Canad. Math. Bull. Vol. 30 (4), 1987

ANNEAUX DE BEZOUT, HERMITE ET KAPLANSKY "UNIVERSELS"

PAR
PHILIPPE CARBONNE

RÉSUMÉ. Les anneaux de Kaplansky sont aussi connus sous le nom d'anneaux à diviseurs élémentaires.

On construit pour un cardinal donné un anneau de Bezout (resp. Hermite, resp. Kaplansky) tel que tout anneau de même cardinal de la même classe soit un quotient de l'anneau construit.

Comme application on montre que l'on a ainsi des contre-exemples nouveaux à deux problèmes classiques. On réduit aussi un troisième problème, posé par Kaplansky, sans arriver à le résoudre.

Introduction. Le but de cet article est de construire, pour chaque cardinal, des anneaux de Bezout, Hermite et Kaplansky "universels". Ils sont "universels" en ce sens que tout anneau de la même classe et de même cardinalité est un quotient de l'anneau que nous construisons. Nous verrons, en application, que nous obtenons de nouveaux contre-exemples à des problèmes naturels.

Les anneaux envisagés sont commutatifs et unitaires.

Un anneau A est dit de Bezout si, pour tout a et tout b appartenant à A, il existe d, u, v, s et t dans A, tels que :

$$\begin{cases} d = au + bv \\ a = sd \\ b = td \end{cases}$$

i.e. : $dA = aA + bA$.

Un anneau d'Hermite A est caractérisé par la propriété que pour tout a et tout b appartenant à A, il existe d, u, v, s et t dans A, tels que :

$$\begin{cases} 1 = us + vt \\ a = sd \\ b = td \end{cases}$$

Les *anneaux de Kaplansky* ont été introduits dans [1] sous le nom *d'anneaux à diviseurs élémentaires* comme les anneaux possédant une propriété de réduction

Reçu par le redaction le 26 mai 1986.
AMS Subject Classification Number: 13A05.

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-068-0 Published online by Cambridge University Press

des matrices.

Il est prouvé dans [4] le résultat suivant :

PROPOSITION 1.

Un anneau de Kaplansky est un anneau d'Hermite possédant la propriété suivante — qui sera dite : "propriété K" — :

Pour tout triplet (a, b, c) *d'éléments de* A *tel que :*

$$aA + bA + cA = A,$$

is existe q *et* r, *dans* A, *tels que :*

$$qaA + (qb + rc)A = A.$$

Il est clair que *les classes respectives des anneaux de Bezout, d'Hermite et de Kaplansky sont stables par passage au quotient par un idéal.* (Pour les anneaux de Kaplansky cela résulte de leur définition telle qu'elle est donnée dans [1]). Signalons par ailleurs que les anneaux de Kaplansky se caractérisent aussi par la propriété suivante :

Tout module de présentation finie est somme directe de modules monogènes. ([6] th. 3.8. p. 241).

I. Construction simultanée d'un anneau de Bezout et d'un anneau d'Hermite (dénombrables) "universels".

I.1. A est un anneau dénombrable. Je définis l'anneau :

$$\varphi(A) = A[D_{a,b}, U_{a,b}, V_{a,b}, S_{a,b}, T_{a,b}]_{(a,b) \in A^2}$$

puis, par récurrence à partir de $\varphi^0(A) = A$, on pose : $\varphi^n(A) = \varphi[\varphi^{n-1}(A)]$ pour $n \geqq 1$. On introduit alors deux idéaux de $\varphi^n(A)$:

$$I_n(A) = (D_{a,b} - aU_{a,b} - bV_{a,b}, a - S_{a,b}D_{a,b}, b - T_{a,b}D_{a,b})_{(a,b) \in (\varphi^{n-1}(A))^2}$$

et :

$$J_n(A) = (1 - U_{a,b}S_{a,b} - V_{a,b}T_{a,b}, a - S_{a,b}D_{a,b}, b - T_{a,b}D_{a,b})_{(a,b) \in (\varphi^{n-1}(A))^2}$$

ceci pour $n \geqq 1$. Par convention $I_0(A) = J_0(A) = (0)$.
On définit ensuite : $B(A) = \cup_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(A)$ et $I(A)$ et $J(A)$ désignent les idéaux de $B(A)$ respectivement engendrés par $\cup_{n \in \mathbf{N}} I_n(A)$ et $\cup_{n \in \mathbf{N}} J_n(A)$.

PROPOSITION 2.

$$A^b = {}^{B(A)}/_{I(A)} \text{ est un anneau de Bezout dénombrable.}$$

$$A^h = {}^{B(A)}/_{J(A)} \text{ est un anneau d'Hermite dénombrable.}$$

PREUVE. A étant dénombrable, A^b et A^h le sont aussi.

Deux éléments quelconques l et m de A^b admettent des représentants L et M

dans $B(A)$. Il existe n tel que L et M sont dans $\varphi^n(A)$. Mais alors :

$$D_{L,M} - LU_{L,M} - MV_{L,M},\ L - S_{L,M}D_{L,M},\ M - T_{L,M}D_{L,M}$$

sont dans $I_{n+1}(A)$, donc dans $I(A)$. Par suite, en prenant les classes modulo $I(A)$:

$$\begin{cases} \bar{D}_{L,M} - l\bar{U}_{L,M} - m\bar{V}_{L,M} = 0 \\ l - \bar{S}_{L,M} \cdot \bar{D}_{L,M} = 0 \\ m - \bar{T}_{L,M} \cdot \bar{D}_{L,M} = 0, \end{cases}$$

q.e.d.

On procède de même pour A^h.

Remarque 1.
La même construction est possible, mutatis mutandi, pour des anneaux de cardinalité quelconque.

I.2. Nous allons étudier maintenant le prolongement des homomorphismes surjectifs.

Lemme 1.
Un homomorphisme ω surjectif de A sur un autre anneau dénombrable A' se prolonge en un homomorphisme surjectif, encore noté ω, de $\varphi(A)$ sur $\varphi(A')$ et tel que :

$$\omega(I_1(A)) \subset I_1(A')$$
$$\omega(J_1(A)) \subset J_1(A').$$

Preuve. Soit $(a, b) \in A^2$ et soient $a' = \omega(a)$ et $b' = \omega(b)$. Nous posons alors : $\omega(W_{a,b}) = W_{a',b'}$, pour $W = D, U, V, S, T$.

Proposition 3.
Tout homomorphisme surjectif de A sur A' nous donne de façon naturelle un homomorphisme surjectif de A^b sur A'^b et un homomorphisme surjectif de A^k sur A'^k.

En effet par le lemme 1 on définit, de proche en proche, un homomorphisme ω surjectif de $\varphi^n(A)$ sur $\varphi^n(A')$, donc de $B(A)$ sur $B(A')$.

En remarquant que :

$$I_n(A) = I_1(\varphi^{n-1}(A)), \text{ et que : } J_n(A) = J_1(\varphi^{n-1}(A)),$$

on obtient :

$$\omega(I_n(A)) \subset I_n(A'), \text{ et : } \omega(J_n(A)) \subset J_n(A'),$$

pour tout n.

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-068-0 Published online by Cambridge University Press

D'où :

$$\omega(I(A)) \subset I(A'), \text{ et : } \omega(J(A)) \subset J(A').$$

On termine en passant au quotient.

PROPOSITION 4.
Si A est un anneau de Bezout (resp. d'Hermite), il existe un homomorphisme surjectif de A^b (resp. de A^h) sur A.

PREUVE. Soit A un anneau de Bezout (resp. d'Hermite) dénombrable et ρ un homomorphisme surjectif d'un anneau A', dénombrable, sur A.

Alors ρ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\rho}$ surjectif de $\varphi(A')$ sur A, s'annulant sur $I_1(A')$ (resp. sur $J_1(A')$).

En effet soit $(a', b') \in A^2$. Alors : $a = \rho(a')$ et $b = \rho(b')$ sont dans A. Il existe $d_{a,b}$, $u_{a,b}$, $v_{a,b}$, $s_{a,b}$, $t_{a,b}$ dans A tels que :

$$\begin{cases} d_{a,b} = au_{a,b} + bv_{a,b} \text{ (resp. } 1 = u_{a,b}s_{a,b} + v_{a,b}t_{a,b}) \\ a = s_{a,b}d_{a,b} \\ b = t_{a,b}d_{a,b} \end{cases}$$

Je pose :

$\tilde{\rho}(W_{a',b'}) = w_{a,b}$ pour : $W = D, U, V, S$ et T, et : $w = d, u, v, s$ et t, respectivement.

Prenant $A' = A$ et définissant, par récurrence à partir de $\rho_0 = id_A$, ρ_n (pour $n \geqq 1$) par : $\rho_n = \tilde{\rho}_{n-1}$, on obtient un homomorphisme ρ surjectif de $B(A)$ sur A. (Par définition de ρ, sa restriction à $\varphi^n(A)$ est ρ_n). ρ s'annule sur $I(A)$ (resp. $J(A)$). Le passage au quotient par cet idéal donne le résultat.

THÉORÈME 1.
Tout anneau de Bezout (resp. d'Hermite) dénombrable est quotient de l'anneau de Bezout (resp. d'Hermite) dénombrable :

$$B = \mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_n, \ldots]^b \text{ (resp. } H = \mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_n, \ldots]^h).$$

Réciproquement, tout quotient de B (resp. de H) est un anneau de Bezout (resp. d'Hermite) dénombrable.

En effet si A est un anneau de Bezout (resp. Hermite) dénombrable, il existe un homomorphisme surjectif de $\mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_n, \ldots]$ sur A. Les propositions 3 et 4 donnent alors le résultat. La réciproque résulte de la proposition 2.

II. Construction simultanée d'un anneau d'Hermite et d'un anneau de Kaplansky (dénombrables) "universels".

II.1. A étant un anneau dénombrable et $\mathscr{A}_A$ un idéal de A, je pose :

$$N_A = \{(a, b, c) \in A^3 | aA + bA + cA + \mathscr{A}_A = A\}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-068-0 Published online by Cambridge University Press

Je définis alors les anneaux :

$$\Psi(A) = A[Q_{a,b,c}, R_{a,b,c}, Y_{a,b,c}, Z_{a,b,c}]_{(a,b,c)\in N_A}$$

et :

$$\Theta(A) = \varphi(\Psi(A)); \ \varphi \text{ est défini dans la partie I.}$$

$G(A)$ est l'idéal de $\Theta(A)$ engendré par les polynômes :

$1 - S_{p,q}U_{p,q} - T_{p,q}V_{p,q}, p - S_{p,q}D_{p,q}, q - T_{p,q}D_{p,q}$, pour $(p, q) \in (\Psi(A))^2$.

$F(A)$ est l'idéal de $\Theta(A)$ engendré par $G(A)$ et tous les polynômes : $1 - aQ_{a,b,c}Y_{a,b,c} - (bQ_{a,b,c} + cR_{a,b,c})Z_{a,b,c}$, pour tous les (a, b, c) de N_A. Par construction : $G(A) \subset F(A)$.

De proche en proche on définit les anneaux A_n ($n \in \mathbf{N}$) et les idéaux $\mathscr{A}_{A_n}$ par :

$A_0 = A$, $\mathscr{A}_{A_0} = (0)$; $A_n = \Theta^n(A)$, pour : $n \geqq 1$, et $\mathscr{A}_{A_n}$ est l'idéal engendré par : $\cup_{m<n} F(A_m)$, pour : $n \geqq 1$.

On note : $C(A) = \cup_{n\geqq 0} A_n$, $L(A)$ l'idéal de $C(A)$ engendré par : $\cup_{n\in\mathbf{N}} G(A_n)$ et $K(A)$ l'idéal de $C(A)$ engendré par : $\cup_{n\in\mathbf{N}} F(A_n)$.

PROPOSITION 5.

$A^{h'} = {}^{C(A)}/_{L(A)}$ *est un anneau d'Hermite dénombrable.*

$A^k = {}^{C(A)}/_{K(A)}$ *est un anneau de Kaplansky dénombrable.*

PREUVE. A étant dénombrable, $A^{h'}$ et A^k le sont aussi. $A^{h'}$ et A^k sont des anneaux d'Hermite en vertu du raisonnement fait dans la partie I.

Soient α, β, γ des éléments de A^k tels que : $\alpha A^k + \beta A^k + \gamma A^k = A^k$. Notons a, b, c des représentants respectifs dans $C(A)$. Il existe alors e, f et g dans $C(A)$ et h dans $K(A)$, tels que :

$$ea + fb + gc + h = 1.$$

Il existe n tel que a, b, c, e, f, g sont dans A_n et h dans $\mathscr{A}_{A_n}$. D'où :

$$aA_n + bA_n + cA_n + \mathscr{A}_{A_n} = A_n. \text{ Donc : } (a, b, c) \in N_{A_n}.$$

$1 - aQ_{a,b,c}Y_{a,b,c} - (bQ_{a,b,c} + cR_{a,b,c})Z_{a,b,c}$ est dans $F(A_n)$ et donc dans $K(A)$. En passant au quotient, nous avons :

$$1 - \alpha\bar{Q}_{a,b,c}\bar{Y}_{a,b,c} - (\beta\bar{Q}_{a,b,c} + \gamma\bar{R}_{a,b,c})\bar{Z}_{a,b,c} = 0, \text{ dans } A^k.$$

REMARQUE 2.

Ici aussi la même construction est possible, mutatis mutandi, pour des anneaux de cardinalité quelconque.

II.2. Nous allons étudier ici aussi le prolongement des homomorphismes surjectifs.

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-068-0 Published online by Cambridge University Press

LEMME 2.

A et A' sont deux anneaux dénombrables; $\mathscr{A}_A$ et $\mathscr{A}_{A'}$ deux idéaux de A et A' respectivement.

ω est un homomorphisme surjectif de A sur A', tel que :

$$\omega(\mathscr{A}_A) \subset \mathscr{A}_{A'}.$$

Alors : $(\omega \times \omega \times \omega)(N_A) \subset N_{A'}$ et il existe un homomorphisme surjectif, encore noté ω, qui prolonge ω de : $A_1 = \Theta(A)$ sur $A'_1 = \Theta(A')$, et tel que : $\omega(\mathscr{A}_{A_1}) \subset \mathscr{A}_{A'_1}$, et : $\omega(G(A)) \subset G(A')$.

PREUVE. Soit : $(a, b, c) \in N_A$. Il existe e, f, g dans A et h dans $\mathscr{A}_A$ tels que :

$$ea + fb + gc + h = 1.$$

En notant : $l' = \omega(l)$, pour : $l = a, b, c, e, f, g$ et h, il vient :

$$e'a' + f'b' + g'c' + h' = 1.$$

h' est dans $\omega(\mathscr{A}_A)$ et donc dans $\mathscr{A}_{A'}$. Par suite : $(a', b', c') \in N_{A'}$. ω se prolonge alors en un homomorphisme surjectif de $\Psi(A)$ sur $\Psi(A')$ en posant :

$$\omega(W_{a,b,c}) = W_{a',b',c'}, \text{ pour } W = Q, R, Y \text{ et } Z.$$

Pour $(p, q) \in (\Psi(A))^2$ notons $p' = \omega(p)$ et $q' = \omega(q)$ et posons : $\omega(W_{p,q}) = W_{p',q'}$, pour $W = D, U, V, S$ et T.

ω est ainsi prolongé en un homomorphisme surjectif de $\Theta(A)$ sur $\Theta(A')$. Il est clair que :

$$\omega(F(A)) \subset F(A'), \text{ i.e. : } \omega(\mathscr{A}_{A_1}) \subset \mathscr{A}_{A'_1};$$

et :

$$\omega(G(A)) \subset G(A').$$

PROPOSITION 6.

Tout homomorphisme surjectif de A sur A' nous donne de façon naturelle un homomorphisme surjectif de $A^{h'}$ sur $A'^{h'}$ et un homomorphisme surjectif de A^k sur A'^k.

En effet par le lemme 2 partant de $A_0 = A$ et $\mathscr{A}_{A_0} = (0)$, et de $A'_0 = A'$ et $\mathscr{A}_{A'_0} = (0)$, on peut alors définir de proche en proche un homomorphisme ω surjectif de A_n sur $A'_{n'}$ tel que :

$$\begin{aligned}
&(\omega \times \omega \times \omega)(N_{A_{n-1}}) \subset N_{A'_{n-1}} && (\text{pour} : n \geqq 1).\\
&\omega(\mathscr{A}_{A_n}) \subset \mathscr{A}_{A'_n} && (\text{pour} : n \geqq 0).\\
&\omega(G(A_n)) \subset G(A'_n) && (\text{pour} : n \geqq 0).
\end{aligned}$$

On a ainsi un homomorphisme ω surjectif de $C(A)$ sur $C(A')$, tel que :

$$\omega(K(A)) \subset K(A'), \text{ et : } \omega(L(A)) \subset L(A').$$

On termine en passant au quotient.

PROPOSITION 7.

Si A est un anneau de Kaplansky (resp. d'Hermite), il existe un homomorphisme surjectif de A^k (resp. de $A^{h'}$) sur A.

PREUVE.

1) Soit A un anneau de Kaplansky dénombrable et ρ un homomorphisme surjectif d'un anneau A' dénombrable sur A.

$$\mathscr{A}_{A'} \text{ est un idéal de } A', \text{ tel que : } \rho(\mathscr{A}_{A'}) = (0).$$

Alors ρ se prolonge en $\tilde{\rho}$ surjectif de $A'_1 = \Theta(A')$ sur A et s'annulant sur $\mathscr{A}_{A'_1}$.

En effet soit : $(a', b', c') \in N_{A'}$. Posons : $\rho(a') = a$, $\rho(b') = b$, $\rho(c') = c$.

Comme :

$$a'A' + b'A' + c'A' + \mathscr{A}_{A'} = A',$$

nous avons :

$$aA + bA + cA = A.$$

A est un anneau de Kaplansky et donc il existe $q_{a,b,c}$, $r_{a,b,c}$, $y_{a,b,c}$ et $z_{a,b,c}$, dans A, tels que :

$$(*) \qquad aq_{a,b,c}y_{a,b,c} + (bq_{a,b,c} + cr_{a,b,c})z_{a,b,c} = 1.$$

Posons :

$$\tilde{\rho}(W_{a',b',c'}) = w_{a,b,c}, \text{ pour : } W = Q, R, Y \text{ et } Z,$$
$$\text{et : } w = q, r, y \text{ et } z, \text{ respectivement.}$$

$\tilde{\rho}$ est une surjection de $\Psi(A')$ sur A.

Soit $(e', f') \in (\Psi(A'))^2$, alors $e = \tilde{\rho}(e')$ et $f = \tilde{\rho}(f')$ sont dans l'anneau d'Hermite A. Donc il existe $d_{e,f}$, $u_{e,f}$, $v_{e,f}$, $s_{e,f}$ et $t_{e,f}$, dans A tels que :

$$(**) \qquad \begin{cases} 1 = u_{e,f}s_{e,f} + v_{e,f}t_{e,f} \\ e = s_{e,f}d_{e,f} \\ f = t_{e,f}d_{e,f} \end{cases}$$

Posons : $\tilde{\rho}(W_{e',f'}) = w_{e,f}$, pour : $W = D, U, V, S$ et T
et : $w = d, u, v, s$ et t, respectivement.

$\tilde{\rho}$ est alors un homomorphisme surjectif de $A'_1 = \Theta(A')$ sur A. D'après les relations (*) et (**), $\tilde{\rho}$ s'annule sur $\mathscr{A}_{A'_1}$.

2) A est maintenant un anneau d'Hermite dénombrable, ρ est un homomorphisme surjectif d'un anneau dénombrable A' sur A. $\mathscr{A}_{A'}$ est un idéal de A'. Alors ρ se prolonge en un homomorphisme $\tilde{\rho}$ surjectif de $A'_1 = \Theta(A')$ sur A et s'annulant sur $G(A')$.

En effet soit : $(a', b', c') \in N_{A'}$. On pose :

$$\tilde{\rho}(W_{a',b',c'}) = 0, \text{ pour : } W = Q, R, Y, Z.$$

$\tilde{\rho}$ est alors un homomorphisme surjectif de $\Psi(A')$ sur A. Puis on prolonge $\tilde{\rho}$ à $\Theta(A')$ suivant le même procédé qu'au point 1). $\tilde{\rho}$ s'annule sur $G(A')$ en raison des relations (**).

3) Prenons $A' = A$, où A est un anneau de Kaplansky (resp. d'Hermite) et définissons, par récurrence pour $n \geqq 1$, par 1) (resp. par 2)), $\rho_n = \tilde{\rho}_{n-1}$, à partir de :

$$A_0 = A, \rho_0 = id_A \text{ et } \mathscr{A}_{A_0} = (0).$$

On obtient un homomorphisme ρ surjectif de $C(A)$ sur A, dont la restriction à A_n est ρ_n. ρ s'annule sur $K(A)$ (resp. $L(A)$).

Un passage au quotient alors le résultat de la proposition 7.

THÉORÈME 2.
La classe des anneaux de Kaplansky (*resp. d'Hermite*) *dénombrables, coïncide avec la classe des anneaux quotients de l'anneau de Kaplansky* (*resp. d'Hermite*) *dénombrable* :

$$K = \mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_n, \ldots]^k \text{ (resp. } H' = \mathbf{Z}[X_0, \ldots, X_n, \ldots]^{h'}).$$

La démonstration est la même que celle du théorème 1 *en utilisant cette fois-ci les propositions* 6 *et* 7.

REMARQUE 3.
On peut se demander si H et H' sont isomorphes. On sait déjà que chacun d'eux est isomorphe à un quotient de l'autre.

III. **Exemple d'utilisation des constructions faites :**

III.1. Il est bien évident que *tout anneau de Bezout tel que tout diviseur de zéro appartienne au radical* (*en particulier tout anneau de Bezout intègre*) *est un anneau d'Hermite.*

Le *premier problème* qui se pose est de savoir si tout anneau de Bezout est un anneau d'Hermite. La réponse est négative ([5] Exemple 3.4. p. 378).

Le *deuxième problème* qui se pose est de savoir si tout anneau d'Hermite est un anneau de Kaplansky (i.e. : possède la "propriété K"). La réponse est aussi négative ([5] Exemple 4.11, p. 382).

Kaplansky a posé un *troisième problème* qui reste ouvert : tout anneau d'Hermite (i.e. de Bezout sous ces hypothèses) tel que tout diviseur de zéro est dans le radical (ou, plus restrictivement, tout anneau d'Hermite intègre) est-il un anneau de Kaplansky?

III.2. Le lemme ci-dessous permet de réduire ces problèmes au cas dénombrable.

LEMME 3.

Etant donnés a, b, c, appartenant à un anneau R de Bezout (resp. d'Hermite), il existe un sous-anneau R^* de Bezout (resp. d'Hermite) dénombrable et contenant a, b et c.

1) PREUVE (pour R de Bezout).

Soit a, b, c dans R. Notons R_1 le sous-anneau, dénombrable, engendré par a, b et c. A tout couple d'éléments (α, β) de R_1 correspondent cinq éléments $d_{\alpha,\beta}$, $x_{\alpha,\beta}$, $y_{\alpha,\beta}$, $u_{\alpha,\beta}$, $v_{\alpha,\beta}$ tels que :

$$d_{\alpha,\beta} = \alpha u_{\alpha,\beta} + \beta v_{\alpha,\beta}$$

$$\alpha = d_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta}$$

$$\beta = d_{\alpha,\beta} y_{\alpha,\beta}$$

Soit R_2 le sous-anneau engendré par R_1 et l'ensemble de ces cinq éléments pour tous les couples (α, β) de R_1. R_2 est aussi dénombrable. On itère le procédé et on obtient ainsi $R_n (n \geqq 1)$. Il est bien clair que :

$$R^* = \bigcup_{n \geqq 1} R_n \text{ répond à la question.}$$

2) La construction est analogue si R est un anneau d'Hermite.

III.3. *Réduction.*

1) La solution du premier problème dans le cas des anneaux dénombrables donne donc la solution générale de ce problème.

2) Il en est de même pour le deuxième problème car une relation :

$$qau + (qb + rc)v = 1, \text{ avec : } q, r, u \text{ et } v \text{ dans } R^*,$$

entraine : $qaR + (qb + rc)R = R$.

3) Le même argument est valable pour le problème de Kaplansky car si R est intègre : R^* est aussi intègre.

4) Pour réduire de même le troisième problème (sous l'hypothèse plus

générale que tout diviseur de 0 de R appartient au radical de R), on emploie le même argument après avoir remplacé R^* par R^0, anneau d'Hermite dénombrable, obtenu ainsi :

$$R^0 = \bigcup_{n \geqq 1} R_n^0.$$

R_1^0 est l'anneau engendré par R_1 et les inverses, dans R, des éléments de R_1 inversibles dans R.

R_n^0 est obtenu en itérant ce double procédé d'extension. Il est immédiat que :

$$(\mathrm{Rad}\ R) \cap R^0 = \mathrm{Rad}\ R^0.$$

III.4. PROPOSITION 8.

L'anneau B est un anneau de Bezout qui n'est pas un anneau d'Hermite.
Les anneaux H et H' sont des anneaux d'Hermite qui ne sont pas des anneaux de Kaplansky.

Cela résulte aussitôt des théorèmes 1 et 2 et des réductions de III.3, compte tenu des résultats rappelés en III.1.

REMARQUES.

1) On peut dire de plus que les diviseurs de zéro de B n'appartiennent pas au radical de B (et a fortiori que B n'est pas intègre).

2) On voit sans mal que les anneaux B, H, H' et K ne sont pas intègres.

3) Nous terminerons en disant que l'introduction de ces anneaux ne semble pas décisive pour résoudre le problème de Kaplansky.

REMERCIEMENTS. Je remercie Jean-Pierre Lafon qui sait tout ce que je lui dois.

BIBLIOGRAPHIE

1. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules*, Trans. Am. Math. Soc. **66** (1949), pp. 464-491.

2. ———, *Infinite Abelian groups*, 2eme ed., University of Michigan Press, Ann Arbor.

3. J. P. Lafon, *Modules de présentation finie et de type fini sur un anneau arithmétique*, Université Paul Sabatier, Toulouse (1972).

4. L. Gillman and M. Henriksen, *Some remarks about elementary divisor rings*, Trans. Am. Math. Soc. **82** (1956), pp. 362-365.

5. L. Gillman and M. Henriksen, *Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal*, Trans. Am. Math. Soc. **82** (1956), pp. 366-391.

6. M. D. Larsen, W. J. Lewis and S. Shores, *Elementary divisor rings and finitely presented modules*, Trans. Am. Math. Soc. **187** (1974), pp. 231-248.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TOULOUSE LE MIRAIL
5, ALLÉE ANTONIO MACHADO – 31081 TOULOUSE CEDEX