $u = 0$, ce qui est impossible, puisque $uz \neq 0$. Par conséquent, $z \in C$ et $T \subseteq C$.

4. Noyau d'interversion. Un complexe[5] H d'un anneau quelconque A est dit un *complexe d'interversion à droite*, si l'on a $abH = baH$, quels que soient $a, b \in A$. L'élément zéro est un complexe d'interversion à droite. Tout idéal à droite minimal D, qui est un idéal bilatère, est un complexe d'interversion à droite; cela découle du fait que l'on a alors $xD = 0$ ou $xD = D$, pour tout $x \in A$.

On voit facilement qu'un complexe H est un complexe d'interversion à droite, si et seulement si pour tout couple $a, b \in A$ et tout $h \in H$, il existe $h' \in H$ tel que l'on ait $abh = bah'$.

La réunion T de tous les complexes d'interversion à droite de A est appelée le *noyau d'interversion à droite* de A.

THÉORÈME 10. *Si H et K sont des complexes d'interversion à droite de l'anneau A, les complexes HA, AH, $H^* = \{-h/h \in H\}$ et $H + K = \{h + k | h \in H, k \in K\}$ sont des complexes d'interversion à droite.*

De $abH = baH$, quels que soient $a, b \in A$, suit $abHA = baHA$. Donc HA est un complexe d'interversion à droite.

Soit ensuite $vh \in AH$, avec $v \in A$, $h \in H$. Il existe $h' \in H$ tel que $abvh = bvah'$ et $h'' \in H$ tel que $vah' = avh''$. D'où $abvh = bvah' = bavh''$, avec $vh'' \in AH$. Par conséquent, AH est un complexe d'interversion à droite.

Le complexe H^* est un complexe d'interversion à droite, car, si $h \in H$, il existe $h' \in H$ tel que $abh = bah'$; d'où $ab(-h) = ba(-h')$. Montrons enfin que $H + K$ est un complexe d'interversion à droite. Si $h \in H$, $k \in K$, il existe $h' \in H$, $k' \in K$ tels que $abh = bah'$ et $abk = bak'$. D'où $ab(h + k) = ba(h' + k')$.

THÉORÈME 11. *Le noyau T d'interversion à droite d'un anneau A est un*

[5]Par complexe d'un anneau A, nous entendons toute partie non vide de A.

complexe d'interversion à droite, un idéal bilatère et un anneau interversif à droite.

Soient $a, b \in A$ et $t \in T$. Il existe un complexe d'interversion à droite H contenant l'élément t. Par conséquent, il existe $t' \in H \subseteq T$ tel que $abt = bat'$, ce qui montre que T est un complexe d'interversion à droite.

Soient $x, y \in T$. Du théorème 10 et du fait que T est un complexe d'interversion à droite contenant tous les complexes d'interversion à droite de A, on déduit que $-y \in T$ et $x - y \in T$, ce qui montre que T est un sous-groupe additif. Les complexes AT et TA étant, d'après le théorème 10, des complexes d'interversion à droite, on a donc AT $\subseteq T$ et $TA \subseteq T$. Par conséquent, T est un idéal bilatère.

Il est immédiat que T est un anneau interversif à droite.

THÉORÈME 12. *Si R est le radical et T le noyau d'interversion à droite d'un anneau A, le radical corpoïdal de l'anneau T est l'ensemble $T \cap R$.*

Le noyau T étant un idéal bilatère, son radical est, d'après Jacobson (**1**, ch. I), l'ensemble $T \cap R$. Comme T est un anneau interversif à droite, son radical corpoïdal coïncide avec son radical.

COROLLAIRE. *S'il est distinct de zéro, le noyau d'interversion à droite d'un anneau semi-simple est isomorphe à une somme sous-directe de corps.*

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Jacobson, *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., **37**, 1956.

2. ——— *The radical and semi-simplicity for arbitrary rings*, Amer. J. Math., *67* (1945), 300–320.

3. G. Thierrin, *Contribution à la théorie des anneaux et des demi-groupes*, Comm. Math. Helv., *32* (1957), 93–112.

Université de Montréal