Can. J. Math., Vol. XXII, No. 5, 1970, pp. 1071–1078

ALGÈBRES COMMUTATIVES ENGENDRÉES PAR LEURS ÉLÉMENTS IDEMPOTENTS

KLAUS KEIMEL

1. Introduction. Dans ce travail, R désignera toujours un anneau commutatif ayant un élément unité 1. Les R-algèbres considérées seront supposées associatives. Si A est une R-algèbre, nous supposerons toujours $1 \cdot a = a$ quel que soit $a \in A$. Si $B \subseteq A$, nous désignerons par $\operatorname{Ann}(B)$ l'ensemble des $r \in R$ tels que $rB = \{0\}$.

Soit A une R-algèbre commutative (avec ou sans élément unité). Nous désignerons par E_A l'ensemble des éléments idempotents de A. Si l'on définit pour $e, f \in E_A$,

$$e \wedge f = ef \qquad \text{et} \qquad e \vee f = e + f - ef,$$

alors E_A devient un treillis distributif relativement complémenté dont 0 est le plus petit élément [**2**].

Nous nous intéresserons aux R-algèbres commutatives engendrées par leurs éléments idempotents. Il y a de nombreux exemples de telles algèbres: les anneaux booléens ($R = \mathbf{Z}/(2)$); les p-anneaux au sens de McCoy et Montgomery ($R = \mathbf{Z}/(p)$) [**5**]; les anneaux commutatifs engendrés par leurs éléments idempotents ($R = \mathbf{Z}$); si X est un espace booléen, l'algèbre $\mathscr{L}(X, R)$ des fonctions localement constantes $f\colon X \to R$, à supports compacts, est une telle R-algèbre (cf. § 2).

Ce dernier exemple est presque caractéristique pour les R-algèbres commutatives engendrées par leurs éléments idempotents. En effet, nous associerons à toute R-algèbre commutative A, engendrée par ses éléments idempotents, un espace booléen βA et nous démontrerons que A est une image homomorphe de $\mathscr{L}(\beta A, R)$; si A est en plus sans torsion, A est isomorphe à $\mathscr{L}(\beta A, R)$ (théorème I). Ainsi nous généralisons un résultat de Subramanian [**9**]. Dans le cas général, il y a un faisceau $\mathscr{F}$ d'anneaux quotients de R, de base βA, tel que A soit isomorphe à l'algèbre $\Gamma_k(\beta A, \mathscr{F})$ des sections globales à supports compacts de $\mathscr{F}$ (théorème II). La technique de représentation par des sections dans un faisceau a été développée, par exemple, dans [**1**; **4**; **7**].

2. Représentation par des fonctions localement constantes.

2.1. Nous appellerons *espace booléen* tout espace topologique séparé (= Hausdorff) ayant une base d'ouverts compacts. (Nous ne supposerons pas qu'un espace booléen est nécessairement compact.)

Reçu le 19 janvier 1970.

2.2. Soit X un espace booléen. Désignons par $\mathscr{L}(X, R)$ l'ensemble des fonctions localement constantes $f: X \to R$, à supports compacts.

Pour deux fonctions quelconques $f, g \in \mathscr{L}(X, R)$ et pour tout $r \in R$, définissons $f + g$, fg, et rf comme d'habitude par:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{pour tout } x \in X;\\ (fg)(x) &= f(x)g(x) && \text{pour tout } x \in X;\\ (rf)(x) &= r \cdot f(x) && \text{pour tout } x \in X.\end{aligned}$$

On vérifie sans peine que $f + g$, fg, et rf appartiennent aussi à $\mathscr{L}(X, R)$. Par conséquent, $\mathscr{L}(X, R)$ est une R-algèbre commutative. Notons que $\mathscr{L}(X, R)$ n'est rien d'autre que l'algèbre $\mathscr{C}_0(X, R)$ des fonctions continues à supports compacts, définies sur X et à valeurs dans R, où R est muni de la topologie discrète.

2.3. Pour toute partie ouverte et compacte U de X, soit ϵ_U la fonction caractéristique définie par:

$$\epsilon_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in U,\\ 0 & \text{si} \quad x \notin U.\end{cases}$$

Evidemment, ϵ_U est un élément idempotent de $\mathscr{L}(X, R)$. Si V est une autre partie ouverte et compacte de X, on a:

$$\begin{aligned}\epsilon_{U \cup V} &= \epsilon_U + \epsilon_V - \epsilon_U\epsilon_V = \epsilon_U \vee \epsilon_V;\\ \epsilon_{U \cap V} &= \epsilon_U\epsilon_V = \epsilon_U \wedge \epsilon_V.\end{aligned}$$

Par conséquent, $U \mapsto \epsilon_U$ est un homomorphisme du treillis $\mathscr{K}$ des parties ouvertes et compactes de X dans le treillis $E_{\mathscr{L}(X,R)}$ des idempotents de $\mathscr{L}(X, R)$. Cet homomorphisme est évidemment injectif. Si R n'a pas d'élément idempotent différent de 0 et de 1, cet homomorphisme est aussi surjectif.

2.4. Soit $f \in \mathscr{L}(X, R)$. Pour tout $r \in R$, soit $U_r = f^{-1}(r)$. Puisque f est une fonction localement constante, U_r est ouvert et fermé pour tout $r \in R$. Si $r \neq 0$, alors U_r est contenu dans le support de f, qui est compact; donc U_r est compact. Puisque $\bigcup_{r \neq 0} U_r = X \backslash U_0$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$ est fermé. Par conséquent, support de $f = \bigcup_{r \neq 0} U_r$. Puisque $(U_r)_{r \neq 0}$ est une partition du support de f en ensembles ouverts, il y a seulement un nombre fini d'éléments $r \in R$ tels que $U_r \neq \emptyset$, c'est-à-dire que f n'admet qu'un nombre fini de valeurs. On a donc:

$$f = \sum_{r \neq 0} r \cdot \epsilon_{U_r}.$$

Ainsi nous avons démontré que tout $f \in \mathscr{L}(X, R)$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments idempotents deux-à-deux orthogonaux. On en déduit:

PROPOSITION. *Soit X un espace booléen et $\mathscr{L}(X, R)$ l'ensemble des fonctions localement constantes $f: X \to R$, à supports compacts. Alors $\mathscr{L}(X, R)$ est une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents.*

2.5. Si R est un domaine d'intégrité, $\mathscr{L}(X, R)$ est une R-algèbre sans torsion, c'est-à-dire que $rf = 0$ pour un $r \in R$ et un $f \in \mathscr{L}(X, R)$ entraîne $r = 0$ ou $f = 0$.

Si A est une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents, il en est de même pour toute image homomorphe de A. En particulier, toute image homomorphe de $\mathscr{L}(X, R)$ est une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents. Montrons réciproquement que toute R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents est une image homomorphe d'une R-algèbre de la forme $\mathscr{L}(X, R)$.

Soit A une R-algèbre commutative quelconque, engendrée par ses éléments idempotents. Puisqu'un produit d'éléments idempotents est encore idempotent, tout élément x de A est une combinaison linéaire d'éléments idempotents:

$$x = \sum r_i e_i \text{ avec } r_i \in R \text{ et } e_i \in E_A.$$

Soit βA l'ensemble des ultrafiltres dans le treillis E_A des éléments idempotents de A. Pour tout ultrafiltre $\mathfrak{x}$ dans E_A, soit

$$I_{\mathfrak{x}} = \sum_{e \in \mathfrak{x}} (1 - e)A.$$

Alors $I_{\mathfrak{x}}$ est un idéal de A, et puisque $\mathfrak{x}$ est filtrant supérieurement, $I_{\mathfrak{x}} = \{a \in A;$ il existe $e \in \mathfrak{x}$ tel que $ea = 0\}$.

2.6. *Tout $e \in \mathfrak{x}$ est un élément unité modulo $I_{\mathfrak{x}}$ et tout $f \in E_A \backslash \mathfrak{x}$ est contenu dans $I_{\mathfrak{x}}$.*

Démonstration. Soit $e \in \mathfrak{x}$. Pour tout $a \in A$, nous avons $a - ea \in I_{\mathfrak{x}}$, donc $ea \equiv a \pmod{I_{\mathfrak{x}}}$. Soit f un élément idempotent de A n'appartenant pas à $\mathfrak{x}$. Puisque $\mathfrak{x}$ est un ultrafiltre dans un treillis distributif relativement complémenté ayant un plus petit élément 0, il y a un $e \in \mathfrak{x}$ tel que $ef = e \wedge f = 0$. Par conséquent, $f = f - ef \in I_{\mathfrak{x}}$.

2.7. *L'algèbre quotient $A/I_{\mathfrak{x}}$ possède un élément unité, mais pas d'élément idempotent différent de l'élément unité et de zéro.*

D'après le lemme 2.6, il suffit de démontrer: Si un élément x de A est idempotent modulo $I_{\mathfrak{x}}$, il existe $y \in E_A$ tel que $x \equiv y \pmod{I_{\mathfrak{x}}}$. Or, si $x^2 - x \in I_{\mathfrak{x}}$, alors $e(x^2 - x) = 0$ pour un certain $e \in \mathfrak{x}$; si nous posons $y = ex$, alors $x \equiv y \pmod{I_{\mathfrak{x}}}$ et $0 = e(x^2 - x) = y^2 - y$, donc $y \in E_A$.

2.8. *L'algèbre quotient $A/I_{\mathfrak{x}}$ est une image homomorphe de R.*

En effet, soit B une R-algèbre commutative ayant un élément unité e, mais pas d'élément idempotent différent de e et de 0. Si B est engendré par ses éléments idempotents, alors $B = R \cdot e$, et par suite B est isomorphe à $R/\mathrm{Ann}(e)$.

2.9. $\bigcap_{\mathfrak{x} \in \beta A} I_{\mathfrak{x}} = \{0\}$.

En effet, soient $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E_A$ et $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ tels que $x = \sum r_i e_i \neq 0$. Soit $e = e_1 \vee e_2 \vee \ldots \vee e_n$. Alors $ex = x$. Soit J l'ensemble des $f \in E_A$ tels que $fx = 0$. Alors J est un idéal de E_A ne contenant pas e. Il y a un ultrafiltre $\mathfrak{x}$ dans E_A, qui contient e et qui ne rencontre pas J. Nous avons $x \notin I_{\mathfrak{x}}$; car si $x \in I_{\mathfrak{x}}$, il existe $e' \in \mathfrak{x}$ tel que $e'x = 0$ ce qui est impossible.

2.10. A tout $e \in E_A$, associons l'ensemble

$$V(e) = \{\mathfrak{x} \in \beta A\,;\, e \in \mathfrak{x}\}.$$

Soit $\mathscr{K}$ la famille des ensembles de la forme $V(e)$, $e \in E_A$. On a:

$$V(e \wedge f) = V(e) \cap V(f) \qquad \text{et} \qquad V(e \vee f) = V(e) \cup V(f).$$

D'après [**6**], $\mathscr{K}$ est la base d'une topologie sur βA, qui fait de βA un espace booléen dont $\mathscr{K}$ est l'ensemble des ouverts compacts. L'application $e \mapsto V(e)$ est un isomorphisme du treillis E_A sur $\mathscr{K}$. Dans ce qui suit nous munissons βA de cette topologie. βA est compact si, et seulement si, A possède un élément unité.

Considérons l'algèbre $\mathscr{L}(\beta A, R)$. Pour tout élément idempotent e de A, soit

$$\hat{e} = \epsilon_{V(e)} \in \mathscr{L}(\beta A, R).$$

D'après ce qui précède et 2.3, $e \mapsto \hat{e}$ est un homomorphisme injectif du treillis E_A des éléments idempotents de A dans le treillis $E_{\mathscr{L}(\beta A, R)}$ des éléments idempotents de $\mathscr{L}(\beta A, R)$. D'après 2.4, toute fonction $f \in \mathscr{L}(\beta A, R)$ est une somme finie

$$f = \sum r_i \hat{e}_i \text{ avec } r_i \in R \text{ et } e_i \in E_A.$$

2.11. *Si $e_1, \ldots, e_n$ sont des éléments de E_A et $r_1, \ldots, r_n$ des éléments de R tels que $\sum r_i \hat{e}_i = 0$ dans $\mathscr{L}(\beta A, R)$, alors $\sum r_i e_i = 0$ dans A.*

Démonstration. D'après 2.9, il suffit de montrer que $\sum r_i e_i \in I_{\mathfrak{x}}$ pour tout $\mathfrak{x} \in \beta A$. Soit C l'ensemble des indices i tels que $\hat{e}_i(\mathfrak{x}) \neq 0$; alors $\hat{e}_i(\mathfrak{x}) = 1$ pour tout $i \in C$ et $\hat{e}_i(\mathfrak{x}) = 0$ pour tout $i \notin C$. Par suite,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \hat{e}_i\right)(\mathfrak{x}) = \sum_{i \in C} r_i;$$

donc $\sum_{i=1}^{n} r_i \hat{e}_i = 0$ entraîne $\sum_{i \in C} r_i = 0$. Puisque pour $i \in C$, $\hat{e}_i(\mathfrak{x}) \neq 0$, e_i appartient à $\mathfrak{x}$ et par suite e_i est l'élément unité modulo $I_{\mathfrak{x}}$ pour tout $i \in C$ d'après 2.6; donc $\sum_{i \in C} r_i e_i \in I_{\mathfrak{x}}$. Pour tout $i \notin C$, on a $\hat{e}_i(\mathfrak{x}) = 0$, donc $e_i \in \mathfrak{x}$ et par conséquent $e_i \in I_{\mathfrak{x}}$ d'après 2.6. Il s'ensuit que $\sum_{i=1}^{n} r_i e_i \in I_{\mathfrak{x}}$.

2.12. Soient $f = \sum r_i \hat{e}_i$ et $g = \sum s_j \hat{f}_j$ deux fonctions appartenant à $\mathscr{L}(\beta A, R)$. Si $f = g$, alors $\sum r_i e_i = \sum s_j f_j$ d'après 2.11. Ce raisonnement montre que l'on peut définir une application φ: $\mathscr{L}(\beta A, R) \to A$ de la manière suivante: Si $f \in \mathscr{L}(\beta A, R)$, prenons une représentation quelconque de f sous la forme $f = \sum r_i \hat{e}_i$ avec $r_i \in R$ et $e_i \in E_A$, et posons

$$\varphi(f) = \sum r_i e_i.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1970-123-5 Published online by Cambridge University Press

Cette application φ est évidemment un homomorphisme d'algèbres. Elle est surjective, puisque tout élément de A est une combinaison linéaire d'éléments idempotents.

2.13. Nous dirons que A est une *R-algèbre sans torsion* si, quels que soient $a \in A$ et $r \in R$, $ra = 0$ entraîne $r = 0$ ou $a = 0$.

Si A est une R-algèbre sans torsion, l'application φ de 2.12 est aussi injective. En effet, supposons que $\varphi(f) = 0$ pour un $f \in \mathscr{L}(\beta A, R)$. D'après 2.4, f est une combinaison linéaire d'idempotents deux-à-deux orthogonaux, c'est-à-dire qu'il existe $r_i \in R$ et $e_i \in E_A$ tels que

$$f = \sum r_i \hat{e}_i, \qquad e_i e_j = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Donc $0 = \varphi(f) = \sum r_i e_i$, d'où $0 = (\sum r_i e_i) e_j = r_j e_j$ quel que soit j. Si A est sans torsion, on a donc $r_j = 0$ pour tout j, donc $f = 0$.

Résumons nos résultats:

THÉORÈME I. *Soit A une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents. Soit βA l'espace booléen des ultrafiltres dans le treillis E_A des éléments idempotents de A. Soit $\mathscr{L}(\beta A, R)$ l'algèbre des fonctions localement constantes f: $\beta A \to R$, à supports compacts. Alors il y a un homomorphisme surjectif φ: $\mathscr{L}(\beta A, R) \to A$. Si A est sans torsion, φ est un isomorphisme.*

Si R est un corps, toute R-algèbre est sans torsion; donc:

COROLLAIRE 1. *Soit A une algèbre commutative sur un corps K, engendrée par ses éléments idempotents. Alors A est isomorphe à $\mathscr{L}(\beta A, K)$.*

Tout anneau commutatif est une $\mathbf{Z}$-algèbre, où $\mathbf{Z}$ désigne l'anneau des entiers rationnels. Nous avons:

COROLLAIRE 2. *Soit A un anneau commutatif engendré par ses éléments idempotents. Alors A est une image homomorphe de l'anneau $\mathscr{L}(\beta A, \mathbf{Z})$. L'anneau A est isomorphe à $\mathscr{L}(\beta A, \mathbf{Z})$ si et seulement si A (considéré comme groupe additif) est sans torsion.*

Ce corollaire généralise un résultat de Subramanian [**9**] qui a démontré que tout anneau commutatif unitaire A, engendré par ses éléments idempotents et sans torsion, est isomorphe à $\mathscr{L}(\beta A, \mathbf{Z})$.

COROLLAIRE 3. *Soit A une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents telle que* $\operatorname{Ann}(e) = \operatorname{Ann}(A)$ *pour tout* $0 \neq e \in E_A$. *Alors A est isomorphe à* $\mathscr{L}(\beta A, R/\operatorname{Ann}(A))$.

En effet, si les hypothèses du corollaire 3 sont vérifiées, A est une algèbre sans torsion sur $R/\operatorname{Ann}(A)$.

Appliquons le corollaire 3 à certains anneaux. Nous dirons que A est *uniformément de caractéristique n* si, pour tout $0 \neq e \in E_A$, l'anneau eA est de caractéristique n.

https://doi.org/10.4153/CJM-1970-123-5 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 4. *Soit A un anneau commutatif engendré par ses éléments idempotents. Si A est uniformément de caractéristique n, alors A est isomorphe à* $\mathscr{L}(\beta A, \mathbf{Z}/(n))$.

Si la caractéristique de A est un nombre premier p, alors A est uniformément de caractéristique p. Nous avons donc:

COROLLAIRE 5. *Soit A un anneau commutatif engendré par ses éléments idempotents, de caractéristique p, où p est premier. Alors A est isomorphe à* $\mathscr{L}(\beta A, \mathbf{Z}/(p))$.

Ce théorème généralise le théorème de représentation bien connu des anneaux booléens [**8**]. En effet, un anneau idempotent est de caractéristique 2, il est donc isomorphe à $\mathscr{L}(\beta A, \mathbf{Z}/(2))$. D'autre part, nous avons ici une représentation des p-anneaux [**5**; **7**]; tout élément d'un p-anneau est en effet une somme d'éléments idempotents [**3**; **10**].

3. Représentation par les sections d'un faisceau. Soit A une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents. Soit βA l'espace booléen des ultrafiltres du treillis E_A des éléments idempotents de A.

3.1. Donnons d'abord une autre interprétation du théorème I: Soit $\mathscr{A}$ le faisceau simple de fibre R et de base βA, c'est-à-dire que $\mathscr{A} = R \times \beta A$ où R est muni de la topologie discrète. Les fonctions $f \in \mathscr{L}(\beta A, R)$ correspondent bijectivement aux sections continues $\sigma: \beta A \to \mathscr{A}$, à supports compacts; en d'autres termes: l'algèbre $\mathscr{L}(\beta A, R)$ est isomorphe à l'algèbre $\Gamma_k(\beta A, \mathscr{A})$ des sections continues globales à supports compacts du faisceau $\mathscr{A}$. Si A est sans torsion, alors A est isomorphe à $\Gamma_k(\beta A, \mathscr{A})$ d'après le théorème I. Cette section est consacrée à une généralisation de cette assertion au cas où A n'est pas sans torsion.

3.2. Pour tout ultrafiltre $\mathfrak{x} \in \beta A$, soit $I_\mathfrak{x} = \sum_{e \in \mathfrak{x}} (1 - e)A$; soit $A_\mathfrak{x}$ l'algèbre quotient $A/I_\mathfrak{x}$. D'après 2.7 et 2.8, $A_\mathfrak{x}$ est une image homomorphe de R n'ayant pas d'élément idempotent différent de l'élément unité et de zéro. Soit T la réunion disjointe des $A_\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x} \in \beta A$. Définissons une "projection" $\pi: T \to \beta A$ par $\pi(t) = \mathfrak{x}$ pour tout $t \in A_\mathfrak{x}$. Pour tout $a \in A$, définissons une application $\hat{a}: \beta A \to T$ par

$$\hat{a}(\mathfrak{x}) = a + I_\mathfrak{x} \in A_\mathfrak{x} \quad \text{pour tout } \mathfrak{x} \in \beta A.$$

Soit

$$\mathscr{B} = \{\hat{a}(U);\, a \in A \text{ et } U \text{ ouvert de } \beta A\}.$$

D'après [**4**], voir aussi [**7**; **1**], nous avons:

(i) $\mathscr{B}$ est une base d'une topologie sur T;

(ii) le triple $\mathscr{F} = \langle T, \pi, \beta A\rangle$ est un faisceau de R-algèbres;

(iii) $a \mapsto \hat{a}$ est un isomorphisme de A sur l'algèbre $\Gamma_k(\beta A, \mathscr{F})$ de toutes les sections continues globales à supports compacts de $\mathscr{F}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1970-123-5 Published online by Cambridge University Press

Désignons par $1_{\mathfrak{x}}$ l'élément unité de la fibre $A_{\mathfrak{x}}$ de $\mathscr{F}$. Alors $\mathfrak{x} \mapsto 1_{\mathfrak{x}}$ est une section continue; en effet, si $\mathfrak{x} \in \beta A$, prenons $e \in \mathfrak{x}$; l'ensemble $V(e)$ des $\mathfrak{y} \in \beta A$ tels que $e \in \mathfrak{y}$ est un voisinage de $\mathfrak{x}$ et, pour tout $\mathfrak{y} \in V(e)$, $\hat{e}(\mathfrak{y}) = 1_{\mathfrak{y}}$ d'après 2.6. Dans ce qui suit nous supposerons toujours que la section unité d'un faisceau de R-algèbres avec élément unité est continue.

Nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME II. *Soit A une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents; soit βA l'espace booléen des ultrafiltres du treillis E_A des éléments idempotents de A. Alors il y a un faisceau $\mathscr{F}$ de base βA, dont les fibres sont des images homomorphes de R n'ayant pas d'élément idempotent différent de l'élément unité et de zéro, tel que A soit isomorphe à l'algèbre $\Gamma_k(\beta A, \mathscr{F})$ de toutes les sections continues globales à supports compacts de $\mathscr{F}$. Si A possède un élément unité, βA est compact et A est isomorphe à l'algèbre de toutes les sections continues de $\mathscr{F}$.*

3.3. Le faisceau $\mathscr{F}$ du théorème II est un faisceau quotient du faisceau simple $\mathscr{A} = R \times \beta A$. En effet, soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des couples

$$(f(\mathfrak{x}), \mathfrak{x}) \in R \times \beta A$$

tels que $f \in \operatorname{Ker} \varphi$, où φ désigne l'homomorphisme de $\mathscr{L}(\beta A, R)$ dans A, défini dans 2.12. Alors $\mathscr{I}$ est un faisceau idéal de $\mathscr{A}$ tel que $\mathscr{F} \cong \mathscr{A}/\mathscr{I}$.

RÉCIPROQUE DE THÉORÈME II. *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de R-algèbres, de base booléenne X, et supposons que les fibres de $\mathscr{F}$ sont des images homomorphes de R n'ayant pas d'élément idempotent différent de zéro et de l'élément unité. Alors $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$ est une R-algèbre commutative engendrée par ses éléments idempotents; le faisceau associé à $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$ comme dans 3.2 est isomorphe à $\mathscr{F}$. Si X est compact, l'algèbre $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$ admet un élément unité.*

En effet, soit $\mathscr{F} = \langle T, \pi, X \rangle$ un faisceau de R-algèbres vérifiant les propriétés indiquées ci-dessus. Désignons par 1_x l'élément unité de la fibre sur x. Evidemment, $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$ est une R-algèbre commutative; montrons qu'elle est engendrée par ses éléments idempotents: Pour tout ouvert compact $U \subseteq X$, soit ϵ_U défini par

$$\epsilon_U(x) = \begin{cases} 1_x & \text{si} \quad x \in U, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin U. \end{cases}$$

Alors ϵ_U est un élément idempotent de $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$. Soit ϵ la section unité. Prenons un élément quelconque σ de $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$. Soit x dans le support de σ. Puisque la fibre sur x est une image homomorphe de R, il existe $r_x \in R$ tel que $\sigma(x) = r_x 1_x = r_x \epsilon(x)$. Puisque les sections σ et $r_x \epsilon$ coïncident en x, elles coïncident dans un voisinage compact ouvert $V(x)$ de x, donc

$$\sigma(y) = r_x \cdot \epsilon_{V(x)}(y) \quad \text{pour tout } y \in V(x).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1970-123-5 Published online by Cambridge University Press

Si x parcourt le support de σ, les ouverts $V(x)$ forment un recouvrement de ce support qui est compact; il y a donc une partie finie F de X telle que

$$\text{supp}\ (\sigma) \subset \bigcup_{x \in F} V(x).$$

Puisque X est un espace booléen, on peut supposer que les ouverts $V(x)$, $x \in F$, sont deux-à-deux disjoints. Cela entraîne que

$$\sigma = \sum_{x \in F} r_x \epsilon_{V(x)}.$$

c'est-à-dire que σ est une combinaison linéaire d'éléments idempotents.

Puisque les fibres de $\mathscr{F}$ n'ont pas d'élément idempotent différent de zéro et de l'élément unité, tout élément idempotent de $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$ est de la forme ϵ_U; par conséquent, $U \mapsto \epsilon_U$ est un isomorphisme du treillis de Boole des ouverts compacts de X sur le treillis de Boole $E(\Gamma_k(X, \mathscr{F}))$ des éléments idempotents de $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$. Il s'ensuit que l'espace booléen $\beta\Gamma_k(X, \mathscr{F})$ est homéomorphe à X. Maintenant, il est facile de vérifier que le faisceau associé à $\Gamma_k(X, \mathscr{F})$ comme dans 3.2 est isomorphe à $\mathscr{F}$.

Appliquons le théorème II et sa réciproque au cas $R = \mathbf{Z}$:

COROLLAIRE. *Un anneau commutatif A est engendré par ses éléments idempotents si, et seulement si, A peut être représenté comme l'anneau de toutes les sections continues à supports compacts d'un faisceau d'anneaux quotients de $\mathbf{Z}$, ayant comme base un espace booléen. A est unitaire si, et seulement si, l'espace de base est compact.*

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Dauns and K. H. Hofmann, *Representation of rings by sections*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 83 (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968).
2. A. L. Foster, *The idempotent elements of a commutative ring form a Boolean algebra; ring-duality and transformation theory*, Duke Math. J. *12* (1945), 143–152.
3. ——— *p-rings and their Boolean vector representation*, Acta Math. *84* (1951), 231–261.
4. K. Keimel, *Darstellung von Halbgruppen und universellen Algebren durch Schnitte in Garben; bireguläre Halbgruppen*, Math. Nachr. *45* (1970), 81–96.
5. N. H. McCoy and D. Montgomery, *A representation of generalized Boolean rings*, Duke Math. J. *3* (1937), 455–459.
6. Ph. Nanzetta, *A representation theorem for relatively complemented distributive lattices*, Can. J. Math. *20* (1968), 756–758.
7. R. S. Pierce, *Modules over commutative regular rings*, Mem. Amer. Math. Soc., No. 70 (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967).
8. M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 375–481.
9. H. Subramanian, *Integer-valued continuous functions*, Bull. Soc. Math. France *97* (1969), 275–283.
10. J. L. Zemmer, *Some remarks on p-rings and their Boolean geometry*, Pacific J. Math. *6* (1956), 193–208.

Collège Scientifique Universitaire de Tours,
Tours, France