Canad. Math. Bull. Vol. **33** (1), 1990

SUR LES SOUS-GROUPES PURIFIABLES DES GROUPES ABÉLIENS PRIMAIRES

PAR

K. BENABDALLAH ET C. PICHÉ

ABSTRACT. The class of primary abelian groups whose subsocles are purifiable is not yet completely characterized and it contains the class of direct sums of cyclic groups and torsion complete groups. In sharp constrast with this, the class of groups whose p^2-bounded subgroups are purifiable consist only of those groups which are the direct sum of a bounded and a divisible group. Various tools are developed and a short application to the pure envelopes of cyclic subgroups is given in the last section.

Dans cet article la notion de sous-groupe presque-dense introduite dans [**1**] est utilisée pour établir le théorème suivant: Soit G un groupe abélien p-primaire. Tous les sous-groupes de $G[p^2]$ sont purifiables si et seulement si G est la somme directe d'un groupe borné et d'un groupe divisible. Ceci est en contraste frappant avec le fait que la structure des groupes pur-complets qui sont précisément ceux dont tous les sous-socles sont purifiables, est loin d'être élucidée. Les méthodes développées dans les premières sections sont ensuite utilisées pour étudier les sous-groupes cycliques purifiables dans le cas général non-réduit. La terminologie est une adaptation au français de celle de [3].

I. Préliminaires. Dans cette section, nous rassemblons les définitions et les faits connus dont nous avons besoin. Nous introduisons les notations et nomenclatures qui n'apparaissent pas dans l'ouvrage de référence [3]. Nous établissons aussi quelques résultats nouveaux. A travers cet article le symbol G désigne un groupe abélien p-primaire, òu p est un nombre premier fixé.

DEFINITION 1.1. *Soit A un sous-groupe de G et K un sous-groupe pur de G contenant A. K est une* **enveloppe pure** *de A dans G si K est minimal parmi les sous-groupes purs de G qui contiennent A. A est un sous-groupe* **purifiable** *dans G si A possède une enveloppe pure dans G.*

En général, il existe des sous-groupes non-purifiables. En fait l'un des buts de ce travail est de montrer que si tous les sous-groupes de $G[p^2]$ sont purifiables dans G,

Reçu par la rédaction le 24 novembre 1987 et, sous une forme revisée, 10 mai 1989.

AMS (1980) Subject Classification: 20K10.

Cet auteur bénéficie du fond CRSNG A5591.

https://doi.org/10.4153/CMB-1990-002-3 Published online by Cambridge University Press

alors G est la somme directe d'un groupe borné et d'un groupe divisible. Notons qu'il existe déjà dans la littérature des p-groupes la notion de sous-socle purifiable. Il est facile de voir que cette notion coïncide avec la nôtre ci-dessus quand A est un sous-socle de G. Rappelons qu'un sous-socle S est dit purifiable dans G, s'il existe un sous-groupe pur K de G tel que $K[p] = S$. Dans [4] nous trouvons le premier critère sur les sous-groupes purifiables:

THÉORÈME 1.2. ([4, Theorem 2]) *Soit A un sous-groupe purifiable dans G et K une enveloppe pure de A dans G. Alors $K = M \oplus B$ oú B est borné et $M[p] = A[p]$.*

Dans [1] la notion de sous-groupe presque-dense est introduite pour l'étude des sous-groupes purifiables.

DEFINITION 1.3. *Soit A un sous-groupe de G. A est* **presque-dense** *dans G si tout sous-groupe pur de G qui contient A est dense dans G par rapport à la topologie p-adique de G.*

THÉORÈME 1.4. ([1, Theorem 1.6]) *A est un sous-groupe presque-dense dans G si et seulement si:*

$$A + p^{n+1}G \supset p^nG[p], \textit{ pour tout } n \geqq 0.$$

Si K est une enveloppe pure de A dans G, il est clair que A est alors presque-dense dans K. Mais la presque-densité des sous-groupes possède en outre des propriétés algébriques utiles qui découlent facilement de la caractérisation ci-dessus. Nous les présentons dans les deux lemmes suivants:

LEMME 1.5. *Soit A_i un sous-groupe de G_i, pour chaque $i \in I$, alors $\bigoplus_{i \in I} A_i$ est presque-dense dans $\bigoplus_{i \in I} G_i$ si et seulement si A_i est presque-dense dans G_i pour chaque $i \in I$.*

LEMME 1.6. *Si A est presque-dense dans B, et B est pur et dense dans G, alors A est presque-dense dans G.*

Dans la section suivante, nous construisons des exemples non-triviaux de sous-groupes presque-denses. If suffit ici de remarquer que dès que $A[p]$ est dense dans $G[p]$ par rapport à la topologie induite sur $G[p]$ par la topologie p-adique de G, A est presque-dense dans G. En général le socle d'un sous-groupe presque-dense de G n'est pas dense dans $G[p]$, cependant:

THÉORÈME 1.7. *Soit A un sous-socle de G, alors A est presque-dense dans G si et seulement si A est dense dans $G[p]$.*

PREUVE. Si A est dense dans $G[p]$, $A + p^nG \supset G[p]$, pour tout $n \geqq 0$. En particulier, $A + p^{n+1}G \supset p^nG[p]$, et A est presque-dense dans G. Réciproquement si A est presque-dense dans $G, A + pG \supset G[p]$. Supposons par induction que $A + p^nG \supset G[p]$. Comme $A + p^{n+1}G \supset p^nG[p]$, $A + p^{n+1}G \supset A + p^nG[p] = (A + p^nG)[p]$ car $A \subset G[p]$. Donc $A + p^{n+1}G \supset G[p]$, et A est dense dans $G[p]$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1990-002-3 Published online by Cambridge University Press

II. **Construction et résultat principal.** Dans cette section nous construisons un sous-groupe borné presque-dense dans une somme directe de groupes cycliques non bornés. Cet exemple joue un rôle fondamental dans la caractérisation des groupes dont tous les sous-groupes bornés par p^2 sont purifiables.

LEMME 2.1. *Soit* $G = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle$, *où* $O(x) = p^n$, $O(y) = p^m$ *et* $1 \leqq n \leqq m-2$. *Soit* $z = p^{n-1}x + p^{m-2}y$. *Posons* $A = \langle z \rangle$. *Alors:*

(i) $$p^2 A = 0$$

(ii) $$A[p] = \langle y \rangle [p]$$

(iii) G *est une enveloppe pure de* A.

PREUVE (i) et (ii) sont évidents. Pour établir (iii) nous pouvons utiliser soit le théorème 1.4, soit procéder directement comme suit: Soit K un sous-groupe pur de G contenant A. Si $K \neq G$, alors $K[p] = A[p] = \langle y \rangle [p]$, et dans ce cas $K = \langle k \rangle$, et $O(k) = O(y)$, donc $G = K \oplus \langle x \rangle$, mais $p^{m-2}y = z - p^{n-1}x$, et $h(z) = h(p^{n-1}x) = n-1$, en vertu de la décomposition $G = K \oplus \langle x \rangle$, $h(z - p^{n-1}x) = \min(h(z), h(p^{n-1}x)) = n-1$. Ceci contredit le fait que $h(z - p^{n-1}x) \geqq m-2$. Donc $K = G$. □

LEMME 2.2. *Soit* $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \langle x_i \rangle$, *où* $O(x_i) = p^{n_i}$, *et* $1 \leqq n_i < n_{i+1}$, *pour tout* i. *Alors il existe un sous-groupe* A *de* B *tel que:*

(i) $$p^2 A = 0.$$

(ii) A *est presque-dense dans* B.

(iii) $A[p] = C[p]$ *où* $B = C \oplus D$ *et ni* C, *ni* D *n'est borné.*

PREUVE. Soit I l'ensemble des entiers impairs et P celui des entiers pairs. Posons:

$$G_i = \langle x_{2i-1} \rangle \oplus \langle x_{2i+1} \rangle, i \in I.$$
$$G_i = \langle x_{2i-2} \rangle \oplus \langle x_{2i} \rangle, i \in P.$$

Notons que: $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} G_i$. Dans chaque G_i nous imitons la construction du lemme 2.1 pour obtenir un élément z_i correspondant à l'élément z. Posons $A_i = \langle z_i \rangle$, alors:

(i) $p^2 A_i = 0$ pour tout $i \geqq 1$.

(ii) $A_i[p] = \langle x_{2i+1} \rangle [p]$, si $i \in I$ et $A_i[p] = \langle x_{2i} \rangle [p]$, si $i \in P$.

(iii) A_i est presque-dense dans G_i pour tout $i \geqq 1$.

Posons: $A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, $C = \bigoplus_{i \in I} (\langle x_{2i+1} \rangle \oplus \langle x_{2i+2} \rangle)$, $D = \bigoplus_{i \in I} (\langle x_{2i-1} \rangle \oplus \langle x_{2i} \rangle)$. Clairement, $p^2 A = 0$, de plus, A est presque-dense dans B par le lemme 1.5. Un petit calcul montre que $A[p] = C[p]$ et que $C \oplus D = B$. Par construction, C et D sont non-bornés. □

Le sous-groupe A construit dans le lemme précédent est un exemple montrant que la presque-densité d'un sous-groupe n'entraîne pas que son socle soit dense au sens de la topologie p-adique. En effet ici, $A[p]$ est un sous-socle fermé dans la topologie p-adique de B.

Il nous reste un dernier lemme à établir avant de passer au résultat principal de ce travail.

LEMME 2.3. *Soit B un sous-groupe pur de G. Soit $B = C \oplus D$ et soit M un sous-groupe pur de G tel que $M[p] = C[p]$. Alors $M \oplus D$ est aussi un sous-groupe pur de G.*

PREUVE. Il suffit de remarquer que les éléments de $(M \oplus D)[p]$ ont la même hauteur dans $M \oplus D$ que dans G. □

THÉORÈME 2.4. *Soit G un groupe p-primaire, tous les sous-groupes de $G[p^2]$ sont purifiables si et seulement si G est la somme directe d'un groupe borné et d'un groupe divisible.*

PREUVE. Il suffit de montrer que les sous-groupes de base de G sont bornés. Soit B un sous-groupe de base de G. Si B n'est pas borné, on peut écrire $B = B_0 \bigoplus B_1$, où $B_0 = \oplus_{i=1}^{\infty} \langle x_i \rangle$, $O(x_i) = p^{n_i}$, et $1 \leqq n_i < n_{i+1}$ pour tout $i \leqq 1$. Par le lemme 2.2 il existe un sous-groupe A de B_0 tel que $p^2 A = 0$, A est presque-dense dans B_0 et $A[p] = C[p]$ òu $B_0 = C \oplus D$ et ni C, ni D n'est borné. Posons $R = A \oplus B_1[p]$. Alors $p^2 R = 0$ et, par le lemme 1.5, R est presque-dense dans B car A est presque-dense dans B_0 et $B_1[p]$ est presque-dense dans B_1. Donc par le lemme 1.6, R est presque-dense dans G car B est pur et dense dans G. Comme $R \subset G[p^2]$, il existe K, une enveloppe pure de R dans G. Par le théorème 2 de [4], $K = M \oplus N$ où $M[p] = R[p]$ et N est borné. Par le théorème 2.5 de [1], K est somme directe de groupes cycliques. Comme G/K est divisible, K est un sous-groupe de base de G. Notons que $M[p] = R[p] = A[p] \oplus B_1[p] = C[p] \oplus B_1[p]$ et $B = B_0 \oplus B_1 = C \oplus D \oplus B_1$. Par le lemme 2.3, $M \oplus D$ est pur dans G. De plus, $M \oplus D$ est un sous-groupe de base de G car il a le même socle que B. Maintenant, K/M et $(M \oplus D)/M$ sont deux sous-groupes de base de G/M. Mais: $K/M \cong N$ est borné, tandis que $(M \oplus D)/M \cong D$ n'est pas borné. Ceci contredit le fait que les sous-groupes de base d'un groupe sont isomorphes. Donc les sous-groupes de base de G sont bornés. La réciproque découle de résultats dans [4] ou dans [1]. □

Nous concluons cette section par quelques remarques. D'abord si dans le théorème 2.4 nous remplaçons $G[p^2]$ par $G[p]$ la conclusion serait fausse. En effet les groupes G dans lequel tous les sous-groupes de $G[p]$ sont purifiables sont précisément les groupes purs-complets. Ces groupes sont loins d'être caractérisés bien qu'il existe sur eux quelques résultats épars (voir [3, Vol II, lemme 73.1]). Ensuite, notre théorème 2.4, renforce la proposition 1 de [4] qui traite des groupes dont tous les sous-groupes sont purifiables. Cependant la preuve donnée dans [4] de cette proposition comprend un point obscur qui est simplement faux tel qu'énoncé. En effet à la quatrième ligne avant la fin de la preuve il est écrit:

$$p^{n(2i)-1}h_1 = p^{n(2i)-1}b_{n(2i)}.$$

Mais le calcul donne $p^{n(2i)-1}h_1 = p^{n(2i)-1}b_{n(2i)} - p^{n(2i+1)-2}g_0$ et le terme impliquant g_0 n'est pas nécéssairement nul.

III. **Enveloppes pures de sous-groupes cycliques.** Dans cette section nous étudions les enveloppes pures des sous-groupes cycliques d'un groupe primaire G dans toute sa généralité, c.a.d. sans supposer que G est réduit. Nous obtenons des caractérisations complètes. Évidemment nos résultats sont semblables à ceux de [2] et au lemme 65.4 de [3] qui traite plus ou moins implicitement du problème quand G est réduit. Nos méthodes sont différentes et nous avons essayé d'être explicite dans les énoncés.

Nous avons besoin de la caractérisation des enveloppes pures d'un sous-groupe établie dans [1, Theorem 1.7].

THÉORÈME 3.1. *Soit A un sous-groupe de G et K un sous-groupe pur de G contenant A. Alors K est une enveloppe pure de A si et seulement si*

(i) $$p^nK[p] \subset A, \text{ pour un certain } n \geqq 0.$$

(ii) $$A + p^{r+1}K \supset p^rK[p], \text{pour tout } r \geqq 0.$$

LEMME 3.2. *Soit $x \in G$ et K une enveloppe pure de $\langle x\rangle$ dans G. Soit $K = M \oplus N$ et $x = m + n$, où $m \in M$ et $n \in N$. Alors M est une enveloppe pure de $\langle m\rangle$ et N une enveloppe pure de $\langle n\rangle$.*

Le lemme suivant facilite grandement les preuves subséquentes. Nous en sommes redevables à l'un des juges qui ont examiné la première version de ce travail.

LEMME 3.3. *Soit $G = \langle y_1\rangle \oplus \langle y_2\rangle$, posons $O(y_i) = p^{n_i}$, $i = 1, 2$ où $n_1 \geqq n_2 \geqq 1$, et soit $x = \alpha_1 p^{t_1}y_1 + \alpha_2 p^{t_2}y_2$ où $(\alpha_i, p) = 1$. G est l'enveloppe pure de $\langle x\rangle$ si et seulement si*

(i) $$t_i < n_i,$$

(ii) $$t_1 > t_2;$$

(iii) $$n_1 - t_1 > n_2 - t_2.$$

Dans ce cas $n_1 \geqq n_2 + 2$.

PREUVE. Supposons que G soit l'enveloppe pure de $\langle x\rangle$. Clairement, $t_i < n_i, i = 1, 2$. Si $t_2 \geqq t_1$, alors $x = p^{t_1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 p^{t_2-t_1}y_2)$ et $G = \langle \alpha_1 y_1 + \alpha_2 p^{t_2-t_1}y_2\rangle \oplus \langle y_2\rangle$. Ici

https://doi.org/10.4153/CMB-1990-002-3 Published online by Cambridge University Press

nous utilisons le fait que $n_1 \geqq n_2$. Ceci est une contradiction, donc $t_1 > t_2$. De même si $n_2 - t_2 \geqq n_1 - t_1$, $x = p^{t_2}(\alpha_1 p^{t_1 - t_2} y_1 + \alpha_2 y_2)$ et $\langle \alpha_1 p^{t_1-t_2} y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle \oplus \langle y_1 \rangle = G$. Ici il suffit de s'assurer que l'intersection de ces deux sous-groupes est nulle. C'est de nouveau une contradiction, donc $n_1 - t_1 > n_2 - t_2$. Clairement $n_1 \geqq n_2 + 2$. Réciproquement si G et x satisfont aux conditions de l'énoncé, on considère: $\langle x \rangle + p^{r+1}G = \langle x \rangle + \langle p^{r+1} y_1 \rangle + \langle p^{r+1} y_2 \rangle$, si $p^{r+1} y_1 \neq 0$ et $p^{r+1} y_2 \neq 0$, $p^{r+1}G[p] = p^r G[p]$ et $\langle x \rangle + p^{r+1}G \supset p^r G[p]$. Donc les valeurs critiques sont quand $r + 1 = n_i$, $i = 1, 2$. Mais $r + 1 = n_1$ donne $p^{n_1 - 1}G[p] = \langle y_1 \rangle[p]$ et $\langle x \rangle + p^{n_1}G = \langle x \rangle[p] = \langle y_1 \rangle et \langle x \rangle[p]$, tandis que $p^{n_2-1}G[p] = G[p]$ et $p^{n_2}G = \langle p^{n_2} y_1 \rangle$ et $\langle p^{n_2-1} y_2 \rangle = \langle \alpha_2 p^{n_2-1} y_2 \rangle \supset \langle x \rangle + p^{n_2}G$. Par le théorème 3.1, G est l'enveloppe pure de $\langle x \rangle$. □

Le lemme 2.1 est un cas spécial du lemme précédent. Ceci explique les valeurs particulières du lemme 2.1. En utilisant les lemmes 3.2 et 3.3, il n'est pas trop difficile d'obtenir le résultat suivant qui énonce d'une façon peut-être plus explicite les resultats de [2] et le lemme 65.4 de [3].

THÉORÈME 3.4. *Soit $x \in G$ tel que $\langle x \rangle \cap G^1 = 0$ et soit K un sous-groupe pur de G contenant x. Alors K est une enveloppe pure de $\langle x \rangle$ si et seulement si $K = \bigoplus_{i=1}^m \langle y_i \rangle$, $O(y_i) = p^{n_i}, n_i \geqq n_{i+1}$, $x = \sum_{i=1}^m p^{t_i}\alpha_i y_i$, où $(\alpha_i, p) = 1$, satisfaisant:*

(i) $$t_i > t_{i+1}, i = 1, \ldots, m-1.$$

(ii) $$n_i - t_i > n_{i+1} - t_{i+1} \geqq 1, i = 1, \ldots, m-1.$$

Dans ce cas: $n_i \geqq n_{i+1} + 2, i = 1, \ldots, m-1$.

Nous terminons cet article en examinant les enveloppes pures des sous-groupes cycliques dans le cas non-réduit. Dans cette situation elles n'existent pas toujours.

THÉORÈME 3.5. *Soit $x \in G$, $\langle x \rangle \cap G^1 \neq 0$ et soit K un sous-groupe pur de G contenant $\langle x \rangle$. Alors K est une enveloppe pure de $\langle x \rangle$ si et seulement si $K = H \oplus B$ où $H \cong Z(p^\infty)$ et B est borné et si on écrit $x = h + b$, avec $h \in H$ et $b \in B$, on a*

(i) $$O(h) > O(b) \text{ et}$$

(ii) *B est une enveloppe pure de b.*

PREUVE. Supposons que K est une enveloppe pure de $\langle x \rangle$, alors par le théorème 1.2, $K = H \oplus B$ où $H[p] = \langle x \rangle[p]$ et B est borné. H est de p-rang 1 et comme $\langle x \rangle \cap G^1 \neq 0$ il doit être isomorphe à $Z(p^\infty)$. Par le lemme 3.2, B est une enveloppe pure de b. Il reste à voir que $O(h) > O(b)$. $x = h + b$ et $H[p] = \langle x \rangle[p]$, implique que $O(h) = O(x)$ donc $O(b) \leqq O(h)$. Mais si $O(b) = O(h)$, $\langle h + b \rangle \cap H = 0$ et $\langle h + b \rangle$ pourrait être étendu à un sous-groupe H-haut dans K qui serait pur dans K car H est divisible. Ceci est une contradiction. Reciproquement, supposons que $K = H \oplus B$ où H est isomorphe à $Z(p^\infty)$, B est divisible et $x = h + b$ satisfaisant i) et ii). Soit R un sous-groupe pur de K contenant x. Alors $R = D \oplus C$ où D est divisible et C est borné. D est non-nul car $\langle x \rangle \cap G^1 \neq 0$ donc $D = H$ et $R = H \oplus (B \cap R)$, par la loi modulaire. Mais $b \in B \cap R$ et $B \cap R$ est pur dans K donc $B \cap R = B$ et $R = K$. $\square$

Finalement notons que les théorèmes 3.4 et 3.5 permettent, par le biais des suites d'Ulm des éléments, de montrer que dans le cas général les enveloppes pures d'un sous-groupe cyclique sont isomorphes lorsqu'elles existent.

Bibliographie

1. K. Benabdallah and J. Irwin, *On minimal pure subgroups*, Publ. Math., vol 23, 1976, pp. 111–114.

2. B. Charles, *Etudes sur les sous-groupes d'un groupe abélien*, Bull. Soc. Math. France, vol 88, 1960, pp. 217–227.

3. L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups, vol I–II*, Academic Press, Inc., London, New York.

4. P. Hill et C. Megibben, *Minimal pure subgroups in primary groups*, Bull. Soc. Math. France, vol 92, 1964, pp. 251–257.

Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
Montréal, Québec, Canada
et
Department of Mathematics
University of Hawaii at Manoa
2565 The Mall, Honolulu, HI 96822.