Compositio Mathematica **105:** 267–359, 1997.

Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$

GÉRARD LAUMON
URA 752 du CNRS
Université Paris-Sud, Mathématiques, Bât. 425, F-91405 Orsay Cedex, France,
Tél: 33 1 69 15 78 28, Fax: 33 1 69 15 60 19
e-mail: Gerard.Laumon@math.u-psud.fr

Received 24 May 1995; accepted in final form 17 December 1995

Abstract. In this paper we compute the cohomology with compact supports of a Siegel threefold as a virtual module over the product of the Galois group of $\bar{\mathbb{Q}}$ over $\mathbb{Q}$ and the Hecke algebra. We use a method which has been developed by Ihara, Langlands and Kottwitz: comparison of the Grothendieck–Lefschetz formula and the Arthur–Selberg trace formula.

Key words: Shimura variety, ℓ-adic cohomology, automorphic representation.

Introduction

On notera G le schéma en groupe $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Z}}$ défini par

$$G(R) = \{g \in \mathrm{GL}(4, R) \mid \exists c(g) \in R^{\times} \quad \text{tel que } gJ^{t}g = c(g)J\},$$

pour tout anneau R, où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On fixe un sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbb{A}_f)$ ($\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ est l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$) et on suppose pour simplifier que

$$K = K_N \subset K_{\max} = G(\widehat{\mathbb{Z}}),$$

où

$$K_N = \mathrm{Ker}(G(\widehat{\mathbb{Z}}) \twoheadrightarrow G(\widehat{\mathbb{Z}}/N\widehat{\mathbb{Z}})),$$

pour un entier $N \geqslant 3$.

A K est attaché une variété de Shimura S_K sur $\mathbb{Q}$. La variété analytique sous-jacente admet l'uniformisation

$$S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}} = G(\mathbb{Q})\backslash[(G(\mathbb{R})/K'_{\mathbb{R}}) \times (G(\mathbb{A}_f)/K)],$$

où

$$K'_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_{+}^{\times} K_{\mathbb{R}},$$

et

$$K_{\mathbb{R}} = \{g \in G(\mathbb{R}) \mid g^{t}g = 1\} \cong U(2, \mathbb{C}).$$

Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre $R, S_K(R)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de R-surfaces abéliennes principalement polarisées, munies d'une structure principale de niveau N. On rappelle que S_K est une variété quasi-projective et lisse, purement de dimension 3, sur $\mathbb{Q}$.

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout nombre premier ℓ, les espaces de cohomologie ℓ-adique

$$H_c^i(S_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell),$$

sont nuls pour $i \notin [0, 6]$, de dimension finie sur $\mathbb{Q}_\ell$ et munis d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ pour tout i (ils sont même nuls pour $i = 0, 1, 5$). Si on note comme d'habitude

$$\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K),$$

la $\mathbb{C}$-algèbre de convolution des fonctions $f\colon G(\mathbb{A}_f) \to \mathbb{C}$ qui sont K-invariantes à gauche et à droite et à support compact et si on note

$$\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\mathbb{Q}} \subset \mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K),$$

la $\mathbb{Q}$-structure sur cette $\mathbb{C}$-algèbre formée des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Q}$, $\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\mathbb{Q}}$ agit sur les $H_c^i(S_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ et cette action commute à celle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (les opérateurs de Hecke sont définis sur $\mathbb{Q}$).

Introduisons le $(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\mathbb{Q}})$-module virtuel

$$W_\ell = \sum_{i=0}^{6} (-1)^i H_c^i(S_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Le résultat principal de cet article est le calcul de ce module virtuel (Théorème (8.1) et son Corollaire (8.2)). Pour cela nous utilisons la méthode d'Ihara, Langlands et Kottwitz: comparaison des formules des traces de Grothendieck–Lefschetz et d'Arthur–Selberg. Cette méthode s'applique en général à l'étude de la cohomologie des variétés de Shimura liées aux variétés abéliennes et une grande part des difficultés inhérentes à cette méthode ont été résolues par Kottwitz. Seules subsistent à l'heure actuelle deux difficultés majeures d'une part, le 'transfert' et le 'lemme fondamental' et, d'autre part, le calcul des 'contributions à l'infini' pour les variétés de Shimura non compactes.

Pour G arbitraire, le transfert endoscopique réel a été établi par Shelstad. Quant au lemme fondamental pour le changement de base p-adique, il a été établi par Kottwitz, Clozel et Labesse. Pour $G = \mathrm{GSp}(4)$, les différentes versions du transfert endoscopique p-adique et du lemme fondamental endoscopique p-adique dont nous avons besoin ont été établies par Hales et Waldspurger (et aussi par Schröder et Weissauer). *On fera cependant attention au fait que la réduction à l'élément unité du lemme fondamental pour l'endoscopie n'est écrite pour l'instant que dans le cas de l'endoscopie ordinaire* (cf. [Ha 4]). *Comme il ne fait guère de doute que des arguments similaires donnent aussi la réduction à l'élément unité dans le cas de l'endoscopie tordue, nous supposerons cette réduction effectuée. De ce fait, nos résultats sont (provisoirement) conditionnels.*

Pour résoudre les problèmes liés à la non compacité de S_K, la méthode habituelle consiste à compactifier S_K à la Satake et à étudier la frontière. Notre approche est différente et est inspirée par un travail de Flicker et Kazhdan [Fl-Ka 1]. Nous utilisons la conjecture de Deligne, prouvée par Pink, pour calculer la trace de W_ℓ en termes de nombre de points fixes dans S_K. Puis nous comparons ce nombre de points fixes à une combinaison linéaire des côtés géométriques des formules des traces non invariantes d'Arthur pour G et son groupe endoscopique H et pour des fonctions convenablement choisies sur G et H (en particulier, les composantes à l'infini sont choisies *très cuspidales*). Enfin, nous explicitons les côtés spectraux de ces formules des traces en utilisant des calculs de résidus dûs à Arthur.

Faute de savoir stabiliser la partie discrète de la formule des traces, le résultat de notre calcul de W_ℓ n'est pas sous une forme idéale, mais il est suffisant pour obtenir le théorème suivant (précisé par le Théorème (7.5)).

THÉORÈME. *Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible de $G(\mathbb{A})$ telle que $\pi_{\mathbb{R}}$ ait le même caractère central et le même caractère infinitésimal que la représentation triviale de $G(\mathbb{R})$. Alors il existe un ensemble fini S_π de nombres premiers contenant tous les p pour lesquels π_p est ramifiée, un demi-entier strictement positif a_π, un corps de nombres $E_\pi \subset \mathbb{C}$ et, pour chaque place finie λ de E_π, une représentation λ-adique semi-simple $V_{\pi,\lambda}$ de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *ayant la propriété suivante: pour chaque nombre premier $p \notin S_\pi$ et chaque place finie λ de E ne divisant pas p, $V_{\pi,\lambda}$ est non ramifiée en p et, quel que soit $j \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j, V_{\pi,\lambda}) = a_\pi p^{3j/2}(z_1(\pi_p)^j + z_2(\pi_p)^j + z_3(\pi_p)^j + z_4(\pi_p)^j),$$

où Φ_p est l'élément de Frobenius géométrique en p et où

$$\mathrm{diag}(z_1(\pi_p), z_2(\pi_p), z_3(\pi_p), z_4(\pi_p)) \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{C}),$$

est le paramètre de Langlands de π_p.

Ce théorème complète les résultats démontrés par Taylor dans [Ta].

Un résultat similaire a été obtenu par Harder et Weissauer (cf. [Har] et [We 1]). Harder et Weissauer n'utilisent pas la formule des traces d'Arthur. A la place ils utilisent la formule des traces de Goresky et MacPherson.

Pour ne pas allonger démesurément cet article, nous nous sommes limités au cas du système de coefficients constant sur S_K. C'est d'ailleurs, d'une certaine façon, le cas le plus compliqué. Le lecteur courageux pourra traiter de la même manière le cas d'un système de coefficients arbitraire.

1. La conjecture de Deligne pour S_K

Fixons un 'bon' nombre premier $p \neq \ell$ pour K, i.e. tel que

$$K = K^p K_p,$$

avec

$$K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p),$$

et

$$K_p = G(\mathbb{Z}_p) \subset G(\mathbb{Q}_p),$$

ou, ce qui revient au même, tel que $p \nmid N$. Alors S_K est la fibre générique d'un $\mathbb{Z}_p$-schéma quasi-projectif et lisse $\mathcal{S}_K$: $\mathcal{S}_K$ est le schéma de modules des surfaces abéliennes principalement polarisées sur une $\mathbb{Z}_p$-algèbre, munies d'une structure principale de niveau N. Ce $\mathbb{Z}_p$-schéma $\mathcal{S}_K$ est lui même l'ouvert complémentaire d'un diviseur de Cartier à croisements normaux relatif dans un $\mathbb{Z}_p$-espace algébrique propre et lisse $\overline{\mathcal{S}}_K$ (cf. [Fa-Ch] Ch. IV, Thm. 6.7).

Il s'en suit que l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur chaque $H_c^i(S_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est non ramifiée en p. Plus précisément, fixons de plus une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et notons $\overline{\mathbb{F}}_p$ le corps résiduel de la clôture intégrale $\overline{\mathbb{Z}}_p$ de $\mathbb{Z}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (c'est une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$). Alors, on a des homomorphismes uniquement déterminés par ces choix

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \hookleftarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$$

et, pour chaque i, on a des isomorphismes $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$H_c^i(S_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H_c^i(S_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}_p, \mathbb{Q}_\ell) \cong H_c^i(\mathcal{S}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)$$

(cf. par exemple [Il] 1.3.3). Comme tout ceci vaut sans modification si on remplace K^p par un de ses sous-groupes d'indice fini, on voit facilement que les isomorphismes ci-dessus sont aussi équivariants pour l'action de l'algèbre

$$\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)_{\mathbb{Q}}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

Notons Φ_p n'importe quel élément de Frobenius géométrique en p dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, i.e. n'importe quel élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui est l'image d'un relèvement dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ du générateur topologique

$$\mathrm{Frob}_p\colon \alpha \mapsto \alpha^{1/p}$$

de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$. Il suit de ce qui précède que

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p 1_{K_p}, W_\ell) = \mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p^j \times f^p, R\Gamma_c(\mathcal{S}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)), \tag{1.1}$$

pour tout entier $j \geqslant 0$ et toute fonction $f^p \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)_{\mathbb{Q}}$ (1_{K_p} est la fonction caractéristique de K_p dans $G(\mathbb{Q}_p)$).

Si f^p est la fonction caractéristique d'une double classe $K^p g K^p$ dans $G(\mathbb{A}_f^p)$ ($g \in G(\mathbb{A}_f^p)$) et si

$$p^j > [K^p\colon K^p \cap gK^pg^{-1}],$$

les points fixes de la correspondance $\mathrm{Frob}_p^j \times f^p$ agissant sur le $\mathbb{F}_p$-schéma $\mathcal{S}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ sont isolés (cf. [Zi] Lemme (2.3)). Notons

$$N(j, f^p)$$

le nombre de ces points fixes, comptés avec multiplicité. Par $\mathbb{Q}$-linéarité, on définit $N(j, f^p) \in \mathbb{Q}$ pour $f^p \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)_{\mathbb{Q}}$ arbitraire et j assez grand par rapport à f^p.

On a alors le cas particulier suivant de la conjecture de Deligne (cf. [Pi] Théorème 7.2.2).

THÉORÈME (1.2) (Pink). *Pour toute fonction $f^p \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)_{\mathbb{Q}}$, il existe un entier $j(f^p) > 0$ ayant la propriété suivante. Pour tout entier $j \geqslant j(f^p)$, le nombre des points fixes $N(j, f^p) \in \mathbb{Q}$ de la correspondance* $\mathrm{Frob}_p^j \times f^p$ *est bien défini et on a*

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Frob}_p^j \times f^p, R\Gamma_c(\mathcal{S}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{F}}_p, \mathbb{Q}_\ell)) = N(j, f^p). \qquad \square$$

COROLLAIRE (1.3). *Pour toute fonction $f^p \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)_{\mathbb{Q}}$ et tout entier $j \geqslant j(f^p)$, on a*

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p 1_{K_p}, W_\ell) = N(j, f^p). \qquad \square$$

2. Rappel des résultats de Kottwitz

D'après Kottwitz (cf. [Ko 1] (19.5)), le nombre des points fixes $N(j, f^p)$ est égal à

$$\sum_{\substack{(\gamma_0;\gamma,\delta)\\ \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1}} c(\gamma_0;\gamma,\delta) O_\gamma(f^p) TO_\delta(\varphi_j) \tag{2.1}$$

(avec les notations de *loc. cit.*; on remarquera que, pour notre groupe $G = \mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$, on a $\ker^1(\mathbb{Q}, G) = \{1\}$).

Toujours d'après Kottwitz (cf. [Ko 2] Thm. 7.2), l'expression (1.1) peut être 'stabilisée', i.e. réécrite sous la forme

$$ST_e(f^G) + \iota(G,H)c(\Delta)ST_e^*(f^H), \tag{2.2}$$

pour certaines fonctions

$$f^G = f_{\mathbb{R}}^G f^p b_j^G(\varphi_j)$$

et

$$f^H = f_{\mathbb{R}}^H h^p b_j^H(\varphi_j),$$

et modulo certaines hypothèses qui résultent, pour notre groupe G particulier, de résultats de Clozel, Labasse, Hales, Waldspurger et Weissauer.

Explicitons les termes de l'expression (2.1) et ces hypothèses.

(2.3) **Le groupe G.** Soient

$$T = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4) \mid t_1t_4 = t_2t_3\}$$

le tore maximal des matrices diagonales dans G et $\mathcal{L}$ l'ensemble des sous-groupes de Levi de G contenant T. Soit $B \subset G$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. On a

$$\begin{aligned}
&R = R(G,T) = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2), \pm(2\alpha_1+\alpha_2)\}\\
&\cup\\
&R^+ = R(B,T) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2\}\\
&\cup\\
&\Delta = \Delta(B,T) = \{\alpha_1, \alpha_2\},
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = t_1/t_2 \\ \alpha_2(t) = t_2/t_3. \end{cases}$$

On identifiera les espaces $\mathfrak{a}_T^G$ et $(\mathfrak{a}_T^G)^*$ d'Arthur à $\mathbb{R}^2$ de sorte que

$$\alpha_1^\vee = (1,-1), \qquad \alpha_2^\vee = (0,1),$$

$$\alpha_1 = (1,-1), \qquad \alpha_2 = (0,2)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

et, donc,

$$(\alpha_1+\alpha_2)^\vee = (1,1), \qquad (2\alpha_1+\alpha_2)^\vee = (1,0),$$

$$\alpha_1+\alpha_2 = (1,1), \qquad 2\alpha_1+\alpha_2 = (2,0)$$

(les co-racines sont dans $\mathfrak{a}_T^G$ et les racines dans $(\mathfrak{a}_T^G)^*$).

On note W le groupe de Weyl de (G,T). Le groupe fini W admet la présentation

$$W = \langle \varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma \mid \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \sigma^2 = 1,\ \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1,\ \sigma\varepsilon_1 = \varepsilon_2\sigma\rangle,$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{2\alpha_1+\alpha_2} = s_{(2\alpha_1+\alpha_2)^\vee} \\ \varepsilon_2 = s_{\alpha_2} = s_{\alpha_2^\vee} \\ \sigma = s_{\alpha_1} = s_{\alpha_1^\vee} \\ \sigma\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2\sigma = s_{\alpha_1+\alpha_2} = s_{(\alpha_1+\alpha_2)^\vee} \end{cases}$$

(pour chaque racine $\alpha, s_\alpha = s_{\alpha^\vee} \in W$ est la réflexion simple correspondante).

On a

$$\mathcal{L} = \{G, M_1, M_1', M_2, M_2', T\},$$

avec

$$M_1 = M_{\{\alpha_1\}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda A^* \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{GL}(2), \lambda \in \mathrm{GL}(1) \right\}$$

que l'on identifiera à

$$\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(1) = \{(A,\lambda)\},$$

avec

$$M_1' = \dot{s}_{\alpha_2} M_1 \dot{s}_{\alpha_2}^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 & \times \\ \times & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 & \times \end{pmatrix} \right\},$$

avec

$$M_2 = M_{\{\alpha_2\}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det A}{\mu} \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathrm{GL}(1), A \in \mathrm{GL}(2) \right\}$$

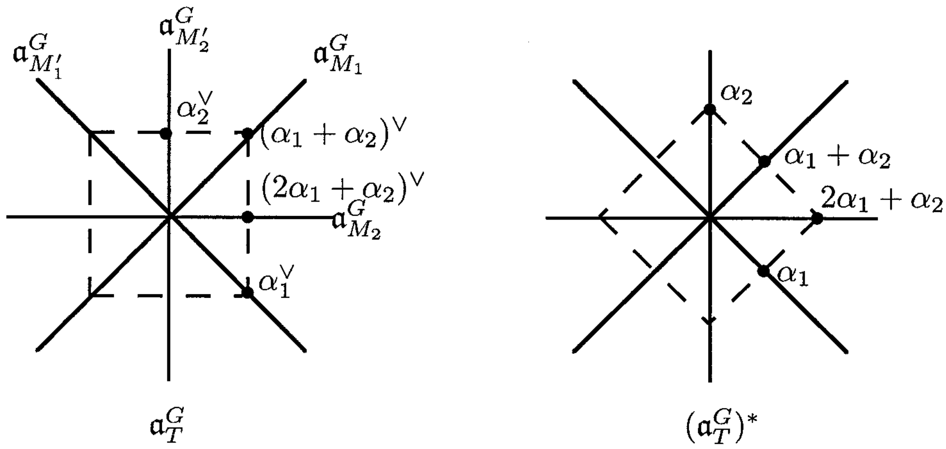

Figure 1.

que l'on identifiera à

$$\mathrm{GL}(1)\times\mathrm{GL}(2)=\{(\mu,A)\},$$

avec

$$M_2'=\dot{s}_{\alpha_1}M_2\dot{s}_{\alpha_1}^{-1}=\left\{\begin{pmatrix}\times&0&0&\times\\0&\times&0&0\\0&0&\times&0\\\times&0&0&\times\end{pmatrix}\right\}$$

(on a posé $A^*=S^tA^{-1}S$ et, pour tout $w\in W, \dot{w}$ est un représentant de w dans $K_{\mathbb{R}}\cap G(\mathbb{Z})$).

On identifie le groupe dual

$$\widehat{G}=\mathrm{GSpin}(5,\mathbb{C})$$

de G à

$$\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})\subset\mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$$

par la représentation spinorielle. Le tore dual de T est

$$\widehat{T}=\{(\hat{u},\hat{u}^{-1},\hat{u}^{-1},\hat{u})\mid\hat{u}\in\mathbb{C}^\times\}\backslash(\mathbb{C}^\times)^4$$

et on a une classe de $\widehat{G}$-conjugaison de plongements de $\widehat{T}$ dans $\widehat{G}$, à savoir la classe du plongement

$$\iota\colon\widehat{T}\hookrightarrow\widehat{G},\hat{t}\mapsto\mathrm{diag}(\hat{t}_1\hat{t}_2,\hat{t}_1\hat{t}_3,\hat{t}_2\hat{t}_4,\hat{t}_3\hat{t}_4).$$

(2.4) **La fonction** $f_{\mathbb{R}}^G$. Soit Π le L-paquet de représentations de la série discrète de $G(\mathbb{R})$ ayant le même caractère central et le même caractère infinitésimal que la représentation triviale de $G(\mathbb{R})$. Le paramètre de Langlands de Π n'est autre que

$$\begin{aligned}\varphi\colon W_{\mathbb{R}} &\to \widehat{G} \times W_{\mathbb{R}} = {}^L G \\ z &\mapsto \left(\operatorname{diag}\left(\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{3/2}, \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{-1/2}, \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{-3/2}\right), z\right) \\ \tau &\mapsto (J, \tau)\end{aligned}$$

$(W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^\times \cup \mathbb{C}^\times \tau, \tau^2 = -1 \in \mathbb{C}^\times, \tau z \tau^{-1} = \overline{z}; (\frac{z}{\overline{z}})^{n/2} = \frac{z^n}{|z|^n})$.

Considérons le tore maximal elliptique de G sur $\mathbb{R}$,

$$T_G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & 0 \\ -y_1 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \neq 0 \right\} \subset G.$$

et sa pseudo-diagonalisation induite par

$$I_G = I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{C}):$$

on a

$$\begin{array}{ccc} I^{-1} T_G(\mathbb{C}) I & = & T(\mathbb{C}) \subset G(\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ I^{-1} T_G(\mathbb{R}) I & = & \{t \in T(\mathbb{C}) \mid t_3 = \overline{t}_2, t_4 = \overline{t}_1\} \end{array}$$

et

$$\Omega_G \overset{\text{dfn}}{=\!=} I^{-1} W(G(\mathbb{R}), T_G(\mathbb{R})) I = \{1, \varepsilon_1\varepsilon_2, \sigma, \sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\} \subset W.$$

Le groupe dual de T_G n'est autre que

$${}^L T_G = \widehat{T} \rtimes W_{\mathbb{R}}$$

où $\mathbb{C}^\times = W_{\mathbb{C}} \subset W_{\mathbb{R}}$ agit trivialement sur $\widehat{T}$ et où $\tau \in W_{\mathbb{R}} - W_{\mathbb{C}}$ agit par

$$(\widehat{t}_1, \widehat{t}_2, \widehat{t}_3, \widehat{t}_4) \mapsto (\widehat{t}_4, \widehat{t}_3, \widehat{t}_2, \widehat{t}_1).$$

Il est alors clair que le paramètre de Langlands φ de Π se factorise en

$$W_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\psi} {}^{L}T_G \xhookrightarrow{\eta_{IBI^{-1}}} {}^{L}G,$$

où

$$\begin{aligned} \psi: W_{\mathbb{R}} &\to \widehat{T} \rtimes W_{\mathbb{R}} = {}^{L}T \\ z &\mapsto (1, z) \\ \tau &\mapsto (1, \tau) \end{aligned}$$

et où

$$\begin{aligned} \eta_{IBI^{-1}}: {}^{L}T_G = \widehat{T} \rtimes W_{\mathbb{R}} &\hookrightarrow \widehat{G} \times W_{\mathbb{R}} = {}^{L}G \\ (\widehat{t}, 1) &\mapsto (\mathrm{diag}(\widehat{t}_1\widehat{t}_2, \widehat{t}_1\widehat{t}_3, \widehat{t}_2\widehat{t}_4, \widehat{t}_3\widehat{t}_4), 1) \\ (1, z) &\mapsto \left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{3/2}, \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{-1/2},\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{-3/2}\right), z\right) \\ (1, \tau) &\mapsto (J, \tau). \end{aligned}$$

Par dualité de Langlands pour T_G, le paramètre ψ correspond au caractère trivial,

$$\chi \equiv 1,$$

de $T_G(\mathbb{R})$. Le L-paquet Π admet alors la description suivante (cf. [She 1] et [Ko 2] Sect. 7). Pour chaque $w \in W$, il y a (à isomorphisme près) une unique représentation irréductible de la série discrète de $G(\mathbb{R})$

$$\pi(\varphi, w),$$

dont le caractère $\Theta_{\pi(\varphi,w)}$ est donné sur $T_{G,\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) \subset T_G(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{R})$ par la fonction lisse

$$\gamma \mapsto (-1)^3 \sum_{\omega \in \Omega_G} \frac{\chi(I(\omega w)^{-1} I^{-1} \gamma I \omega w I^{-1})}{\Delta((\omega w)^{-1} I^{-1} \gamma I \omega w)},$$

où on a posé

$$\Delta(t) = \prod_{\alpha \in R^+} (1 - \alpha(t)^{-1}) \quad (\forall t \in T(\mathbb{C})).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

On a de plus

$$\pi(\varphi, w') \cong \pi(\varphi, w)$$

si et seulement si $w' \in \Omega_G w$ et le L-paquet Π est égal à

$$\{\pi(\varphi, w) \mid w \in \Omega_G \backslash W\},$$

i.e. à

$$\{\pi' = \pi(\varphi, 1), \pi'' = \pi(\varphi, \varepsilon_1)\},$$

avec

$$\Theta_{\pi'}(\gamma) = (-1)^3 \frac{t_1 t_2 + t_1 \overline{t}_1 + \overline{t}_1 \overline{t}_2}{(t_1 - \overline{t}_1)(t_2 - \overline{t}_2)}$$

et

$$\Theta_{\pi''}(\gamma) = (-1)^3 \frac{\overline{t}_1 t_2 + t_1 \overline{t}_1 + t_1 \overline{t}_2}{(\overline{t}_1 - t_1)(t_2 - \overline{t}_2)},$$

où $I^{-1}\gamma I = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \overline{t}_2, \overline{t}_1)$. On vérifie facilement que

$$(-1)^3 S\Theta_\varphi(\gamma^{-1}) = 1$$

(trace de γ dans la représentation triviale de $G(\mathbb{R})$) pour tout $\gamma \in T_{G,\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$, où on a posé

$$S\Theta_\varphi = \Theta_{\pi'} + \Theta_{\pi''}.$$

Choisissons des pseudo-coefficients $f_{\pi'}$ et $f_{\pi''}$ pour π' et π'' respectivement dans l'algèbre de convolution

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^\times \backslash G(\mathbb{R}))$$

des fonctions lisses, à support compact et $K_{\mathbb{R}}$-finies à gauche et à droite sur $\mathbb{R}^\times \backslash G(\mathbb{R})$ (cf. [Cl-De] Cor. de la Prop. 5). Alors, on pose

$$f_{\mathbb{R}}^G = \frac{(-1)^3}{2}(f_{\pi'} + f_{\pi''}) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^\times \backslash G(\mathbb{R})).$$

C'est une fonction cuspidale stable au sens de [Ar 1] Section 4.

(2.5) **La fonction φ_j et l'homomorphisme de changement de base b_j^G.** Pour tout entier $j \geqslant 1$, on note simplement $\mathbb{Q}_{p^j}$ l'extension non ramifiée de degré j de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et $\mathbb{Z}_{p^j}$ son anneau des entiers.

L'isomorphisme de Satake, noté $(-)^{\vee}$, identifie l'algèbre de Hecke

$$\mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j})$$

$(K_{p^j} = G(\mathbb{Z}_{p^j}))$ à l'algèbre

$$\mathbb{C}[X_*(T)]^W = \mathbb{C}[\widehat{T}/W].$$

Si $\mu \in X_*(T)$ est le co-caractère

$$u \mapsto \mathrm{diag}(u, u, 1, 1),$$

la fonction

$$\varphi_j \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j})$$

est la fonction caractéristique dans $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ de la double classe

$$K_{p^j}\mu(p)K_{p^j}$$

et il est facile de voir que sa transformée de Satake est

$$\varphi_j^{\vee} = p^{3j/2} \sum_{\nu \in W\cdot\mu} [\nu].$$

L'homomorphisme de changement de base

$$b_j^G\colon \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j}) \to \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$$

est induit, modulo les isomorphismes de Satake, par la multiplication par j dans $X_*(T)$. En particulier, on a

$$b_j^G(\varphi_j)^{\vee} = p^{3j/2} \sum_{\nu \in W\cdot\mu} [j\nu].$$

La première des hypothèses que fait Kottwitz dans [Ko 2] Section 7 est la suivante (avec les notations de *loc. cit.*).

HYPOTHÈSE (2.5.1). *Soit γ un élément semi-simple de $G(\mathbb{Q}_p)$. Alors*

$$SO_{\gamma}(b_j^G(\varphi_j)) = \sum_{\delta} e(I)TO_{\delta}(\varphi_j),$$

où la somme porte sur un système de représentants des classes de σ-conjugaison d'éléments $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^j})$ tels que la norme

$$\mathcal{N}\delta = \delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{j-1}(\delta)$$

est conjugué à γ *dans* $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

Or, cette hypothèse a été démontrée (dans un cadre beaucoup plus général) par Clozel (cf. [Cl] (7.1)) et Labesse (cf. [Lab 1]). Ces deux auteurs déduisent (par voie globale) le lemme fondamental, dans le cas du changement de base et pour une fonction arbitraire, de son cas particulier, pour l'unité de l'algèbre de Hecke, qui avait été prouvé antérieurement par Kottwitz (cf. [Ko 3]).

(2.6) **Le groupe endoscopique** H**.** A équivalence près, G admet un et un seul triple endoscopique elliptique non trivial (H, s, η_0) : H est le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes

$$\mathrm{GL}(1)_{\mathbb{Z}}\backslash[\mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Z}}]$$

$(\mathrm{GL}(1)_{\mathbb{Z}}$ étant plongé par

$$z \mapsto (\mathrm{diag}(z, z), \mathrm{diag}(z^{-1}, z^{-1}))$$

dans $\mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Z}}$, on a

$$s = \mathrm{diag}(1, -1, -1, 1) \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{C}) = \widehat{G}$$

et le plongement η_0 de

$$\widehat{H} = \{(\widehat{g}_1, \widehat{g}_2) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \mid \det \widehat{g}_1 = \det \widehat{g}_2\}$$

dans $\widehat{G}$ est défini par

$$\eta_0\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

(bien entendu, on a

$$\eta_0(\widehat{H}) = (\widehat{G})_s^0 = (\widehat{G})_s).$$

On prolonge η_0 en

$$\eta = \eta_0 \times \mathrm{id}\colon {}^L H = \widehat{H} \times W_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{G} \times W_{\mathbb{Q}} = {}^L G.$$

Soient

$$S = \mathrm{GL}(1)\backslash[T_2 \times T_2]$$

($T_2 = \begin{pmatrix} \times & 0 \\ 0 & \times \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}(2)$) le tore maximal des matrices diagonales dans H et $\mathcal{L}^H$ l'ensemble des sous-groupes de Levi de H contenant S. Soit

$$B^H = \mathrm{GL}(1)\backslash[B_2 \times B_2]$$

($B_2 = \begin{pmatrix} \times & \times \\ 0 & \times \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}(2)$) le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. On a

$$\begin{array}{rcl} R^H & = & R(H,S) = \{\pm\beta_1, \pm\beta_2\} \\ \cup & & \\ R^{H+} & = & R(B^H,S) = \{\beta_1, \beta_2\} \\ \cup & & \\ \Delta^H & = & \Delta(B^H,S) = \{\beta_1, \beta_2\}, \end{array}$$

avec

$$\begin{cases} \beta_1(\mathrm{diag}(t_1', t_1''), \mathrm{diag}(t_2', t_2'')) = t_1'/t_1'' \\ \beta_2(\mathrm{diag}(t_1', t_1''), \mathrm{diag}(t_2', t_2'')) = t_2'/t_2''. \end{cases}$$

On identifiera $\mathfrak{a}_S^H$ et $(\mathfrak{a}_S^H)^*$ à $\mathbb{R}^2$ de sorte que

$$\begin{array}{rcl} \beta_1^\vee & = & (1,1), \qquad \beta_1 = (1,1), \\ \beta_2^\vee & = & (1,-1), \qquad \beta_2 = (1,-1). \end{array}$$

On note W^H le groupe de Weyl de (H,S). Le groupe fini W^H admet la présentation

$$W^H = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1, \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1 \rangle,$$

où

$$\begin{cases} \sigma_1 = s_{\beta_2} = s_{\beta_2^\vee} \\ \sigma_2 = s_{\beta_1} = s_{\beta_1^\vee}. \end{cases}$$

On a

$$\mathcal{L}^H = \{H, L_1, L_2, S\},$$

avec

$$L_1 = L_{\{\beta_1\}} = \mathrm{GL}(1)\backslash[\mathrm{GL}(2) \times T_2]$$

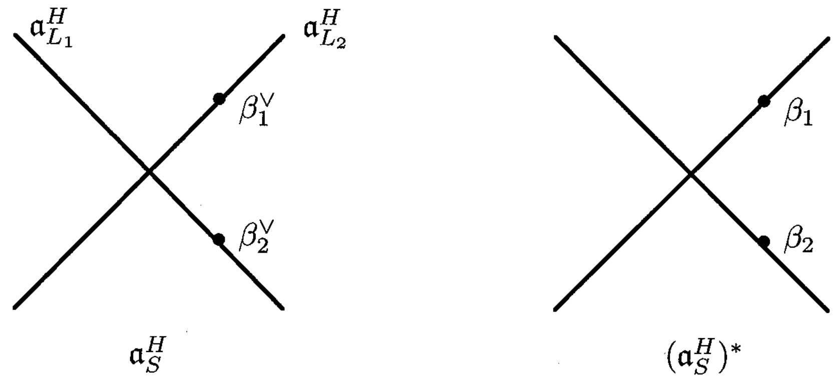

Figure 2.

et

$$L_2 = L_{\{\beta_2\}} = \mathrm{GL}(1)\backslash[T_2 \times \mathrm{GL}(2)]$$

Le tore dual de S est

$$\widehat{S} = \{((\widehat{t}_1', \widehat{t}_1''), (\widehat{t}_2', \widehat{t}_2'')) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \times (\mathbb{C}^\times)^2 \mid \widehat{t}_1'\widehat{t}_1'' = \widehat{t}_2'\widehat{t}_2''\}$$

et on a une classe de $\widehat{H}$-conjugaison de plongements de $\widehat{S}$ dans $\widehat{H}$, à savoir la classe du plongement

$$\iota^H \colon \widehat{S} \hookrightarrow \widehat{H}, ((\widehat{t}_1', \widehat{t}_1''), (\widehat{t}_2', \widehat{t}_2'')) \mapsto (\mathrm{diag}(\widehat{t}_1', \widehat{t}_1''), \mathrm{diag}(\widehat{t}_2', \widehat{t}_2'')).$$

On note

$$j \colon S \xrightarrow{\sim} T$$

l'unique isomorphisme de tores qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \widehat{S} \arrow[r, hook, "\iota^H"] & \widehat{H} \arrow[d, "\eta_0"] \\ \widehat{T} \arrow[u, "\widehat{j}"] \arrow[r, hook, "\iota"] & \widehat{G} \end{tikzcd}$$

où ι est défini en (2.3). On a

$$j(\mathrm{diag}(t_1', t_1''), \mathrm{diag}(t_2', t_2'')) = (t_1't_2', t_1't_2'', t_2't_1'', t_2''t_1'')$$

et j induit un plongement

$$j_* \colon R^H \hookrightarrow R$$

qui envoie $\pm\beta_1$ sur $\pm(\alpha_1+\alpha_2)$ et $\pm\beta_2$ sur $\pm\alpha_1$. Dans la suite, on identifiera à l'aide de j les espaces $\mathfrak{a}_S^H$ et $\mathfrak{a}_S^G$ et les vecteurs $\beta_1^\vee$ et $(\alpha_1+\alpha_2)^\vee$ d'une part et $\beta_2^\vee$ et $\alpha_2^\vee$ d'autre part. De plus, j permet aussi d'identifier W^H au sous-groupe

$$\langle\sigma,\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle$$

de W (on a $\sigma_1\mapsto\sigma$ and $\sigma_2\mapsto\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2$)).

(2.7) **La fonction $f_{\mathbb{R}}^H$.** Soit $\Phi_H(\varphi)$ l'ensemble des classes de $\widehat{H}$-conjugaison de paramètres de Langlands

$$\varphi_H\colon W_{\mathbb{R}}\to {}^L H$$

tels que $\eta\circ\varphi_H$ est $\widehat{H}$-conjugué au paramètre de Langlands φ introduit en (2.4). Il est facile de vérifier que, à $\widehat{H}$-conjugaison près, on a

$$\Phi_H(\varphi)=\{\varphi_H,\widetilde{\varphi}_H\}$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi_H\colon W_{\mathbb{R}} &\to \widehat{H}\times W_{\mathbb{R}}={}^L H\\ z &\mapsto \left(\left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{3/2},\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{-3/2}\right),\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{1/2},\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{-1/2}\right)\right),z\right)\\ \tau &\mapsto \left(\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right),\tau\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_H\colon W_{\mathbb{R}} &\to \widehat{H}\times W_{\mathbb{R}}={}^L H\\ z &\mapsto \left(\left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{1/2},\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{-1/2}\right),\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{3/2},\left(\frac{z}{\bar z}\right)^{-3/2}\right)\right),z\right)\\ \tau &\mapsto \left(\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right),\tau\right).\end{aligned}$$

Considérons le tore maximal elliptique de $\mathrm{GL}(2)$ sur $\mathbb{R}$,

$$T_{\mathrm{GL}(2)}=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\-y&x\end{pmatrix}\,\middle|\,x^2+y^2\neq 0\right\}\subset G.$$

Pour chaque entier $n\geqslant 1$, notons σ_n l'unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de la série discrète de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ dont le caractère Θ_{σ_n} est donné sur $T_{\mathrm{GL}(2),\mathrm{reg}}(\mathbb{R})\subset T_{\mathrm{GL}(2)}(\mathbb{R})\subset\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ par la fonction lisse

$$\mathrm{e}^x\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\mapsto -\mathrm{e}^{(n-1)x}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}-\mathrm{e}^{-in\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}.$$

Si $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^0$ est la composante neutre de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, on a

$$\sigma_n = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^0}^{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})}(\sigma_n^+),$$

où

$$\sigma_n^+(g) = \mathcal{D}_{n+1}^+\left(\frac{g}{\sqrt{\det g}}\right)(\det g)^{(n-1)/2}$$

avec les notations de [Kn] (10.14). On vérifie que σ_n a le même caractère central et le même caractère infinitésimal que la représentation irréductible de dimension finie

$$\mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$$

de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Alors, la représentation

$$\sigma_n\left(\frac{1-n}{2}\right)$$

de $\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ a pour paramètre de Langlands

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{R}} &\to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\times W_{\mathbb{R}} = {}^L\mathrm{GL}(2) \\ z &\mapsto \left(\mathrm{diag}\left(\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{n/2},\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{-n/2}\right),z\right) \\ \tau &\mapsto \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix},\tau\right)\end{aligned}$$

(on rappelle que, pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, on pose

$$\sigma_n(\lambda)(g) = \sigma_n(g)|\det g|^{\lambda},\quad \forall g\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})).$$

Par suite, le L-paquet $\Pi(\varphi_H)$ (resp. $\Pi(\widetilde{\varphi}_H)$) pour $H(\mathbb{R})$ est constitué, à isomorphisme près, d'une et d'une seule représentation irréductible de la série discrète de $H(\mathbb{R})$, à savoir

$$\sigma_3(-1)\otimes\sigma_1$$

(resp.

$$\sigma_1\otimes\sigma_3(-1))$$

(remarquer que, pour n impair, le caractère central de $\sigma_n((1-n)/2)$ est trivial).

Pour $n = 1, 3$, soit

$$f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$$

un pseudo-coefficient pour la représentation irréductible de la série discrète $\sigma_n((1-n)/2)$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ dans l'algèbre de convolution des fonctions lisses, à support compact et $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$-finies à gauche et à droite sur $\mathbb{R}^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Alors,

$$h(\varphi_H) = f_3 \otimes f_1\colon (g_1, g_2) \mapsto f_3(g_1) f_1(g_2)$$

(resp.

$$h(\widetilde{\varphi}_H) = f_1 \otimes f_3\colon (g_1, g_2) \mapsto f_1(g_1) f_3(g_2))$$

est un pseudo-coefficient, $K_{\mathbb{R}}^H$-fini à gauche et à droite, pour l'unique représentation (irréductible de la série discrète) du L-paquet $\Pi(\varphi_H)$ (resp. $\Pi(\widetilde{\varphi}_H)$), où on a posé

$$K_{\mathbb{R}}^H = \{\pm 1\} \Bigg\backslash \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \right) \,\middle|\, a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \right\}.$$

D'après Kottwitz (cf. [Ko 2] Sect. 7), on peut alors prendre pour $f_{\mathbb{R}}^H$ la combinaison linéaire

$$f_{\mathbb{R}}^H = (-1)^3 \langle \mu_h, s \rangle (\det(\omega_*(\varphi_H)) h(\varphi_H) + \det(\omega_*(\widetilde{\varphi}_H)) h(\widetilde{\varphi}_H))$$

de $h(\varphi_H)$ et $h(\widetilde{\varphi}_H)$, avec les notations de *loc. cit.*, et il nous reste plus qu'à expliciter les coefficients $\langle \mu_h, s \rangle$, $\det(\omega_*(\varphi_H))$ et $\det(\omega_*(\widetilde{\varphi}_H))$.

Soit S_H le tore maximal elliptique

$$\mathrm{GL}(1)_{\mathbb{R}} \backslash [T_{\mathrm{GL}(2)} \times T_{\mathrm{GL}(2)}]$$

de H sur $\mathbb{R}$. Si on pose

$$I_H = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right) \in H(\mathbb{C}),$$

on a

$$\begin{array}{rcl} I_H^{-1} S_H(\mathbb{C}) I_H & = & S(\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ I_H^{-1} S_H(\mathbb{R}) I_H & = & \{(\mathrm{diag}(t_1', t_1''), \mathrm{diag}(t_2', t_2'')) \in S(\mathbb{C}) \mid t_1'' = \overline{t}_1', t_2'' = \overline{t}_2'\} \end{array}$$

et

$$\Omega_H \overset{\mathrm{dfn}}{=\!=} I_H^{-1} W(H(\mathbb{R}), S_H(\mathbb{R})) I_H = W^H.$$

L'isomorphisme de tores $j\colon S \xrightarrow{\sim} T$ défini en (2.6) induit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-tores

$$j_H\colon S_H \xrightarrow{\sim} T_G$$

au sens où j_H fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} S_H(\mathbb{C}) \arrow[r, "j_H(\mathbb{C})"] \arrow[d, "I_H^{-1}(-)I_H"'] & T_G(\mathbb{C}) \arrow[d, "I^{-1}(-)I"] \\ S(\mathbb{C}) \arrow[r, "j(\mathbb{C})"] & T(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

et on a

$$W = W^H W_*$$

où

$$W_* = \{w \in W \mid w(R^+) \subset R^{H+}\} = \{1, \varepsilon_2\}.$$

On vérifie alors facilement que

$$(j_H, IBI^{-1}, I_H B^H I_H^{-1}) \quad \text{et} \quad \varphi_H,$$

d'une part, et

$$((I\varepsilon_2 I^{-1})^{-1} \circ j_H, IBI^{-1}, I_H B^H I_H^{-1}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi}_H,$$

d'autre part, sont alignés au sens de [Ko 2] Section 7, de sorte que

$$\omega_*(\varphi_H) = 1, \qquad \det(\omega_*(\varphi_H)) = 1$$

et

$$\omega_*(\widetilde{\varphi}_H) = I\varepsilon_2 I^{-1}, \qquad \det(\omega_*(\widetilde{\varphi}_H)) = -1.$$

De plus, on a

$$\mu_h = (u \mapsto \mathrm{diag}(u, u, 1, 1)) \in X_*(T),$$

i.e.

$$\mu_h = (\hat{t} \mapsto \hat{t}_1\hat{t}_2) \in X^*(\hat{T}),$$

de sorte que

$$\langle \mu_h, s\rangle \overset{\text{dfn}}{=\!=} \mu_h(\hat{j}^{-1}(s)) = 1.$$

En résumé, on peut prendre pour $f_{\mathbb{R}}^H$ la fonction cuspidale stable (au sens de [Ar 1] Sect. 4)

$$f_{\mathbb{R}}^H = (-1)^3(f_3 \otimes f_1 - f_1 \otimes f_3) \in \mathcal{H}(A_H(\mathbb{R})\backslash H(\mathbb{R})).$$

(2.8) **La fonction h^p.** Pour chaque place $v \neq= \infty, p$, soit Δ_v le facteur de transfert de Langlands et Shelstad pour (H, s, η) sur $\mathbb{Q}_v$ normalisé par les structures entières de G et H sur $\mathbb{Z}_v$ (cf. [La-Sh] et [Ha 1] Partie II, Sect. 7). On pose

$$\Delta_f^p = \prod_{v\neq\infty,p} \Delta_v$$

(ce produit est bien défini).

La fonction h^p est n'importe quelle fonction lisse à support compact sur $H(\mathbb{A}_f^p)$ qui vérifie les conditions suivantes: pour tout $\gamma_H \in H(\mathbb{A}_f^p)$ semi-simple et (G, H)-régulier, on a

$$SO_{\gamma_H}(h^p) = \sum_{\gamma} \Delta_f^p(\gamma_H, \gamma)e^p(\gamma)O_\gamma(f^p),$$

avec les notations de [Ko 2] (7.1) et pour une normalisation convenable des mesures de Haar.

HYPOTHÈSE (2.8.1). *Il existe au moins une telle fonction h^p.*

En général, cette hypothèse résulte de la variante locale de l'Hypothèse (2.8.1) et de l'hypothèse suivante (le lemme fondamental pour l'unité de l'algèbre de Hecke dans le cas de l'endoscopie ordinaire) en presque tous les nombres premiers $q \neq p$.

HYPOTHÈSE (2.8.2). *Pour tout $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_q)$ semi-simple et (G, H)-régulier, on a*

$$SO_{\gamma_H}(1_{K_q^H}) = \sum_{\gamma} \Delta_q(\gamma_H, \gamma)e_q(I)O_\gamma(1_{K_q}),$$

avec les notations de [Ko 2] Section 7*, la normalisation de Hales du facteur de transfert* (cf. [Ha 1]) *et pour une normalisation convenable des mesures de Haar (bien sûr, on a posé $K_q^H = H(\mathbb{Z}_q)$).*

Dans notre cas ($G = \mathrm{GSp}(4)$), la variante locale de Hypothèse (2.8.1) est prouvée par Hales dans [Ha 2] (voir plus particulièrement (2.8), les Propositions 5.23 et 5.25 et le Corollaire 3 du Lemme 6.10), complété par [Sha] et [Rog]. Quant au lemme fondamental pour l'unité de l'algèbre de Hecke dans le cas de l'endoscopie ordinaire, il résulte de l'homogénéité des germes de Shalika prouvée par Waldspurger dans [Wa 1] I.2 et de [Ha 2] (cf. [Ha 3]). Une preuve complètement différente de ce même lemme fondamental a été donnée par Schröder et Weissauer (cf. [We 2]).

(2.9) **L'homomorphisme de changement de base b_j^H.** Considérons le $\mathbb{Q}_p$-schéma en groupes

$$G_j = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p} G$$

de L-groupe

$${}^L G_j = \widehat{G}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p),$$

où le produit semi-direct est défini par la règle

$$(1,\sigma)((\widehat{g}_1,\dots,\widehat{g}_j),1) = ((\widehat{g}_2,\dots,\widehat{g}_j,\widehat{g}_1),\sigma),$$

$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p)$ étant l'élément de Frobenius. Choisissons arbitrairement des éléments $s_1,\dots,s_j$ dans le centralisateur

$$\{\mathrm{diag}(a,a',a',a) \mid a,a' \in \mathbb{C}^\times\}$$

de $\eta_0(\widehat{H})$ dans $\widehat{G}$ de telle sorte que

$$s_1 \dots s_j = s = \mathrm{diag}(1,-1,-1,1).$$

Alors la classe de $\widehat{G}^j$-conjugaison de l'homomorphisme de L-groupes

$$\widetilde{\eta}\colon {}^L H = \widehat{H} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{G}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) = {}^L G_j,$$

qui envoie $(\widehat{h},\sigma^i)$ sur

$$((\eta_0(\widehat{h})s_1^{-1}\dots s_i^{-1}, \eta_0(\widehat{h})s_2^{-1}\dots s_{i+1}^{-1},\dots,\eta_0(\widehat{h})s_{1+j-i}^{-1}\dots s_j^{-1},$$

$$\eta_0(\widehat{h})s_{2+j-i}^{-1}\dots s_1^{-1},\dots,\eta_0(\widehat{h})s_j^{-1}s_1^{-1}\dots s_{i-1}^{-1}),\sigma^i),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

ne dépend pas des choix de $s_1, \ldots, s_j$ et induit, via les isomorphismes de Satake

$$\mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\widehat{T}/W]$$

et

$$\mathcal{C}_c(H(\mathbb{Q}_p)//K_p^H) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\widehat{S}/W^H],$$

l'homomorphisme d'algèbres de Hecke

$$b_j^H: \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j}) \to \mathcal{C}_c(H(\mathbb{Q}_p)//K_p^H).$$

Concrètement, compte tenu des plongements $\iota: \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$ et $\iota^H: \widehat{S} \hookrightarrow \widehat{H}$ de (2.3) et (2.6) respectivement, $\widetilde{\eta}$ induit un homomorphisme

$$\widehat{S} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{T}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p)$$

qui, composé avec l'homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \widehat{T}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) & \to & \widehat{T} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \\ ((\widehat{t}_1, \ldots, \widehat{t}_j), \sigma^i) & \mapsto & (\widehat{t}_1 \cdots \widehat{t}_j, \sigma^i) \end{array}$$

(dual du plongement 'diagonal' de $T_{\mathbb{Q}_p}$ dans $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p} T$), n'est autre que l'homomorphisme

$$\delta: \widehat{S} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{T} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p)$$

défini par

$$\begin{aligned} \delta(((\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1), (\widehat{t}'_2, \widehat{t}''_2)), \sigma^i) &= \left((-1)^i \frac{\widehat{t}'^j_1}{\widehat{t}''^j_2}, (-1)^i \widehat{t}''^j_2, \widehat{t}''^j_1, 1 \right) \\ &\quad \cdot \{ (\widehat{u}, \widehat{u}^{-1}, \widehat{u}^{-1}, \widehat{u}) \mid \widehat{u} \in \mathbb{C}^\times \} \end{aligned}$$

et b_j^H est induit par la restriction de δ à $\widehat{S} \times \{\sigma\}$. En particulier, on a

$$b_j^H(\varphi_j)^\vee((\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1), (\widehat{t}'_2, \widehat{t}''_2)) \equiv p^{3j/2}(\widehat{t}'^j_1 + \widehat{t}''^j_1 - \widehat{t}'^j_2 - \widehat{t}''^j_2) \pmod{\widehat{t}'_1\widehat{t}''_1 - \widehat{t}'_2\widehat{t}''_2},$$

i.e.

$$b_j^H(\varphi_j)^\vee = p^{3j/2}([j\nu'_1] + [j\nu''_1] - [j\nu'_2] - [j\nu''_2])$$

avec des notations évidentes.

HYPOTHÈSE (2.9.1). *Pour tout* $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_p)$ *semi-simple et* (G, H)*-régulier, on a*

$$SO_{\gamma_H}(b_j^H(\varphi_j)) = \sum_{\delta} \langle \alpha(\gamma_0; \delta), s \rangle \Delta_p(\gamma_H, \gamma_0) e(I) TO_\delta(\varphi_j)$$

avec les notations et les normalisations des mesures de Haar de [Ko 2] (7.2) *et avec la normalisation de Hales du facteur de transfert* (cf. [Ha 1]).

Cette hypothèse locale devrait pouvoir se déduire par voie globale (comparer à [Ha 4]) du lemme fondamental pour l'unité de l'algèbre de Hecke dans le cas de l'endoscopie tordue, i.e. de l'Hypothèse locale (2.9.1) où on a remplacé φ_j par $1_{K_{pj}}$ (et, donc, $b_j^H(\varphi_j)$ par $1_{K_p^H}$). Quant à ce dernier lemme fondamental, il résulte immédiatement du lemme fondamental pour l'unité de l'algèbre de Hecke dans le cas du changement de base, i.e. de l'Hypothèse (2.5.1) où on a remplacé φ_j par $1_{K_{pj}}$ (et, donc, $b_j^G(\varphi_j)$ par 1_{K_p}) et qui a été démontrée par Kottwitz (cf. [Ko 3]), et du lemme fondamental pour l'unité de l'algèbre de Hecke dans le cas de l'endoscopie ordinaire (Hypothèse (2.8.2)).

(2.10) **La distribution** ST_{e}**.** $ST_{\mathrm{e}}(f^G)$ est la partie $\mathbb{Q}$-elliptique de la formule des traces stable pour (G, f^G), i.e.

$$ST_{\mathrm{e}}(f^G) = \sum_{\gamma} |(G_\gamma^0 \backslash G_\gamma)(\mathbb{Q})|^{-1} \tau(G) SO_\gamma(f^G),$$

où γ parcourt un système de représentants des classes de conjugaison stable $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $G(\mathbb{Q})$.

(2.11) **La distribution** ST_{e}^***.** $ST_{\mathrm{e}}^*(f^H)$ est la partie $\mathbb{Q}$-elliptique et (G, H)-régulière de la formule des traces stable pour (H, f^H), i.e.

$$ST_{\mathrm{e}}^*(f^H) = \sum_{\gamma_H} |(H_{\gamma_H}^0 \backslash H_{\gamma_H})(\mathbb{Q})|^{-1} \tau(H) SO_{\gamma_H}(f^H),$$

où γ_H parcourt un système de représentants des classes de conjugaison stable $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples et (G, H)-régulières dans $H(\mathbb{Q})$.

(2.11) **La constante** $\iota(G, H)$**.** En général, par définition, on a

$$\iota(G, H) = \tau(G)\tau(H)^{-1} |\mathrm{Aut}(H, s, \eta)/H_{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})|^{-1}.$$

Ici, on a simplement

$$\iota(G, H) = \tfrac{1}{4}.$$

(2.12) **La constante** $c(\Delta)$**.** Si on normalise le facteur de transfert Δ_v (de G à H) en la place v comme dans [Ko 2] Section 7 si $v = \infty$ ou $v = p$ et par les structures entières de G et H si $v \neq \infty, p$ (cf. (2.8)), le produit

$$\Delta = \prod_v \Delta_v = \Delta_\infty \Delta_f^p \Delta_p$$

diffère du facteur de transfert adélique $\Delta_{\mathbb{A}}$ de Langlands et Shelstad par une certaine constante

$$c(\Delta) \in \mathbb{C}^\times,$$

i.e. on a la relation

$$\Delta_{\mathbb{A}} = c(\Delta)\Delta.$$

3. Simplifications supplémentaires de la formule de Kottwitz pour $N(j, f^p)$

Remarquons tout d'abord que le centralisateur G_γ de tout élément semi-simple γ de G est connexe ($G_{\mathrm{der}} = \mathrm{Sp}(4)$ est simplement connexe).

LEMME (3.1) (Kottwitz). *Pour notre groupe particulier G et notre fonction particulière f^G on a*

$$ST_{\mathrm{e}}(f^G) = T_{\mathrm{e}}(f^G) \stackrel{\mathrm{dfn}}{=\!=} \sum_\gamma \tau(G_\gamma) O_\gamma(f^G),$$

où γ parcourt un système de représentants des classes de conjugaison $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $G(\mathbb{Q})$.

Preuve. Soit T un $\mathbb{R}$-tore maximal de G et soit $T_{\mathrm{reg}} \subset T$ l'ouvert des éléments réguliers dans G. Il suffit de montrer que

$$O_\gamma^\kappa(f_{\mathbb{R}}^G) = 0$$

pour tout $\gamma \in T_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ et tout $\kappa \in \mathcal{K}(T/\mathbb{R})$ non trivial.

Or la fonction $f_{\mathbb{R}}^G$ est cuspidale stable au sens de [Ar 1] Section 4, de sorte que

$$O_{\gamma'}(f_{\mathbb{R}}^G) = O_\gamma(f_{\mathbb{R}}^G)$$

pour tout $\gamma' \in G(\mathbb{R})$ qui est stablement conjugué à γ. Par suite, on a

$$O_\gamma^\kappa(f_{\mathbb{R}}^G) = \left(\sum_{\gamma'} \langle \mathrm{inv}(\gamma, \gamma'), \kappa \rangle\right) O_\gamma(f_{\mathbb{R}}^G).$$

Mais, comme $H^1(\mathbb{R}, G) = \{1\}$, on a

$$\mathcal{D}(T/\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}(T/\mathbb{R})^D$$

et

$$\sum_{\gamma'} \langle \mathrm{inv}(\gamma, \gamma'), \kappa \rangle = \sum_{x \in \mathcal{K}(T/\mathbb{R})^D} \langle x, \kappa \rangle = 0$$

si $\kappa \in \mathcal{K}(T/\mathbb{R})$ est non trivial (les notations sont celles de [Ko 4] Sect. 4 et 5). □

LEMME (3.2). *Il n'y a pas d'endoscopie (non triviale) pour H, i.e. pour tout corps local ou global F de caractéristique nulle et tout $\gamma_H \in H(F)$ semi-simple, on a*

$$\mathcal{K}(I/F) = \{1\}$$

où $I = H^0_{\gamma_H}$.

Preuve. On a la suite exacte

$$1 \to \mathrm{GL}(1) \to H \xrightarrow{\pi} \overline{H} \to 1,$$

où $\overline{H} = \mathrm{PGL}(2) \times \mathrm{PGL}(2)$ $(\mathrm{GL}(1)$ est plongé diagonalement dans $H)$. Par suite, si $\gamma_H \in H(F)$ est semi-simple et si $I = H^0_{\gamma_H}$ et $\overline{I} = \overline{H}^0_{\pi(\gamma_H)}$, on a la suite exacte de F-groupes

$$1 \to \mathrm{GL}(1) \to I \to \overline{I} \to 1.$$

Si $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, on en déduit le diagramme commutatif à lignes et à colonnes exactes suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & & \\
1 \arrow[r] & Z(\widehat{\overline{H}}) \arrow[r] \arrow[d] & Z(\widehat{\overline{I}})^{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d] & {[Z(\widehat{\overline{I}})/Z(\widehat{\overline{H}})]^{\Gamma}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(F, Z(\widehat{\overline{H}})) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(F, Z(\widehat{\overline{I}})) \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & Z(\widehat{H}) \arrow[r] \arrow[d] & Z(\widehat{I})^{\Gamma} \arrow[r] \arrow[d] & {[Z(\widehat{I})/Z(\widehat{H})]^{\Gamma}} \arrow[r] & H^1(F, Z(\widehat{H})) \arrow[r] & H^1(F, Z(\widehat{I})) \\
 & \mathbb{C}^{\times} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{C}^{\times} \arrow[d] & & & \\
 & 1 & 1 & & &
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

($\mathbb{C}^\times$ est connexe). Par suite, on obtient un isomorphisme

$$\mathcal{K}(\overline{I}/F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}(I/F).$$

Or PGL(2) n'a pas d'endoscopie non triviale et, donc, $\overline{H}$ non plus, d'où le lemme. □

LEMME (3.3). *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle et soit*

$$\gamma_H = (\gamma_1, \gamma_2) \in k^\times \backslash [\mathrm{GL}(2,k) \times \mathrm{GL}(2,k)] = H(k)$$

semi-simple. Alors, γ_H est (G,H)-régulier si et seulement si

$$\frac{(\mathrm{tr}\,\gamma_1)^2}{\det \gamma_1} \neq \frac{(\mathrm{tr}\,\gamma_2)^2}{\det \gamma_2}.$$

Preuve. Compte-tenu de l'isomorphisme $j: S \xrightarrow{\sim} T$ de (2.6), $R - R^H$ est constitué des quatre caractères de S suivants:

$$((t_1', t_1''), (t_2', t_2'')) \mapsto (t_1' t_2'' / t_1'' t_2')^{\pm 1}$$

et

$$((t_1', t_1''), (t_2', t_2'')) \mapsto (t_1' t_2' / t_1'' t_2'')^{\pm 1}.$$

Donc, $\gamma_H = (\gamma_1, \gamma_2)$ est (G,H)-régulier si et seulement si

$$\begin{cases} \gamma_1' \gamma_2'' \neq \gamma_1'' \gamma_2' \\ \gamma_1' \gamma_2' \neq \gamma_1'' \gamma_2'', \end{cases}$$

où (γ_1', γ_1'') et (γ_2', γ_2'') sont les valeurs propres de γ_1 et γ_2 respectivement. Le lemme s'ensuit facilement. □

On déduit des lemmes (3.2) et (3.3) le résultat suivant.

LEMME (3.4). *Pour notre groupe H et notre fonction f^H, on a*

$$ST_{\mathrm{e}}^*(f^H) = T_{\mathrm{e}}(f^H) \stackrel{\mathrm{dfn}}{=\!=} \sum_{\gamma_H} |H_{\gamma_H}^0(\mathbb{Q}) \backslash H_{\gamma_H}(\mathbb{Q})|^{-1} \tau(H_{\gamma_H}^0) O_{\gamma_H}(f^H),$$

où γ_H parcourt un système de représentants des classes de conjugaison $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $H(\mathbb{Q})$.

Preuve. D'après (3.2), on a (avec des notations évidentes)

$$ST_{\mathrm{e}}^{*}(f^{H}) = T_{\mathrm{e}}^{*}(f^{H}).$$

Soit maintenant $\gamma_H = (\gamma_1, \gamma_2) \in H(\mathbb{R})$ un élément $\mathbb{R}$-elliptique semi-simple et non (G, H)-régulier. On a (pour des normalisations convenables des mesures de Haar)

$$O_{\gamma_i}(f_3) = -\mathrm{tr}(\gamma_i, \mathrm{Sym}^2(\mathbb{C}^2) \otimes (\Lambda^2\mathbb{C}^2)^{-1}) = 1 - \frac{(\mathrm{tr}\,\gamma_i)^2}{\det \gamma_i}$$

et

$$O_{\gamma_i}(f_1) = -\mathrm{tr}(\gamma_i, \mathbb{C}) = -1,$$

de sorte que

$$O_{\gamma_H}(f_{\mathbb{R}}^{H}) = 0$$

d'après (3.3). Comme en outre, par descente de Harish–Chandra, $O_{\gamma_H}(f_{\mathbb{R}}^{H}) = 0$ pour tout $\gamma_H \in H(\mathbb{R})$ semi-simple qui n'est pas $\mathbb{R}$-elliptique, on a bien

$$T_{\mathrm{e}}^{*}(f^{H}) = T_{\mathrm{e}}(f^{H}). \qquad \square$$

LEMME (3.5), *La constante $c(\Delta)$ est égale à -1.*

Preuve. Considérons les éléments

$$\gamma_H = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \in L_2(\mathbb{Q}) \subset H(\mathbb{Q})$$

et

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_1(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{Q}).$$

Alors, γ est associé à γ_H (sur $\overline{\mathbb{Q}}$, γ_H est conjugué à

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right) \in S(\overline{\mathbb{Q}})$$

et l'image par $j: S \xrightarrow{\sim} T$ (cf. (2.6)) de ce dernier élément est clairement conjugué à γ). Par suite, pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que

$$\Delta(\gamma_H, \gamma) = -1$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

puisque l'on doit avoir

$$c(\Delta)\Delta(\gamma_H,\gamma)=\Delta_{\mathbb{A}}(\gamma_H,\gamma)=1$$

d'après [La-Sh] (6.3).

Si on identifie $\widehat{L}_2$ au sous-groupe

$$\{(\hat{t}_1,\hat{g}_2)\in T_2(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\mid \det\hat{t}_1=\det\hat{g}_2\}$$

de $\widehat{H}$ et $\widehat{M_1}$ au sous-groupe

$$\left\{\begin{pmatrix}\hat{\mu} & 0 & 0\\ 0 & \widehat{A} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\det\widehat{A}}{\hat{\mu}}\end{pmatrix}\middle|\,\hat{\mu}\in\mathbb{C}^\times,\widehat{A}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\right\}$$

de $\widehat{G}=\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})$ (dans l'identification de $\widehat{G}$ à $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})$, les co-racines $\alpha_1^\vee$, $\alpha_2^\vee,(\alpha_1+\alpha_2)^\vee$ et $(2\alpha_1+\alpha_2)^\vee$ de G correspondent respectivement aux racines $\alpha_2,\alpha_1,2\alpha_1+\alpha_2$ et $\alpha_1+\alpha_2$ de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})$), on a

$$\eta_0(\widehat{L}_2)=\widehat{M_1}.$$

Par suite, $L_2=H_{M_1}$ est le groupe endoscopique de M_1 déduit de H par descente et, en fait, la donnée endoscopique $(L_2,s,\eta|^L L_2)$ de M_1 est triviale. Plus précisément, on a l'isomorphisme

$$M_1\xrightarrow{\sim}L_2,\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & \lambda A^*\end{pmatrix}\mapsto\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{\lambda}{\det A}\end{pmatrix},A\right)$$

(modulo $\mathrm{GL}(1)$), dont le dual est $\eta_0|\widehat{L}_2\colon\widehat{L}_2\xrightarrow{\sim}\widehat{M_1}$ et qui envoie γ sur γ_H. On en déduit que, pour toute place finie v de $\mathbb{Q}$, on a

$$\Delta_v^{M_1}(\gamma_H,\gamma)=1$$

et

$$\Delta_v(\gamma_H,\gamma)=\Delta_v^{M_1}(\gamma_H,\gamma)\left|\prod_\alpha(\alpha(\gamma)-1)\right|_v^{1/2}=|4|_v,$$

où α parcourt l'ensemble des racines de G qui ne sont ni dans H ni dans M_1, i.e. $\{\pm\alpha_2,\pm(2\alpha_1+\alpha_2)\}$ (cf. [Ha 1] Lemme (9.2)). On est donc ramené à montrer que

$$\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma)=-4,$$

pour Δ_∞ normalisé comme dans [Ko 2] Section 7.

Pour cela considérons les sous-groupes de Cartan

$$S_0 = S_H, \qquad S_1 = S_{L_2}$$

de H sur $\mathbb{R}$ qui proviennent des sous-groupes de Cartan

$$T_0 = T_G, \qquad T_1 = T_{M_1}$$

de G sur $\mathbb{R}$: T_G et S_H ont été définis en (2.4) et (2.7),

$$S_{L_2} = \mathrm{GL}(1)_{\mathbb{R}} \backslash [T_2 \times T_{\mathrm{GL}(2)}] \subset H,$$

et

$$T_{M_1} = \left\{ \left(\begin{array}{rrrr} x & y & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda' x & -\lambda' y \\ 0 & 0 & \lambda' y & \lambda' x \end{array} \right) \middle| \, x^2 + y^2 \neq 0, \lambda' \neq 0 \right\} \subset G$$

et, pour $n = 0, 1$, on a un isomorphisme de $\mathbb{R}$-tores

$$j_n \colon S_n \xrightarrow{\sim} T_n$$

qui fait commuter le carré

$$\begin{array}{ccc} S_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{j_n(\mathbb{C})} & T_n(\mathbb{C}) \\ {\scriptstyle J_n^{-1}(-)J_n} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle I_n^{-1}(-)I_n} \\ S(\mathbb{C}) & \xrightarrow{j(\mathbb{C})} & T(\mathbb{C}) \end{array}$$

où $I_0 = I_G$ et $J_0 = I_H$ ont été définis en (2.4) et (2.7) et où

$$J_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right) \in L_2(\mathbb{C})$$

et

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \in M_1(\mathbb{C}).$$

Considérons les systèmes de racines imaginaires positives R_n^+ pour T_n et R_N^{H+} pour S_n $(n = 0, 1)$ définis par

$$R_0^+ = \{\alpha_1^{I_0^{-1}}, \alpha_2^{I_0^{-1}}, (\alpha_1 + \alpha_2)^{I_0^{-1}}, (2\alpha_1 + \alpha_2)^{I_0^{-1}}\},$$

$$R_1^+ = \{\alpha_1^{I_1^{-1}}\},$$

$$R_0^{H+} = \{\beta_1^{J_0^{-1}}, \beta_2^{J_0^{-1}}\}$$

et

$$R_1^{H+} = \{\beta_2^{J_1^{-1}}\}.$$

A la racine imaginaire positive $(\alpha_1 + \alpha_2)^{I_0^{-1}}$ (resp. $\beta_1^{J_0^{-1}}$) est associée la transformation de Cayley

$$T_0 \xrightarrow{C^{-1}(-)C} T_1$$

(resp.

$$S_0 \xrightarrow{D^{-1}(-)D} S_1),$$

où

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ -i & 1 & i & -1 \\ 1 & i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix} \in G(\mathbb{C})$$

(resp.

$$D = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \in H(\mathbb{C})),$$

et le carré

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r, "D^{-1}(-)D"] \arrow[d, "j_0"'] & S_1 \arrow[d, "j_1"] \\ T_0 \arrow[r, "C^{-1}(-)C"] & T_1 \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Alors, d'après [She 1] Sections 3 et [She 2] Section 8, 9, 10, si $\gamma = j_n(\gamma_H) \in T_n(\mathbb{R})$ pour un élément (G,H)-régulier $\gamma_H \in S_n(\mathbb{R})$, la valeur en (γ_H,γ) du facteur de transfert Δ_∞ peut se calculer comme suit. On pose

$$\Delta_n(\gamma) = \begin{cases} -\dfrac{4y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} & \text{si } n=0 \\ \dfrac{x^2(1-\lambda')^2+y^2(1+\lambda')^2}{\lambda'(x^2+y^2)} & \text{si } n=1, \end{cases}$$

on choisit des signes ε_0 et ε_1 satisfaisant la relation

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 = \varepsilon_{\kappa_0}(C)\varepsilon(R_1^+,(R_0^+)_C)\varepsilon(R_1^{H+},(R_0^{H+})_D),$$

avec les notations de [Sh 2] (9.5) (ici, on vérifie que R_0^+ est adapté à $\alpha_1+\alpha_2$), et, alors,

$$\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma) = (-1)^{q_G-q_H}\varepsilon_n\Delta_n(\gamma).$$

Par suite, si l'on revient au couple $(\gamma_H,\gamma) \in H(\mathbb{Q}) \times G(\mathbb{Q})$ que l'on a fixé au début de la preuve du lemme, on voit que

$$\Delta_\infty(\gamma_H,\gamma) = 4\varepsilon_1(-1)^{3-2} = -4\varepsilon_1$$

et, donc, on est ramené à démontrer que, si ε_0 est choisi comme dans [Ko 2] Section 7, on a

$$\varepsilon_1 = 1.$$

Or, il est facile de vérifier que

$$(R_0^+)_C = R_1^+$$

(on a $C = I_0I_1^{-1}$), que

$$(R_0^{H+})_D = R_1^{H+}$$

(on a $D = J_0J_1^{-1}$), que

$$\mathcal{D}(T_0) = \mathcal{E}(T_0) = H^1(\mathbb{R},T_0) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

que le caractère κ_0 de $\mathcal{E}(T_0)$ associé à $s = \mathrm{diag}(1,-1,-1,1) \in \widehat{G}$ est le caractère non trivial et que

$$\varepsilon_{\kappa_0}(C) = 1$$

(comme $\overline{C}C^{-1} \in N_G(T_0)$ relève la réflexion simple attachée à la racine $(\alpha_1 + \alpha_2)^{I_0^{-1}}$ de T_0, on peut décomposer $\overline{C}C^{-1}$ en XY, où X est un 1-cocycle de T_0, i.e. $X \in T_0(\mathbb{C})$ et $\overline{X} = X^{-1}$, et où Y est dans le sous-groupe $\mathrm{SL}(2)$ de G attaché à cette racine, i.e.

$$Y \in I_0 \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, ad - bc = 1 \right\} I_0^{-1},$$

et, par définition, $\varepsilon_{\kappa_0}(C)$ est la valeur de κ_0 sur la classe de X dans $H^1(\mathbb{R}, T_0)$; or, il est clair qu'on peut prendre $X = 1$ et

$$Y = I_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} I_0^{-1},$$

de sorte que classe de X dans $H^1(\mathbb{R}, T_0)$ est triviale). Par conséquent, il ne reste plus qu'à vérifier que la normalisation de Δ_∞ dans [Ko 2] Section 7 correspond au choix $\varepsilon_0 = 1$.

Avec les notations de *loc. cit.*, on a

$$\Delta_\infty(\gamma_H, \gamma) = \Delta_{j,B_G}(\gamma_H, \gamma) = (-1)^{q_G - q_H} \chi_{G,H}(\gamma) \frac{\Delta_{B_G}(\gamma^{-1})}{\Delta_{B_H}(\gamma_H^{-1})},$$

où $B_G = I_G B I_G^{-1} \supset T_G$ et $B_H = I_H B^H I_H^{-1} \supset S_H$, où

$$\frac{\Delta_{B_G}(\gamma^{-1})}{\Delta_{B_H}(\gamma_H^{-1})} = -\frac{4y_1y_2}{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)}$$

et où $\chi_{G,H}$ est le caractère de $T_G(\mathbb{R})$ défini comme suit. Les sous-groupes de Borel B_G et B_H déterminent des plongements

$$\eta_{B_G} \colon \widehat{T} \rtimes W_\mathbb{R} = {}^L T_G \hookrightarrow {}^L G = \widehat{G} \rtimes W_\mathbb{R}$$

(cf. (2.4)) et

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}\eta_{B_H}: \widehat{S} \rtimes W_{\mathbb{R}} = {}^L S_H &\hookrightarrow {}^L H = \widehat{H} \rtimes W_{\mathbb{R}} \\ (\widehat{s}, 1) &\mapsto (\widehat{s}, 1) \\ (1, z) &\mapsto \left(\operatorname{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-1/2}\right),\right. \\ &\qquad \left.\operatorname{diag}\left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-1/2}\right), z\right) \\ (1, \tau) &\mapsto \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tau\right)\end{aligned}$$

et on a

$$\eta \circ \eta_{B_H} \circ {}^L j(\widehat{t}, w) = \eta_{B_G}(\widehat{t}, w) \cdot (\iota \circ a(w), 1),$$

où $\iota: \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$ a été défini en (2.3) et où $a \in Z^1(W_{\mathbb{R}}, \widehat{T})$ est défini par

$$\begin{aligned}a(z) = a(z\tau) \ &= \left(\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{1/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-1/2}, \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{-1/2}\right) \\ &\quad \cdot \{(\widehat{u}, \widehat{u}^{-1}, \widehat{u}^{-1}, \widehat{u}) \mid \widehat{u} \in \mathbb{C}^\times\}.\end{aligned}$$

Alors, le caractère $\chi_{G,H}$ a pour paramètre de Langlands l'homomorphisme

$$\begin{aligned}W_{\mathbb{R}} &\to \widehat{T} \rtimes W_{\mathbb{R}} = {}^L T, \\ w &\mapsto (a(w), w)\end{aligned}$$

i.e.

$$\chi_{G,H}(\gamma) = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 - iy_2}.$$

Par suite, on a

$$\Delta_\infty(\gamma_H, \gamma) = (-1)^{q_G - q_H}\left(-\frac{4y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = (-1)^{q_G - q_H}\Delta_0(\gamma),$$

ce qui correspond bien au choix $\varepsilon_0 = 1$. □

4. Simplifications dans la formule des traces non invariante d'Arthur: résultats généraux

Dans toute cette section, on désigne par G un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{Q}$. On fixe un sous-groupe de Levi minimal M_0 de G sur $\mathbb{Q}$ et un sous-groupe de

Levi minimal $\mathcal{M}_0$ de G sur $\mathbb{R}$ qui est contenu dans M_0. On fixe aussi un sous-groupe compact maximal

$$K_{\max} = \prod_v K_{\max,v} = K_{\max,\mathbb{R}} K_{\max,f}$$

de $G(\mathbb{A})$. On suppose que $K_{\max}$ est admissible relativement à M_0 et que $K_{\max,\mathbb{R}}$ est admissible relativement à $\mathcal{M}_0$. On utilisera librement les notations d'Arthur. En particulier, $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$) est l'ensemble des sous-groupes de Levi de G sur $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}$) contenant M_0 (resp. $\mathcal{M}_0$) et, pour tout $M \in \mathcal{L}$ (ou $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$), $\mathcal{P}(M)$ est l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G qui admettent M comme sous-groupe de Levi. On a $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ et, si $M \in \mathcal{L}$, on a

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M) \stackrel{\text{dfn}}{=\!=} \{L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \mid M \subset L\} \subset \mathcal{L}.$$

La formule des traces non invariante d'Arthur pour G et une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{A}))$ est une identité

$$J_{\text{geom}}(f) \stackrel{\text{dfn}}{=\!=} \sum_{\mathit{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathit{o}}(f) = \sum_{\chi\in\mathcal{X}} J_\chi(f) \stackrel{\text{dfn}}{=\!=} J_{\text{spec}}(f)$$

(cf. [Ar 2] Sect. 1 et 2). Pour une fonction f arbitaire, les deux expressions $J_{\text{geom}}(f)$ et $J_{\text{spec}}(f)$ sont très compliquées. Cependant, comme on va le voir dans cette section, en faisant des hypothèses supplémentaires sur f il est possible de simplifier énormément ces deux expressions. Nous ne considèrerons que des fonctions f de la forme $f_{\mathbb{R}}f'$, où $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$, l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et $K_{\max,\mathbb{R}}$-finies à support compact sur $A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R})$, et où $f' \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$. Les hypothèses supplémentaires sur $f_{\mathbb{R}}$ seront des hypothèses de cuspidalité et celles sur f' seront des hypothèses de régularité.

Arthur a introduit deux notions de cuspidalité (cf. [Ar 8] Sect. 6 et [Ar 1] Sect. 4).

DÉFINITION (4.1) (Arthur). Une fonction $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$ est dite cuspidale si, pour tout $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, M \subsetneq G$, et tout $P \in \mathcal{P}(M)$, on a

$$\operatorname{tr} \pi(f_{\mathbb{R},P}) = 0$$

pour toute représentation irréductible tempérée π de $A_G(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$, avec

$$f_{\mathbb{R},P}(m) \stackrel{\text{dfn}}{=\!=} \delta_{P(\mathbb{R})}(m)^{1/2} \int_{K_{\max,\mathbb{R}}} \int_{N_P(\mathbb{R})} f_{\mathbb{R}}(k^{-1}mnk)\,\mathrm{d}n \quad (\forall m \in M(\mathbb{R})).$$

Une fonction $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$ est dite cuspidale stable si elle est cuspidale et si, de plus,

$$\operatorname{tr} \pi_{\mathbb{R}}(f_{\mathbb{R}}) = 0$$

pour toute représentation irréductible tempérée $\pi_{\mathbb{R}}$ de $A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R})$ qui n'est pas de carré intégrable et

$$\mathrm{tr}\,\pi'_{\mathbb{R}}(f_{\mathbb{R}}) = \mathrm{tr}\,\pi''_{\mathbb{R}}(f_{\mathbb{R}})$$

pour toutes représentations irréductibles de carré intégrable $\pi'_{\mathbb{R}}$ et $\pi''_{\mathbb{R}}$ de $A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R})$ qui sont dans un même paquet de Langlands.

Ces deux notions sont invariantes (par conjugaison). Nous aurons aussi besoin d'une troisième notion de cuspidalité, qui elle est non invariante.

DÉFINITION (4.2). Une fonction $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$ sera dite très cuspidale si elle est $K_{\max,\mathbb{R}}$-invariante par conjugaison et si, pour tout $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ et tout $P \in \mathcal{P}(M)$, on a

$$f_{\mathbb{R},P}(m) = \delta_{P(\mathbb{R})}(m)^{1/2} \int_{N_P(\mathbb{R})} f_{\mathbb{R}}(mn)\, \mathrm{d}n = 0 \quad (\forall m \in M(\mathbb{R})).$$

Une fonction $f_{\mathbb{R}}$ très cuspidale est automatiquement cuspidale mais pas nécessairement cuspidale stable.

Nous utiliserons deux notions de régularité.

DÉFINITION (4.3). Soient $f' \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G(\mathbb{A}_f))$ et $C \in \mathbb{R}_+$. La fonction f' sera dite C-régulière (resp. fortement C-régulière) si, pour tout $M \in \mathcal{L}, M \subsetneq G$, tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout $m \in M(\mathbb{A}_f)$ tels que

$$f'_P(m) \overset{\text{dfn}}{=\!=} \delta_{P(\mathbb{A}_f)}(m)^{1/2} \int_{K_{\max,f}} \int_{N_P(\mathbb{A}_f)} f'(k^{-1}mnk)\, \mathrm{d}n\, \mathrm{d}k \neq 0,$$

il existe au moins une racine α de A_M dans G pour laquelle on a (resp. pour toute racine α de A_M dans G on a)

$$|\alpha(H_{M,f}(m))| > C.$$

Bien sûr, une fonction f' fortement C-régulière est automatiquement C-régulière.

Commençons par étudier le coté géométrique de la formule des traces.

THÉORÈME (4.4). *Soit $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$ une fonction cuspidale stable et très cuspidale. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que du support de $f_{\mathbb{R}}$ et ayant la propriété suivante. Pour toute fonction $f' \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G(\mathbb{A}_f))$ qui est C-régulière, on a*

$$J_{\text{geom}}(f) = T_{\text{e}}(f) \overset{\text{dfn}}{=\!=} \sum_{\gamma \in E} |G_\gamma^0(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{Q})|^{-1} \tau(G_\gamma^0) O_\gamma(f)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

où on a posé

$$f = f_{\mathbb{R}} f'$$

et où E est un système de représentants des classes de conjugaison $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $G(\mathbb{Q})$.

Preuve. Fixons $o \in \mathcal{O}$ et un ensemble fini S de places finies de $\mathbb{Q}$, contenant l'ensemble $S_0 - \{\infty\}$, où S_0 est l'ensemble défini par Arthur, et assez grand pour que

$$f' = f'_S 1_{K^S_{\max, f}}.$$

On a alors

$$J_o(f) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_{\gamma \in (M(\mathbb{Q}) \cap o)_{M,S}} a^M(\{\infty\} \cup S, \gamma) J_M^G(\gamma, f_{\mathbb{R}} f'_S)$$

et, comme $f_{\mathbb{R}}$ est globalement très cuspidale, les formules de scindage et de descente (cf. [Ar 3] Sect. 8, 9) assurent que, quel que soit $M \in \mathcal{L}$, on a

$$J_M^G(\gamma, f_{\mathbb{R}} f'_S) = \left(\lim_{a_{\mathbb{R}} \to 1} J_M^G(a_{\mathbb{R}}\gamma, f_{\mathbb{R}})\right) J_M^M(\gamma, f'_{S,P})$$

pour un certain $P \in \mathcal{P}(M)$, où $a_{\mathbb{R}} \in A_{M,\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$.

Maintenant, $J_M^G(a_{\mathbb{R}}\gamma, f_{\mathbb{R}})$ est une intégrale orbitale pondérée et, donc, s'annule dès que l'orbite de $a_{\mathbb{R}}\gamma$ dans $G(\mathbb{R})$ ne rencontre pas le support de $f_{\mathbb{R}}$. On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$, ne dépendant que du support de $f_{\mathbb{R}}$ et ayant la propriété suivante. Pour tout $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneq G$, et tout $\gamma_{\mathbb{R}} \in M(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{a_{\mathbb{R}} \to 1} J_M^G(a_{\mathbb{R}}\gamma_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}) \neq 0$$

seulement si

$$|\alpha(H_{M,\mathbb{R}}(\gamma_{\mathbb{R}}))| \leqslant C,$$

quel que soit la racine α de A_M dans G.

Vérifions que cette constante C fait marcher le théorème. Supposons donc que f' est C-régulière. Tout d'abord, pour tout $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneq G$, et tout $\gamma \in M(\mathbb{Q}) \cap o$, on a

$$\left(\lim_{a_{\mathbb{R}} \to 1} J_M^G(a_{\mathbb{R}}\gamma, f_{\mathbb{R}})\right) J_M^M(\gamma, f'_{S,P}) = 0.$$

En effet, si

$$J_M^M(\gamma, f'_{S,P}) \neq 0,$$

il existe au moins un $m \in M(\mathbb{A}_f)$ tel que

$$f'_P(m^{-1}\gamma m) \neq 0$$

(on rappelle que $S \supset S_0 - \{\infty\}$ et que $f'^S = 1^S_{K_{\max},f}$) et, donc, il existe au moins une racine α de A_M dans G telle que

$$|\alpha(H_{M,\mathbb{R}}(\gamma))| = |\alpha(H_{M,f}(\gamma))| > C$$

et on a

$$\lim_{a_{\mathbb{R}} \to 1} J^G_M(a_{\mathbb{R}}\gamma, f_{\mathbb{R}}) = 0.$$

Ensuite, on remarque que

$$J^G_G(\gamma_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}) = 0$$

pour tous les $\gamma_{\mathbb{R}} \in G(\mathbb{R})$ qui ne sont pas semi-simples (cf. [Ar 1] Sect. 4 et Théorème 5.1). Enfin, pour $\gamma \in o$ semi-simple, Arthur a montré que

$$a^G(\{\infty\} \cup S, \gamma) = |G^0_\gamma(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{Q})|^{-1}\tau(G^0_\gamma)$$

si γ est $\mathbb{Q}$-elliptique et que $a^G(\{\infty\} \cup S, \gamma) = 0$ sinon (cf. [Ar 4] Théorème 8.2). Il ne reste plus qu'à remarquer que, pour $\gamma \in o$ semi-simple et $a_{\mathbb{R}} \in A_G(\mathbb{R})$, on a

$$J^G_G(a_{\mathbb{R}}\gamma, f_{\mathbb{R}})J^G_G(\gamma, f'_S) = O_{a_{\mathbb{R}}\gamma}(f)$$

(on a

$$O_\gamma(f'_S) = O_\gamma(f')$$

et

$$|D^G(\gamma)|^{1/2}_S = 1$$

vu notre choix de S). □

Remarque (4.5). Diverses variantes de ce théorème figurent déjà dans la littérature (cf. [Fl-Ka1], [Fl-Ka 2] et [Lau]). □

Etudions maintenant le côté spectral.

Soit $M \in \mathcal{L}$. Pour tout nombre premier q, rappelons qu'Arthur a introduit le sous-groupe

$$\mathfrak{a}_{M,q} \overset{\text{dfn}}{=\!=} H_{M,q}(M(\mathbb{Q}_q))$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

de $\mathfrak{a}_M$ et son 'dual'

$$i\mathfrak{a}_{M,q}^* \overset{\text{dfn}}{=\!=} i\mathfrak{a}_M^*/\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}_{M,q}, 2\pi i\mathbb{Z})$$

Pour tout ensemble S de places finies de $\mathbb{Q}$, on posera

$$\mathfrak{a}_{M,S} = \bigoplus_{q\in S} \mathfrak{a}_{M,q}$$

et

$$i\mathfrak{a}_{M,S}^* = \prod_{q\in S} i\mathfrak{a}_{M,q}^*$$

(si S est l'ensemble de toutes les places finies de $\mathbb{Q}$, on utilisera les notations $\mathfrak{a}_{M,f}$ et $i\mathfrak{a}_{M,f}^*$ pour ces deux groupes). Si π_S est une représentation irréductible admissible de $M(\mathbb{A}_f \cap \mathbb{Q}_S)$, on notera $\pi_{S,\lambda}$ ou encore $\pi_S(\lambda)$ la tordue de π_S par $\lambda \in i\mathfrak{a}_{M,S}^*$, de sorte que

$$\pi_{S,\lambda}(m) = \mathrm{e}^{\lambda(H_{M,S}(m))}\pi_S(m), \quad \forall m \in M(\mathbb{A}_f \cap \mathbb{Q}_S),$$

et on notera $\mathcal{I}_P(\pi_S)$ l'induite unitaire de π_S le long d'un parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$. Pour $f_S \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f \cap \mathbb{Q}_S))$, on posera

$$f_{S,M}(\pi_S, X) = \int_{i\mathfrak{a}_{M,S}^*} \mathrm{tr}\, \mathcal{I}_P(\pi_{S,\lambda}, f_S)\, \mathrm{e}^{\lambda(X)}\, \mathrm{d}\lambda \quad (\forall X \in \mathfrak{a}_{M,S}),$$

où la mesure de Haar $\mathrm{d}\lambda = \prod_{q\in S} \mathrm{d}\lambda_q$ est normalisée par

$$\mathrm{vol}(i\mathfrak{a}_{M,q}^*,\ \mathrm{d}\lambda_q) = 1 \quad (\forall q \in S)$$

(même pour S infini, l'intégrale ci-dessus a un sens car, pour presque tout $q \in S$, $f_S = f_S^q 1_{K_q}$ et π_q est non ramifiée, de sorte que

$$\mathrm{tr}\, \mathcal{I}_P(\pi_{q,\lambda_q}, 1_{K_q}) = 1, \ \ \forall \lambda_q \in i\mathfrak{a}_{M,q}^*).$$

Comme la notation l'indique, $f_{S,M}(\pi_S, X)$ ne dépend pas du choix de $P \in \mathcal{P}(M)$ que l'on a fait pour le définir. On a le développement en série de Fourier (finie)

$$\mathrm{tr}\, \mathcal{I}_P(\pi_{S,\lambda}, f_S) = \sum_{X\in\mathfrak{a}_{M,S}} f_{S,M}(\pi_S, X)\, \mathrm{e}^{-\lambda(X)}.$$

Soit toujours $M \in \mathcal{L}$. Pour toute représentation irréductible unitaire $\pi_\mathbb{R}$ du groupe de Lie $A_G(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathfrak{a}_M^G$, Arthur a introduit la distribution

$$J_M^G(\pi_\mathbb{R}, f_\mathbb{R}, X) \overset{\text{dfn}}{=\!=} \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} J_M^G(\pi_{\mathbb{R},\lambda}, f_\mathbb{R})\, \mathrm{e}^{-\lambda(X)}\, \mathrm{d}\lambda$$

en $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0 \backslash G(\mathbb{R}))$ (cf. [Ar 5] Sect. 7).

THÉORÈME (4.6). *Soient* $f_{\mathbb{R}}$ *une fonction très cuspidale dans* $\mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0 \backslash G(\mathbb{R}))$ *et* f' *une fonction arbitraire dans* $\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$. *Alors, on a*

$$J_{\text{spec}}(f_{\mathbb{R}} f') = \sum_{t \geqslant 0} \sum_{M \in \mathcal{L}} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_{\pi \in \Pi_{\text{disc}}(M,t)} a_{\text{disc}}^M(\pi) J_{M,\pi}^G(f_{\mathbb{R}} f')$$

où $\Pi_{\text{disc}}(M,t) \subset \Pi_{\text{unit}}(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{A}), t)$ *et*

$$a_{\text{disc}}^M \colon \Pi_{\text{disc}}(M,t) \to \mathbb{C}$$

sont définis par Arthur dans [Ar 6] Section 4 *et où*

$$J_{M,\pi}^G(f_{\mathbb{R}} f') = \sum_{X \in \mathfrak{a}_{M,f}} J_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, s(X)) f'_M(\pi_f, X)$$

pour tout $M \in \mathcal{L}$ *et tout* $\pi = \pi_{\mathbb{R}} \otimes \pi_f \in \Pi_{\text{disc}}(M,t)$, *avec*

$$s(X) = \left(\sum_q X_q \right)^G \in \mathfrak{a}_M^G$$

pour tout $X \in \mathfrak{a}_{M,f}$.

Preuve. D'après [Ar 6] Section 4, $J_{\text{spec}}(f_{\mathbb{R}} f')$ est la somme sur les $t \geqslant 0$, les $M_1 \subset M$ dans $\mathcal{L}$ et les $\pi_1 \in \Pi_{\text{disc}}(M_1, t)$ de

$$\frac{|W_0^{M_1}|}{|W_0^G|} a_{\text{disc}}^{M_1}(\pi_1) \int_{i\mathfrak{a}_{M_1}^*/i\mathfrak{a}_M^*} r_{M_1}^M(\pi_{1,\lambda_1}) J_M^G(\pi_{1,\lambda_1}^M, f_{\mathbb{R}} f') \, \mathrm{d}\lambda_1$$

avec

$$J_M^G(\pi_{1,\lambda_1}^M, f_{\mathbb{R}} f') = \int_{i(\mathfrak{a}_M^G)^*} J_M^G(\pi_{1,\Lambda_1+\lambda}^M, f_{\mathbb{R}} f') \, \mathrm{d}\lambda$$

pour tout représentant Λ_1 dans $i\mathfrak{a}_{M_1}^*$ de la classe λ_1. Or, comme $f_{\mathbb{R}}$ est très cuspidale sur $\mathbb{Q}$, les formules de scindage et de descente (cf. [Ar 3] Sect. 8, 9) assurent que

$$J_M^G(\pi_{1,\Lambda_1}^M, f_{\mathbb{R}} f') = 0 \quad (\forall \Lambda_1 \in i\mathfrak{a}_{M_1}^*),$$

si $M_1 \subsetneqq M$ et que

$$J_M^G(\pi_\lambda, f_{\mathbb{R}} f') = J_M^G(\pi_{\mathbb{R},\lambda}, f_{\mathbb{R}}) \operatorname{tr} \mathcal{I}_P(\pi_{f,\delta(\lambda)}, f')$$

quels que soient $\pi \in \Pi_{\text{disc}}(M, t)$ et $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$, où $\delta: i\mathfrak{a}_M^* \to i\mathfrak{a}_{M,f}^*$ est le morphisme diagonal, d'où le théorème. □

Dans [Ar 7] Section 7, Arthur a introduit les distributions

$$^{c}D_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}})$$

$(M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_{\text{temp}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ et $X \in \mathfrak{a}_M^G)$ en $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. Elles sont définies par un schéma de résidus pour l'intégrale

$$\int_{\varepsilon + i(\mathfrak{a}_M^G)^*} J_M^G(\pi_{\mathbb{R},\lambda}, f_{\mathbb{R}})\ \mathrm{e}^{-\lambda(X)}\ \mathrm{d}\lambda$$

où ε est un petit point de $(\mathfrak{a}_M^G)^*$ en position générale. Leur intérêt pour nous vient des deux résultats d'Arthur suivants.

PROPOSITION (4.7) (Arthur). *Soit $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ et soit $f_{\mathbb{R}}$ une fonction cuspidale dans $\mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. Alors, il existe une famille de constantes $C_L \in \mathbb{R}_+$ $(L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M), L \subsetneq G)$ ne dépendant que du support de $f_{\mathbb{R}}$ et ayant la propriété suivante. Pour tout $\pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_{\text{temp}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ et tout $X \in \mathfrak{a}_M^G$ tels que*

$$\|X_L\| > C_L, \quad \forall L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M), \quad L \subsetneq G,$$

on a

$$J_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, X) = {}^{c}D_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}).$$

Preuve. D'après [Ar 7] (7.7), on a

$$J_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, X) = \sum_{L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M)} ({}^{c}\theta_M^L)^{\wedge}({}^{c}\phi_L^G(f_{\mathbb{R}}))(\pi_{\mathbb{R}}, X)$$

pour certaines familles d'applications

$${}^{c}\phi_L^G: \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{ac}}(G(\mathbb{R})) \to \widetilde{\mathcal{I}}_{\text{ac}}(L(\mathbb{R}))$$

$(L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ et

$${}^{c}\theta_M^L: \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{ac}}(L(\mathbb{R})) \to \widetilde{\mathcal{I}}_{\text{ac}}(M(\mathbb{R}))$$

$(M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M))$ définies dans *loc. cit*.

Pour $L = G$,

$$({}^{c}\theta_M^G)^{\wedge}({}^{c}\phi_G^G(f_{\mathbb{R}}))(\pi_{\mathbb{R}}, X) \overset{\text{dfn}}{=\!=} {}^{c}\theta_M^G(f_{\mathbb{R}})(\pi_{\mathbb{R}}, X)$$

est égal à ${}^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}})$ d'après le Lemme 7.1 de [Ar 7].

Pour $L \subsetneq G$, il existe une constante $C_L \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que du support de $f_{\mathbb{R}}$ et ayant la propriété suivante: pour tout $\tau_{\mathbb{R}} \in \Pi_{\text{temp}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$ et tout $Y \in \mathfrak{a}_L^G$, on a

$${}^c\phi_L^G(f_{\mathbb{R}})(\tau_{\mathbb{R}}, Y) \neq 0$$

seulement si $\|Y\| \leqslant C_L$ (cf. [Ar 3] Lemme 4.2). De plus, comme

$${}^c\theta_M^L(g_{\mathbb{R}})(\pi_{\mathbb{R}}, X) = {}^cD_M^L(\pi_{\mathbb{R}}, X, g_{\mathbb{R}})$$

ne dépend que de la restriction de la fonction $g_{\mathbb{R}} \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{ac}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$ à

$$\{x \in L(\mathbb{R}) \mid H_L^G(x) = X_L\}$$

(cf. [Ar 7] Sect. 7),

$$({}^c\theta_M^L)^\wedge(\phi_{\mathbb{R}})(\pi_{\mathbb{R}}, X)$$

ne dépend que de la restriction de la fonction $\phi_{\mathbb{R}} \in \widetilde{\mathcal{I}}_{\text{ac}}(L(\mathbb{R}))$ à

$$\Pi_{\text{temp}}(L(\mathbb{R})) \times \{X_L\}.$$

Par suite, on a

$$({}^c\theta_M^L)^\wedge({}^c\phi_L^G(f_{\mathbb{R}}))(\pi_{\mathbb{R}}, X) = 0$$

dès que $\|X_L\| > C_L$, ce qui achève la preuve de la proposition. □

Pour tout $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, soit

$$\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R})) \subset \Pi_{\text{temp}}(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$$

l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de carré intégrable de $A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R})$. Pour tout $M \subset L$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, tout $\rho_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$ et tout $\gamma \in M(\mathbb{R}) \cap G_{\text{reg}}(\mathbb{R})$, on pose

$$\Phi_M^L(\rho_{\mathbb{R}}, \gamma) = \begin{cases} |D^L(\gamma)|^{1/2}\Theta_{\rho_{\mathbb{R}}}(\gamma) & \text{si } \gamma \in M(\mathbb{R})_{\text{ell}} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

où $M(\mathbb{R})_{\text{ell}}$ est l'ensemble des éléments elliptiques de $M(\mathbb{R})$, i.e. des $\gamma \in M(\mathbb{R})$ tels que $A_M(\mathbb{R})\backslash M_\gamma(\mathbb{R})$ soit compact.

PROPOSITION (4.8) (Arthur). *Soit $f_{\mathbb{R}} \in \mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. On suppose que $f_{\mathbb{R}}$ est cuspidale et que*

$$f_{\mathbb{R},G}\colon \Pi_{\text{temp}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R})) \to \mathbb{C}, \quad \sigma_{\mathbb{R}} \mapsto \operatorname{tr}\sigma_{\mathbb{R}}(f_{\mathbb{R}}),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

a son support contenu dans $\Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. *Alors, pour tout* $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, *tout* $X \in \mathfrak{a}_M^G$ *et tout* $\pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_{\text{temp}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$, *on a*

$$^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}) \neq 0$$

seulement si $\pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ *et, dans ce cas, on a*

$$^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}) = \sum_{\sigma_{\mathbb{R}}} {}^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}}) \operatorname{tr} \sigma_{\mathbb{R}}(f_{\mathbb{R}})$$

où $\sigma_{\mathbb{R}}$ *parcourt* $\Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$ *et où les expressions*

$$^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}}),$$

pour $\sigma_{\mathbb{R}}$ *fixé dans* $\Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$ *et pour* $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ *et* $X \in \mathfrak{a}_M^G$ *variables, satisfont les propriétés suivantes.*

(i) *On a*

$$^cD_G^G(\pi_{\mathbb{R}}, 0, \sigma_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \pi_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

(ii) *Si* $M \subsetneq G$, *pour tout* $\gamma \in M(\mathbb{R})^1 \cap G_{\text{reg}}(\mathbb{R})$ *et tout* $X \in \mathfrak{a}_M^G$, *on a*

$$\sum_L \sum_{\rho_{\mathbb{R}}} (-1)^{\dim(A_L/A_G)} \Phi_M^L(\rho_{\mathbb{R}}^\vee, \gamma\, \mathrm{e}^{X^L}) {}^cD_L^G(\rho_{\mathbb{R}}, X_L, \sigma_{\mathbb{R}}) = 0$$

où L *parcourt* $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M), \rho_{\mathbb{R}}$ *parcourt* $\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R})), \rho_{\mathbb{R}}^\vee$ *est la représentation contragrédiente de* $\rho_{\mathbb{R}}$ *et* $X = X^L + X_L$ *avec* $X^L \in \mathfrak{a}_M^L$ *et* $X_L \in \mathfrak{a}_L^G$.

Remarquons que les propriétés (i) et (ii) ci-dessus déterminent uniquement les expressions ${}^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}})$ par récurrence sur le rang de A_M (indépendance linéaire des caractères $\Phi_M^M(\pi_{\mathbb{R}}^\vee, \gamma)$ pour $\pi_{\mathbb{R}}$ parcourant $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$).

Preuve. D'après [Ar 7] (9.2) et compte-tenu des hypothèses faites sur f, on a

$$^cD_M^G(\tau_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}) = \sum_{\pi} {}^cD_M^G(\tau_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}}) \operatorname{tr} \sigma_{\mathbb{R}}(f_{\mathbb{R}}),$$

où $\sigma_{\mathbb{R}}$ parcourt $\Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$, pour tout $\tau_{\mathbb{R}} \in T_{\text{ell}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$, et, d'après le Théorème 9.1 de *loc. cit.*, les ${}^cD_M^G(\tau_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}})$ vérifient les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé dans lesquelles on a remplacé $\pi_{\mathbb{R}}$ et $\rho_{\mathbb{R}}$ parcourant $\Pi_2(-)$ par $\tau_{\mathbb{R}}$ et $\tau_{\mathbb{R},L}$ respectivement parcourant $T_{\text{ell}}(-)$ et le signe par la constante $d_L(\tau_{\mathbb{R},L}, \sigma_{\mathbb{R}})$. Par suite, pour achever la preuve de la proposition, il suffit de montrer que, pour tout $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, tout $\tau_{\mathbb{R}} \in T_{\text{ell}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ qui n'est pas de la forme $(M, \pi_{\mathbb{R}}, 1)$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

avec $\pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$, tout $X \in \mathfrak{a}_M^G$ et tout $\sigma_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$, on a

$$^cD_M^G(\tau_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}}) = 0.$$

Or, avec les notations de *loc. cit.*, pour tout $\tau'_{\mathbb{R}} \in T_{\text{ell}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$, tout X régulier dans $\mathfrak{a}_M^G$ et tout $\sigma_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$, on a

$$\sum_L \sum_{\tau_{\mathbb{R},L}} D_M^L(\tau'_{\mathbb{R}}, X^L, \tau_{\mathbb{R},L})^c D_L^G(\tau_{\mathbb{R},L}, X_L, \sigma_{\mathbb{R}})$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{si } M = G \text{ et } \tau'_{\mathbb{R}} = (G, \sigma_{\mathbb{R}}, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où L parcourt $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M)$ et $\tau_{\mathbb{R},L}$ parcourt $T_{\text{ell}}(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$ (remplacer, dans la formule (9.5) de [Ar 7], $\Phi_M^L(\tau_{\mathbb{R},L}^\vee, \gamma)$ par son expression donnée en (9.4) de *loc. cit.* et utiliser l'indépendance linéaire des caractères $\Phi_M^M({\tau'}_{\mathbb{R}}^\vee, \gamma)$ pour $\tau'_{\mathbb{R}} \in T_{\text{ell}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})))$. De plus, d'après le Lemme 6.6 de [Ar 8] ou plus exactement sa preuve, on a

$$D_M^L(\tau'_{\mathbb{R}}, Y, \rho_{\mathbb{R}}) = 0$$

pour tout $\rho_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$, tout $Y \in \mathfrak{a}_M^L$ et tout $\tau'_{\mathbb{R}} \in T_{\text{ell}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ qui n'est pas de la forme $(M, \pi'_{\mathbb{R}}, 1)$ avec $\pi'_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ et on a

$$D_M^M(\pi'_{\mathbb{R}}, 0, \pi_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi'_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{R}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tous $\pi'_{\mathbb{R}}, \pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$. On conclut alors par récurrence sur le rang de A_M. □

La Propositions (4.7) ne concerne a priori que les expressions $J_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, X)$ pour lesquelles la représentation $\pi_{\mathbb{R}}$ est tempérée. Mais, d'après Vogan (cf. [Vo 1] Proposition 6.6.7), le caractère $\Theta_{\pi_{\mathbb{R}}}$ de toute représentation irréductible admissible $\pi_{\mathbb{R}}$ de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique

$$\Theta_{\pi_{\mathbb{R}}} = \sum_{\pi'_{\mathbb{R}}} \Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}})\Theta_{\pi'_{\mathbb{R}}}, \tag{4.9}$$

où $\pi'_{\mathbb{R}}$ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations standard de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ ayant même caractère infinitésimal que $\pi_{\mathbb{R}}$ et où les coefficients $\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}})$ sont entiers, et, grâce à ce résultat, cette proposition s'étend aux expressions $J_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, X)$ pour lesquelles la représentation $\pi_{\mathbb{R}}$ n'est

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

plus nécessairement tempérée.

PROPOSITION (4.10). *Soit* $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ *et soit* $f_{\mathbb{R}}$ *une fonction dans* $\mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. *On suppose que* $f_{\mathbb{R}}$ *est très cuspidale et que le support de* $f_{\mathbb{R},G}$ *est contenu dans* $\Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. *On choisit une famille de constantes* $C_L \in \mathbb{R}_+$ $(L \in \mathcal{L}_R(M), L \subsetneqq G)$ *comme dans la Proposition* (4.7). *Alors, pour tout* $\pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_{\mathrm{unit}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ *et tout* $X \in \mathfrak{a}_M^G$ *tel que*

$$\|X_L\| > C_L, \quad \forall L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M), \quad L \subsetneqq G,$$

on a

$$J_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}, X) = {}^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}),$$

où

$${}^cD_M^G(\pi_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}) \stackrel{\mathrm{dfn}}{=\!=} \sum_{\pi'_{\mathbb{R}}} \Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}})\,{}^cD_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}),$$

$\pi'_{\mathbb{R}}$ *parcourant* $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$.

Preuve. D'après la Proposition 6.1 de [Ar 5], on a

$$J_M^G(\pi_{\mathbb{R},\lambda}, f_{\mathbb{R}}) = \sum_L \sum_{\pi'_{\mathbb{R}}} r_M^L(\pi_{\mathbb{R},\lambda}, (\pi'_{\mathbb{R}})_\lambda) J_L^G((\pi'_{\mathbb{R}})_\lambda^L, f_{\mathbb{R}})$$

avec les notations de *loc. cit*. Mais, comme $f_{\mathbb{R}}$ est très cuspidale, on a, par descente (cf. [Ar 3] Preuve du Théorème 8.4),

$$J_L^G((\pi'_{\mathbb{R}})_\lambda^L, f_{\mathbb{R}}) = 0$$

si $M \subsetneqq L$ ou si $M = L$ et $\pi'_{\mathbb{R}} \notin \Pi_{\mathrm{temp}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ (de sorte que $\pi'_{\mathbb{R}} = (\pi_{\mathbb{R},1})_\Lambda^M$ pour un $M_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $M_1 \subsetneqq M$, une représentation $\pi_{\mathbb{R},1} \in \Pi_{\mathrm{temp}}(A_{M_1}(\mathbb{R})^0\backslash M_1(\mathbb{R}))$ et un $\Lambda \in (\mathfrak{a}_{M_1}^M)^*$ qui est régulier). Comme

$$r_M^M(\pi_{\mathbb{R},\lambda}, (\pi'_{\mathbb{R}})_\lambda) = \Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}})$$

la proposition résulte maintenant directement des Propositions (4.7) et (4.8). □

Pour pouvoir utiliser cette proposition pour calculer explicitement les expressions $J_{M,\pi}^G(f_{\mathbb{R}}f')$ du Théorème (4.6), il nous faut aussi un critère qui assure que

$$f'_M(\pi_f, X) = 0$$

pour tout $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneqq G$, tout $\pi_f \in \Pi(M(\mathbb{A}_f))$ et tout $X \in \mathfrak{a}_{M,f}$ tel que

$$\|s(X)_L\| \leqslant C_L$$

pour au moins un $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M), L \subsetneqq G$. Voici un tel critère.

LEMME (4.11). *Etant donnée une famille de constantes $C_L \in \mathbb{R}_+$ $(L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, L \subsetneqq G)$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ ayant la propriété suivante. Pour tout $f' \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G(\mathbb{A}_f))$ qui est C-régulière* (cf. (4.2)), *tout $M \in \mathcal{L}, M \subsetneqq G$, tout $\pi_f \in \Pi\,(M(\mathbb{A}_f))$ et tout $X \in \mathfrak{a}_{M,f}$ tel que*

$$\|s(X)_L\| \leqslant C_L$$

pour au moins un $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M), L \subsetneqq G$, on a

$$f'_M(\pi_f, X) = 0.$$

Preuve. Fixons $M \in \mathcal{L}$ et $P \in \mathcal{P}(M)$. On vérifie que

$$f'_M(\pi_f, X) = \mathrm{tr}\,\pi_f(f'_P \chi_{M,X})$$

où $\chi_{M,X}$ est la fonction caractéristique du sous-ensemble

$$\{m \in M(\mathbb{A}_f) \mid H_{M,v}(m) = -X_v,\ \forall v \neq \infty\}$$

de $M(\mathbb{A}_f)$. Par suite, on a

$$f'_M(\pi_f, X) \neq 0$$

seulement si il existe $m \in M(\mathbb{A}_f)$ avec

$$\begin{cases} f'_P(m) \neq 0 \\ H^G_{M,f}(m) = -s(X) \end{cases}.$$

Mais alors, quel que soit $L \in \mathcal{L}(M)$, $L \subsetneqq G$, il existe $\ell \in L$ avec

$$\begin{cases} f'_Q(\ell) \neq 0 \\ H^G_{L,f}(\ell) = -s(X)_L \end{cases}$$

où $Q = LN_P$ (on a $f'_P(m) = (f'_Q)_{P \cap L}(m)$ et on peut prendre ℓ de la forme mn^L avec $n^L \in N_{P\cap L}(\mathbb{A}_f)$).

Par conséquent, si on suppose que f' est C-régulière pour une constante $C \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f'_M(\pi_f, X) \neq 0$$

seulement si, pour tout $L \in \mathcal{L}(M)$, $L \subsetneqq G$, il existe au moins une racine α de A_L dans G telle que

$$|\alpha(s(X)_L)| > C.$$

Maintenant, si on pose

$$C = \sup_{L,\alpha,Y} \{|\alpha(Y)|;\ \|Y\| \leqslant C_L\}$$

où L parcourt $\mathcal{L}$, α parcourt les racines de A_L dans G et Y parcourt $\mathfrak{a}_L^G$, il est clair que C a la propriété voulue (on rappelle que $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(M) = \mathcal{L}(M)$ si $M \in \mathcal{L}$). □

Rassemblons tous les résultats obtenus jusqu'ici dans cette section:

THÉORÈME (4.12). *Soit $f_{\mathbb{R}}$ une fonction très cuspidale et cuspidale stable dans $\mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que du support de $f_{\mathbb{R}}$ et ayant la propriété suivante. Pour toute fonction $f' \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ qui est C-régulière, on a, avec les notations de* (4.4) *et* (4.6),

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in E} |G_\gamma^0(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{Q})|^{-1}\tau(G_\gamma^0) O_\gamma(f_{\mathbb{R}} f') \\
&\quad = \sum_{t\geqslant 0}\sum_{M\in\mathcal{L}} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|} \sum_{\pi} a_{\mathrm{disc}}^M(\pi) \sum_{\pi'_{\mathbb{R}}} \Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}}) \\
&\qquad \times \sum_{X\in\mathfrak{a}_{M,f}} {}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, s(X), f_{\mathbb{R}}) f'_M(\pi_f, X),
\end{aligned}$$

où π parcourt $\Pi_{\mathrm{disc}}(M,t)$ et $\pi'_{\mathbb{R}}$ parcourt $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ et où les expressions ${}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, s(X), f_{\mathbb{R}})$ se calculent par récurrence sur le rang de A_M grâce aux propriétés (i) *et* (ii) *de la Proposition* (4.8). □

Sous l'hypothèse de régularité forte introduite en (4.3), on peut expliciter un peu plus le second membre de la formule des traces du Théorème (4.12).

Tout d'abord, les même arguments que ceux de la preuve du Lemme (4.11) montrent que, si f' est fortement C-régulière et si $f'_M(\pi_f, X) \neq 0$ pour un $X \in \mathfrak{a}_{M,f}$, on a

$$|\alpha(s(X))| > C$$

quel que soit la racine α de A_M dans G. En particulier, il existe un unique $P \in \mathcal{P}(M)$ tel que $s(X)$ appartienne à la chambre de Weyl ouverte

$$\mathfrak{a}_P^{G+} \subset \mathfrak{a}_M^G$$

formée des $X \in \mathfrak{a}_M^G$ tels que $\alpha(X) > 0$ pour toute racine α de A_M dans P. Pour f' fortement C-régulière, on a donc

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$\sum_X {}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, s(X), f_{\mathbb{R}}) f'_M(\pi_f, X)$$
$$= \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \sum_{\substack{X \in \mathfrak{a}_{M,f} \\ s(X) \in \mathfrak{a}_P^{G+}}} {}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, s(X), f_{\mathbb{R}}) f'_M(\pi_f, X).$$

Ensuite, il résulte des propriétés (i) et (ii) de la Proposition (4.8) et des formules générales d'Harish–Chandra pour les caractères des représentations de la série discrète que, pour toute représentation $\pi'_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R}))$ et toute représentation $\sigma_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0 \backslash G(\mathbb{R}))$, la fonction ${}^c D_M(\pi_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}})$ de X est une combinaison linéaire de fonctions exponentielles sur chaque chambre de Weyl ouverte $\mathfrak{a}_P^{G+} \subset \mathfrak{a}_M^G$.

Pour formuler plus précisément ce résultat, nous aurons besoin de quelques notations et quelques définitions supplémentaires. Pour chaque $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, choisissons un tore maximal T_M de M sur $\mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$-anisotrope modulo A_M, de telle sorte que $T_M(\mathbb{R}) = A_M(\mathbb{R})^0 T_M^{\text{anis}}(\mathbb{R})$ avec $T_M^{\text{anis}}(\mathbb{R}) \subset K_{\max,\mathbb{R}}^M$, où $K_{\max,\mathbb{R}}^M = K_{\max,\mathbb{R}} \cap M(\mathbb{R})$, et que, pour tous $M \subset L$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, on ait $T_M = A_M(T_M \cap T_L)$. Notons $\mathfrak{t}_M = \mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{t}_M^{\text{anis}}$ l'algèbre de Lie de T_M. Pour chaque $M \subset L$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, choisissons $y \in L(\mathbb{C})$, commutant à $\mathfrak{t}_M(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{t}_L(\mathbb{C})$ et tel que $\mathrm{Ad}(y)(\mathfrak{t}_L(\mathbb{C})) = \mathfrak{t}_M(\mathbb{C})$. Il sera commode de noter simplement $\lambda \mapsto y\lambda$ l'isomorphisme de $\mathfrak{t}_L(\mathbb{C})^*$ sur $\mathfrak{t}_M(\mathbb{C})^*$ induit par $\mathrm{Ad}(y)$.

Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, à chaque représentation irréductible admissible $\rho_{\mathbb{R}}$ de $A_L(\mathbb{R})^0 \backslash L(\mathbb{R})$ est attaché un caractère infinitésimal $\chi_{\rho_{\mathbb{R}}}$ que l'on verra comme une orbite dans $\mathfrak{t}_L^{\text{anis}}(\mathbb{C})^* \subset \mathfrak{t}_L(\mathbb{C})^*$ sous le groupe de Weyl $W(L(\mathbb{C}), T_L(\mathbb{C}))$. Si $M \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, $M \subset L$, on peut transporter cette orbite par y dans

$$(\mathfrak{a}_M^L)^*_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_M^{\text{anis}}(\mathbb{C})^* \subset (\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_M^{\text{anis}}(\mathbb{C})^* = \mathfrak{t}_M(\mathbb{C})^*.$$

On notera $(\chi_{\rho_{\mathbb{R}}})_M$ l'orbite sous le groupe de Weyl $W(L(\mathbb{C}), T_M(\mathbb{C}))$ ainsi obtenue.

Alors, on a:

LEMME (4.13). *Pour tout $P \in \mathcal{P}(M)$, il existe des constantes ${}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, \sigma_{\mathbb{R}})$ $(\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}})$ ayant les propriétés suivantes:*

(i) ${}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, \sigma_{\mathbb{R}}) = 0$ *pour tout* Λ *tel que* $(\Lambda + \chi_{\pi'^{\vee}_{\mathbb{R}}}) \cap (\chi_{\sigma_{\mathbb{R}}})_M = \emptyset$ *dans* $(\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{t}_M^{\text{anis}}(\mathbb{C})^*$;

(ii) *pour tout $X \in \mathfrak{a}_P^{G+}$, on a*

$${}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, \sigma_{\mathbb{R}}) = \sum_{\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}}} {}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, \sigma_{\mathbb{R}})\, \mathrm{e}^{-\Lambda(X)}.$$

Remarque (4.14). Bien entendu, on a aussi

$${}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}) = \sum_{\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}}} {}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}})\, \mathrm{e}^{-\Lambda(X)}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

où on a posé

$$^{c}d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}},\Lambda,f_{\mathbb{R}})=\sum_{\sigma_{\mathbb{R}}}{}^{c}d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}},\Lambda,\sigma_{\mathbb{R}})\ \mathrm{tr}\ \sigma_{\mathbb{R}}(f_{\mathbb{R}}).\qquad\square$$

Avant de prouver ce lemme, rappelons les formules d'Harish–Chandra (cf. [Kn] Ch. XIII, Sect. 4, et aussi [Ar 1] Sect. 4).

Pour tout $M\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, on a nécessairement

$$T_M(\mathbb{R})=Z(T_M)T_M(\mathbb{R})^0,$$

où $Z(T_M)$ est l'intersection de $K_{\max,\mathbb{R}}^M$ avec le centre de M. Fixons $L\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ et $\rho_{\mathbb{R}}\in\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$. Alors, il existe un couple $(\zeta,\lambda)\in Z(T_L)^*\times\mathfrak{t}_L(\mathbb{C})^*$ ayant les propriétés suivantes:

(i) λ ne prend que des valeurs réelles non nulles sur les co-racines de $T_L(\mathbb{C})$ dans $L(\mathbb{C})$; on munit alors l'ensemble $R(L,T_L)$ des racines de $T_L(\mathbb{C})$ dans $L(\mathbb{C})$ de l'ordre pour lequel une racine α est positive si et seulement si $\lambda(\alpha^\vee)>0$ où $\alpha^\vee$ est la co-racine correspondante et on note δ_L la demi-somme des racines positives;

(ii) l'application

$$T_M(\mathbb{R})=Z(T_M)\ \exp\ \mathfrak{t}_M(\mathbb{R})\to\mathbb{C}^\times,\quad z\ \exp H\mapsto\zeta(z)\ \mathrm{e}^{(\lambda-\delta_L)(H)}$$

est un quasi-caractère bien défini de $T_M(\mathbb{R})$, trivial sur $A_G(\mathbb{R})^0$;

(iii) pour tout $\gamma=z\ \exp H\in T_L(\mathbb{R})\cap G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$, on a

$$\Theta_{\rho_{\mathbb{R}}}(\gamma)=(-1)^{q(L)}\Delta_{T_L}^L(H)^{-1}\zeta(z)\sum_{s\in W(L(\mathbb{R}),T_L(\mathbb{R}))}\varepsilon(s)\ \mathrm{e}^{(s\lambda)(H)}$$

où $q(L)=\frac{1}{2}\dim(L(\mathbb{R})/A_L(\mathbb{R})^0K_{\max,\mathbb{R}}^L)$ et où

$$\Delta_{T_L}^L(H)=\prod_{\alpha>0}(\mathrm{e}^{\alpha(H)/2}-\mathrm{e}^{-\alpha(H)/2}).$$

En outre, l'orbite de (ζ,λ) sous $W(L(\mathbb{R}),T_L(\mathbb{R}))$ est uniquement déterminée par $\rho_{\mathbb{R}}$.

Fixons de plus $M\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ avec $M\subset L$. On munit l'ensemble $R(L,T_M)$ des racines de $T_M(\mathbb{C})$ dans $L(\mathbb{C})$ de l'ordre $R^+(L,T_M)$, image par y de l'ordre $R^+(L,T_L)$ fixé ci-dessus. On notera R l'ensemble des racines de $T_M(\mathbb{C})$ dans $L(\mathbb{C})$ qui prennent des valeurs réelles sur $T_M(\mathbb{R})$ et Q le système des co-racines correspondantes. On pose $R^+=R\cap R^+(L,T_M)$.

Alors, pour chaque système de co-racines positives Q_1^+ dans Q et pour chaque système de racines positives R_2^+ dans R, Harish–Chandra a défini un entier

$c(Q_1^+, R_2^+)$ de telle sorte que, pour tout $\gamma = z \exp H \in T_M(\mathbb{R}) \cap G_{\text{reg}}(\mathbb{R})$, on ait

$$\begin{aligned}|D_M^L(\gamma)|^{1/2}\Theta_{\rho_{\mathbb{R}}}(\gamma) &= (-1)^{q(L)}\Delta_{T_M}^M(H)^{-1}(-1)^{|R_H^+\cap(-R^+)|}\zeta'(z)\\ &\quad\times \sum_{s\in W(L(\mathbb{R}),T_L(\mathbb{R}))} \varepsilon(s)c(Q_{ys\lambda}^+, R_H^+)\ \mathrm{e}^{(ys\lambda)(H)}\end{aligned}$$

où $\zeta'(z) = \zeta(z)$ si $z \in Z(T_L) \subset Z(T_M)$ et $\zeta'(z) = 0$ sinon, où, pour tout $\Lambda \in \mathfrak{t}_M(\mathbb{C})^*$ ne prenant que des valeurs réelles non nulles sur Q, Q_Λ^+ est l'ensemble des co-racines $\alpha^\vee$ telles que $\Lambda(\alpha^\vee) > 0$ et où R_H^+ est l'ensemble des racines dans R qui sont positives sur H (remarquons que

$$\Delta_{T_M}^M(H) = (-1)^{|(-R_H^+)\cap R^+|}|D^M(\exp H)|^{1/2}$$

et que

$$D^L(z \exp H) = D^L(\exp H) = D_M^L(\exp H)D^M(\exp H)$$

pour $z \in Z(T_L)$).

En particulier, pour tous sous-groupes de Levi $M \subset L$ dans $\mathcal{L}$, tout $\rho_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$, tout $\gamma \in M(\mathbb{R})^1 \cap G_{\text{reg}}$ et tout $P^L \in \mathcal{P}^L(M)$, il existe des constantes $\phi_{PL}^L(\rho_{\mathbb{R}}, \gamma, \Lambda^L)$ ($\Lambda^L \in (\mathfrak{a}_M^L)_{\mathbb{C}}^*$) ayant les propriétés suivantes:

(i) $\phi_{PL}^L(\rho_{\mathbb{R}}, \gamma, \Lambda^L) = 0$ pour tous les $\Lambda^L \in (\mathfrak{a}_M^L)_{\mathbb{C}}^*$ tels que $(\Lambda^L + (\mathfrak{a}_L(\mathbb{C})^* \oplus \mathfrak{t}_M^{\text{anis}}(\mathbb{C})^*)) \cap (\chi_{\rho_{\mathbb{R}}})_M = \emptyset$;

(ii) pour tout X^L dans la chambre de Weyl $\mathfrak{a}_{PL}^{L+}$, on a

$$\Phi_M^L(\rho_{\mathbb{R}}, \gamma\ \mathrm{e}^{X^L}) = \sum_{\Lambda^L\in(\mathfrak{a}_M^L)_{\mathbb{C}}^*} \phi_{PL}^L(\rho_{\mathbb{R}}, \gamma, \Lambda^L)\ \mathrm{e}^{-\Lambda^L(X^L)}. \tag{4.15}$$

Preuve du lemme. Par récurrence sur le rang de A_L, on définit des constantes ${}^c d_L^G(\rho_{\mathbb{R}}, \Lambda_L, \sigma_{\mathbb{R}})$ $(L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \rho_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R})), \Lambda_L \in (\mathfrak{a}_L^G)_{\mathbb{C}}^*)$ telles que

$${}^c d_G^G(\rho_{\mathbb{R}}, 0, \sigma_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.16}$$

et que, pour tout $M \in \mathcal{L}, M \subsetneq G$, tout $\gamma \in M(\mathbb{R})^1 \cap G_{\text{reg}}$ et tout $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)_{\mathbb{C}}^*$,

$$\sum_{\substack{L\in\mathcal{L}\\ M\subset L\subset G}} \sum_{\rho_{\mathbb{R}}} (-1)^{\dim(A_L/A_M)}\phi_{PL}^L(\rho_{\mathbb{R}}^\vee, \gamma, \Lambda^L)\, {}^c d_L^G(\rho_{\mathbb{R}}, \Lambda_L, \sigma_{\mathbb{R}}) = 0, \tag{4.17}$$

où $\rho_{\mathbb{R}}$ parcourt $\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$ et où, pour chaque $L \in \mathcal{L}, M \subset L \subset G$, on a décomposé Λ en

$$\Lambda = \Lambda^L + \Lambda_L \in (\mathfrak{a}_M^G)_{\mathbb{C}}^* = (\mathfrak{a}_M^L)_{\mathbb{C}}^* \oplus (\mathfrak{a}_L^G)_{\mathbb{C}}^*$$

(les fonctions

$$\gamma \mapsto \phi_M^M(\rho_{\mathbb{R}}^\vee, \gamma, 0) = \Phi_M^M(\rho_{\mathbb{R}}, \gamma) \quad (\rho_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R})))$$

sont linéairement indépendantes).

Utilisant la Proposition (4.8), il est facile de voir que les propriétés requises des constantes ${}^c d_L^G(\rho_{\mathbb{R}}, \Lambda_L, \sigma_{\mathbb{R}})$ résultent des propriétés (i) et (ii) ci-dessus des constantes $\phi_{PL}^L(\rho_{\mathbb{R}}^\vee, \gamma, \Lambda^L)$.

On a donc montré que, pour f' fortement C-régulière, on a

$$\sum_X {}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, s(X), f_{\mathbb{R}}) f'_M(\pi_f, X)$$
$$= \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \sum_{\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}}} {}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}) \sum_{\substack{X \in \mathfrak{a}_{M,f} \\ s(X) \in \mathfrak{a}_P^{G+}}} \mathrm{e}^{-\Lambda(s(X))} f'_M(\pi_f, X).$$

Enfin, remarquons que, si $t \geqslant 0, M \in \mathcal{L}, \pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M, t)$ et $\pi'_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R}))$, si

$$\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}}) \neq 0$$

et si

$${}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}) \neq 0$$

pour au moins un $P \in \mathcal{P}(M)$ et un $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}}$, le caractère infinitésimal de $\pi_{\mathbb{R}}$, qui est égal à celui de $\pi'_{\mathbb{R}}$, est nécessairement régulier et ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes ($f_{\mathbb{R}}$ est $K_{\max,\mathbb{R}}$-finie par hypothèse). Donc, d'une part,

$$\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(M, t) \cap \Pi_{\mathrm{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{A}))$$

et

$$a_{\mathrm{disc}}^M(\pi) = m_{\mathrm{disc}}^M(\pi),$$

où $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{A}))$ est l'ensemble des représentations irréductibles unitaires π de $A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{A})$ qui interviennent discrètement, avec multiplicité $m_{\mathrm{disc}}^M(\pi)$, dans

$$L^2(A_M(\mathbb{R})^0 M(\mathbb{Q}) \backslash M(\mathbb{A}))$$

(voir [Ar 1] Sect. 3 pour plus de détails). D'autre part, pour tous les t sauf un nombre fini, le terme correspondant du second membre de la formule des traces du Théorème (4.12) est nul.

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

Tout ceci nous donne la variante suivante du Théorème (4.12):

THÉORÈME (4.18). *Soit $f_{\mathbb{R}}$ une fonction très cuspidale et cuspidale stable dans $\mathcal{H}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$. Alors, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que du support de $f_{\mathbb{R}}$ et ayant la propriété suivante. Pour toute fonction $f' \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ qui est fortement C-régulière, on a*

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in E} |G_\gamma^0(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{Q})|^{-1}\tau(G_\gamma^0)O_\gamma(f_{\mathbb{R}}f')\\
&\quad = \sum_{M\in\mathcal{L}} \frac{|W_0^M|}{|W_0^G|}\sum_\pi m_{\text{disc}}^M(\pi)\sum_{\pi'_{\mathbb{R}}}\Delta(\pi_{\mathbb{R}},\pi'_{\mathbb{R}})\\
&\qquad \times \sum_{P\in\mathcal{P}(M)}\sum_{\Lambda\in(\mathfrak{a}_M^G)_{\mathbb{C}^*}} {}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}},\Lambda,f_{\mathbb{R}}) \sum_{\substack{X\in\mathfrak{a}_{M,f}\\ s(X)\in\mathfrak{a}_P^{G+}}} \mathrm{e}^{-\Lambda(s(X))} f'_M(\pi_f,X),
\end{aligned}$$

avec les notations de (4.4) *et* (4.6), *où π parcourt $\Pi_{\text{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{A}))$ et $\pi'_{\mathbb{R}}$ parcourt $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ et où les expressions ${}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}},\Lambda,f_{\mathbb{R}})$ sont définies en* (4.14). □

L'intérêt du Théorème (4.12), et de sa variante (4.18), vient de ce qu'il est très facile de produire des fonctions f' fortement C-régulières (et donc C-régulières). En effet, fixons un ensemble fini S de places finies de $\mathbb{Q}$ et une fonction $f'' \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^S))$. Posons

$$C(f'') = \sup_{M,\alpha,P,m}\{|\alpha(H_{M,f}^S(m))|\},$$

où M parcourt $\mathcal{L}-\{G\}$, où α parcourt l'ensemble des racines de A_M dans G, où P parcourt $\mathcal{P}(M)$ et où m parcourt le support de f''_P dans $M(\mathbb{A}_f^S)$.

Pour toute place $q \in S$, on suppose que G est quasi-déployé en q, se déploie sur une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_q$ et que $K_{\max,q}$ est hyperspécial. On fixe un tore déployé maximal $T_{\text{d},q}$ de G sur $\mathbb{Q}_q$, de sorte que $A_{M_0} \subset T_{\text{d},q}$ et que le point spécial $K_{\max,q}$ de l'immeuble de Bruhat–Tits de G sur $\mathbb{Q}_q$ soit dans l'appartement associé à $T_{\text{d},q}$. On note $W_{\text{d},q}$ le groupe de Weyl de $(G,T_{\text{d},q})$ et

$$(-)^\vee\colon \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_{\max,q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_*(T_{\text{d},q})]^{W_{\text{d},q}}$$

l'isomorphisme de Satake. Si $f_q \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_{\max,q})$ a pour transformé de Satake

$$f_q^\vee = \sum_{\mu_q\in X_*(T_{\text{d},q})} a_{\mu_q}[\mu_q],$$

on pose

$$\mathrm{Supp}(f_q^\vee) = \{\mu_q \in X_*(T_{\mathrm{d},q}) \mid a_{\mu_q} \neq 0\}.$$

LEMME (4.19). *Soit $C \in \mathbb{R}_+$ et, pour chaque $q \in S$, soit $f_q \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_{\max,q})$. On suppose que, pour toute famille $(\mu_q)_{q\in S}$ avec $\mu_q \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee)$, tout $M \in \mathcal{L}, M \subsetneqq G$, et toute racine α de A_M dans G, on a*

$$\left|\sum_{q\in S} \alpha(\mu_{q,M}) \log q\right| > C + C(f'').$$

Alors, la fonction

$$f' = f'' \prod_{q\in S} f_q \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$$

est fortement C-régulière. De plus, pour tout $M \in \mathcal{L}$, tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}}$, on a

$$\sum_{\substack{X\in\mathfrak{a}_{M,f}\\ s(X)\in\mathfrak{a}_P^{G+}}} \mathrm{e}^{-\Lambda(s(X))} f'_M(\pi_f, X) \;=\; \mathrm{tr}\, \mathcal{I}_P(\pi_{f,\Lambda}^S, f'')$$

$$\times \sum_{\substack{X_S\in\mathfrak{a}_{M,S}\\ s(X_S)\in\mathfrak{a}_P^{G+}}} \mathrm{e}^{-\Lambda(s(X_S))} f_{S,M}(\pi_S, X_S)$$

Ici, pour tout $q \in S$, on a noté $(-)_M$ la projection canonique de $X_*(T_{\mathrm{d},q}) \otimes \mathbb{R}$ sur $\mathfrak{a}_M = \mathrm{Hom}(X^*(M), \mathbb{R})$ et on a noté encore s le morphisme $X_S \mapsto (\sum_{q\in S} X_q)^G$ de $\mathfrak{a}_{M,S}$ dans $\mathfrak{a}_M^G$.

Preuve. Soient $q \in S$ et $M \in \mathcal{L}, M \subsetneqq G$. Il est facile de voir que, si, pour un $P \in \mathcal{P}(M)$ et un $m \in M(\mathbb{Q}_q)$, on a $f_{q,P}(m) \neq 0$, alors il existe au moins un $\mu_q \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee)$ tel

$$H_{M,q}(m) = -\mu_{q,M} \log q.$$

La première assertion du lemme découle immédiatement de cette remarque.

D'autre part, pour chaque $q \in S$, chaque $M \in \mathcal{L}$, chaque représentation irréductible admissible π_q de $M(\mathbb{Q}_q)$ et chaque $X_q \in \mathfrak{a}_{M,q}$, on a

$$f_{q,M}(\pi_q, X_q) = \sum_{\substack{\mu_q\in X_*(T_{\mathrm{d},q})\\ \mu_{q,M}\log q=-X_q}} a_{\mu_q} \mu_q(t_{\pi_q}),$$

si π_q est non ramifiée, où $t_{\pi_q} \in \widehat{T}$ est le paramêtre de Langlands de π_q, et $f_{q,M}(\pi_q, X_q) = 0$ sinon (bien sûr, $\widehat{T}$ est le tore complexe de groupe des caractères $X_*(T_{\mathrm{d},q})$). Par suite, si $X \in \mathfrak{a}_{M,f}$ est tel que

$$f'_M(\pi_f, X) = f''_M(\pi_f^S, X^S) \prod_{q \in S} f_{q,M}(\pi_q, X_q) \neq 0,$$

pour chaque $q \in S$, il existe $\mu_q \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee)$ tel que $\mu_{q,M} \log q = -X_q$ et il existe $m \in M(\mathbb{A}_f^S)$ tel que

$$H_{M,f}^S(m) = -\left(\sum_{q \notin S} X_q\right)^G$$

(voir la preuve de (4.11)); l'hypothèse faite sur f' implique donc que, pour un tel X et pour chaque $P \in \mathcal{P}(M)$, on a

$$s(X) \in \mathfrak{a}_P^{G+}$$

si et seulement si on a

$$s(X_S) \in \mathfrak{a}_P^{G+}.$$

Ceci démontre la seconde assertion du lemme. □

Remarque (4.20). En pratique, un nombre premier p et une fonction $f_{p,1} \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_p)//K_{\max,p})$ de transformée de Satake

$$f_{p,1}^\vee = \sum_{\mu_p \in X_*(T_{\mathrm{d},p})} a_{\mu_p}[\mu_p]$$

sont fixés, ainsi qu'une fonction $f'' \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^p))$, et on veut que $f_{p,j}, f''$ et $S = \{p\}$ vérifient les conclusions du Lemme (4.19) pour j assez grand, où $f_{p,j} \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_p)//K_{\max,p})$ a pour transformée de Satake

$$f_{p,j}^\vee = \sum_{\mu_p \in X_*(T_{\mathrm{d},p})} a_{\mu_p}[j\mu_p]$$

$(j \in \mathbb{Z}_{>0})$.

Deux cas se présentent: soit, pour tout $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneqq G$, toute racine α de A_M dans G et tout $\mu_p \in \mathrm{Supp}(f_{p,1}^\vee)$, on a $\alpha(\mu_{p,M}) \neq 0$, soit, il existe $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneqq G$, une racine α de A_M dans G et $\mu_p \in \mathrm{Supp}(f_{p,1}^\vee)$ pour lesquels $\alpha(\mu_{p,M}) = 0$.

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

Dans le premier cas, on voit facilement que $S = \{p\}, f_{p,j}$ et f'' vérifient les hypothèses du Lemme (4.19) dès que

$$j > \frac{C + C(f'')}{\inf_{M,\alpha,\mu_p}\{|\alpha(\mu_{p,M})|\log p\}},$$

où M parcourt $\mathcal{L} - \{G\}, \alpha$ parcourt les racines de A_M dans G, μ_p parcourt $\mathrm{Supp}(f_{p,1}^{\vee})$ et μ_q parcourt $\mathrm{Supp}(f_q^{\vee})$. □

Dans le deuxième cas, les hypothèses du lemme ne sont a priori vérifiées pour aucun j. Ceci nous amène, suivant une suggestion d'Arthur (voir aussi [We]), à introduire un nombre premier auxiliaire $q \neq p$, choisi de telle sorte que f'' se décompose en $f'''1_{K_{\max,q}}$ avec $f''' \in \mathcal{C}_c^{\infty}(G(\mathbb{A}_f^{p,q}))$, et à introduire une fonction auxiliaire variable $f_q \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_{\max,q})$. On remplace alors notre ensemble S initial par l'ensemble $S = \{p, q\}$ et on voit facilement que $S = \{p, q\}, f_{p,j}, f_q$ et f''' vérifient les hypothèses de (4.19) dès que les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(i) pour tout $M \in \mathcal{L}, M \subsetneq G$, et toute racine α de A_M dans G telle que $\alpha(\mu_{p,M}) = 0$ pour l'un des $\mu_p \in \mathrm{Supp}(f_{p,1}^{\vee})$, on a

$$|\alpha(\mu_{q,M})\log q| > C + C(f''') \quad (\forall \mu_q \in \mathrm{Supp}(f_q^{\vee}));$$

(ii) on a

$$j > \sup_{M,\alpha,\mu_p,\mu_q}\left\{\frac{C + C(f''') + |\alpha(\mu_{q,M})|\log q}{|\alpha(\mu_{p,M})|\log p}\,\middle|\,\alpha(\mu_{p,M}) \neq 0\right\},$$

où M parcourt $\mathcal{L} - \{G\}, \alpha$ parcourt les racines de A_M dans G, μ_p parcourt $\mathrm{Supp}(f_{p,1}^{\vee})$ et μ_q parcourt $\mathrm{Supp}(f_q^{\vee})$. □

5. Simplifications dans la formule des traces non invariantes d'Arthur: applications à $\mathrm{GSp}(4)$

Appliquons maintenant les résultats généraux du paragraphe précédent aux deux cas particuliers suivants:

$$(G, f) = (G = \mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}, f^G)$$

et

$$(G, f) = (H = \mathrm{GL}(1)_{\mathbb{Q}}\backslash[\mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Q}}], f^H).$$

LEMME (5.1). *On peut choisir les fonctions cuspidales stables $f_{\mathbb{R}}^G$ et $f_{\mathbb{R}}^H$ de* (2.4) *et* (2.7) *respectivement de telle sorte qu'elles soient très cuspidales.*

Preuve. Voir [Lab 2] (pour $f_{\mathbb{R}}^H$, il suffit même de choisir f_1 et f_3 invariantes par conjugaison par $\mathrm{O}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ car toute fonction cuspidale et $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$-invariante sur $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ est trivialement très cuspidale). $\square$

Dorénavant, nous supposerons que $f_{\mathbb{R}}^G$ et $f_{\mathbb{R}}^H$ sont très cuspidales.

Fixons maintenant un nombre premier $q \neq p$ qui soit à la fois bon pour K, i.e. tel que $K^p = K^{p,q}K_q$ avec $K_q = G(\mathbb{Z}_q)$, et bon pour f^p, i.e. tel que $f^p = f^{p,q}1_{K_q}$ avec $f^{p,q} \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f^{p,q})//K^{p,q})$, et remplaçons f^p par

$$\tilde{f}^p = f^{p,q}f_q,$$

où $f_q \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ est pour l'instant arbitraire. Bien entendu cela nous conduit à remplacer h^p par

$$\tilde{h}^p = h^{p,q}b^H(f_q),$$

où $h^{p,q}$ est un transfert ordinaire de $f^{p,q}$ pour le facteur de transfert

$$\Delta_f^{p,q} = \prod_{v\neq\infty,p,q} \Delta_v$$

normalisé comme en (2.8) et où

$$b^H\colon \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q) \to \mathcal{C}_c(H(\mathbb{Q}_q)//K_q^H)$$

$(K_q^H = H(\mathbb{Z}_q))$ est l'homomorphisme induit par l'isomorphisme $j\colon S \xrightarrow{\sim} T$ de (2.6). Pour que ce choix de $\tilde{h}^p$ soit compatible avec l'hypothèse (2.8.1), on doit avoir:

HYPOTHÈSE (5.2). *Pour tout élément semi-simple et (G,H)-régulier $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_q)$, on a*

$$SO_{\gamma_H}(b^H(f_q)) = \sum_{\gamma} \Delta_q(\gamma_H,\gamma)\, \mathrm{e}_q(\gamma)\, O_\gamma(f_q),$$

avec les notations et les normalisations de [Ko 2] (7.1) *et de* (2.8).

Pour notre groupe ($G = \mathrm{GSp}(4)$), cette hypothèse a été établie par Hales dans [Ha 3] : tout d'abord, utilisant un résultat de Waldspurger (cf. [Wa 1]), Hales montre le cas particulier, $f_q = 1_{K_q}$ et $q \neq 2$, de cette hypothèse (cf. [Ha 2]); puis, par un argument global (cf. [Ha 4]), Hales déduit le cas général de ce cas particulier.

THÉORÈME (5.3). *Les nombres premiers $p \neq q$ et les fonctions $f_{\mathbb{R}}^G, f_{\mathbb{R}}^H, f^{p,q}$ et $h^{p,q}$ étant fixées comme ci-dessus, il existe une constante $D \in \mathbb{R}_+$ ayant la* *propriété suivante. Pour toute fonction* $f_q \in \mathcal{C}_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ *et tout entier* $j > 0$ *tels que*

(i) $\alpha(\mu)| \log q > D \quad (\forall \alpha \in \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\},\ \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee))$,

(ii) $j > \dfrac{D + |\alpha(\mu)| \log q}{\log p} \quad (\forall \alpha \in R,\ \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee))$,

on a les formules des traces suivantes.

(a) $T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^G) = J_G^G(\widetilde{f}^G) + \frac{1}{2}J_{M_1}^G(\widetilde{f}^G) + \frac{1}{2}J_{M_2}^G(\widetilde{f}^G) + \frac{1}{8}J_T^G(\widetilde{f}^G)$,

avec

$$\widetilde{f}^G = f_{\mathbb{R}}^G f^{p,q} f_q b_j^G(\varphi_j)$$

et avec, pour tout $M \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} J_M^G(\widetilde{f}^G) \;=\; & \sum_{\pi} m_{\mathrm{disc}}^M(\pi) \sum_{\pi'_{\mathbb{R}}} \Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}}) \\ & \times \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \sum_{\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_{\mathbb{C}}} {}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G) \operatorname{tr} \mathcal{I}_P(\pi_{f,\Lambda}^{p,q}, f^{p,q}) \\ & \times \sum_{\nu \in W \cdot \mu} p^{j(\Lambda(\nu_M^G)+\frac{3}{2})} \nu(t_{\pi_p})^j \\ & \times \sum_{\substack{X_q \in \mathfrak{a}_{M,q} \\ X_q^G \in j\nu_M^G \log p + \mathfrak{a}_P^{G+}}} \mathrm{e}^{-\Lambda(X_q^G)} f_{q,M}(\pi_q, X_q), \end{aligned}$$

où π *parcourt les représentations dans* $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{A}))$ *qui sont non ramifiées en* p *et* q *et* $\pi'_{\mathbb{R}}$ *parcourt* $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$*, où les constantes* $\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}})$ *et* ${}^c d_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ *ont été définies en* (4.9) *et* (4.14) *et où* $t_{\pi_p} \in \widehat{T}$ *est le paramètre de Langlands de* π_p.

(b) $T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^H) = J_H^H(\widetilde{f}^H) + \frac{1}{2}J_{L_1}^H(\widetilde{f}^H) + \frac{1}{2}J_{L_2}^H(\widetilde{f}^H) + \frac{1}{4}J_S^H(\widetilde{f}^H)$,

avec

$$\widetilde{f}^H = f_{\mathbb{R}}^H h^{p,q} b^H(f_q) b_j^H(\varphi_j)$$

et avec, pour tout $L \in \mathcal{L}^H$,

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned} J_L^H(\widetilde{f}^H) \ = \ & \sum_{\rho} m_{\mathrm{disc}}^L(\rho) \sum_{\rho'_{\mathbb{R}}} \Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \rho'_{\mathbb{R}}) \\ & \times \sum_{Q \in \mathcal{P}(L)} \sum_{\mathrm{M} \in (\mathfrak{a}_L^H)^*_{\mathbb{C}}} {}^c d_L^H(\rho'_{\mathbb{R}}, \mathrm{M}, f_{\mathbb{R}}^H) \operatorname{tr} \mathcal{I}_Q(\rho_{f,\mathrm{M}}^{p,q}, h^{p,q}) \\ & \times \sum_{\nu} (-1)^{\delta(\nu)} p^{j(\mathrm{M}(\nu_L^H) + \frac{3}{2})} \nu(t_{\rho_p})^j \\ & \times \sum_{\substack{Y_q \in \mathfrak{a}_{L,q} \\ Y_q^H \in j\nu_L^H \log p + \mathfrak{a}_Q^{H+}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{M}(Y_q^H)} b^H(f_q)_L(\rho_q, Y_q), \end{aligned}$$

où ρ parcourt les représentations dans $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_L(\mathbb{R})^0 \backslash L(\mathbb{A}))$ qui sont non ramifiées en p et q, $\rho'_{\mathbb{R}}$ parcourt $\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0 \backslash L(\mathbb{R}))$ et ν parcourt $\{\nu'_1, \nu''_1, \nu'_2, \nu''_2\}$ (cf. (2.9)), *où $\delta(\nu'_1) = \delta(\nu''_1) = 0$ et $\delta(\nu'_2) = \delta(\nu''_2) = 1$, où les constantes $\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \rho'_{\mathbb{R}})$ et ${}^c d_L^H(\rho'_{\mathbb{R}}, \mathrm{M}, f_{\mathbb{R}}^H)$ ont été définies en* (4.9) *et* (4.14) *et où $t_{\rho_p} \in \widehat{S}$ est le paramètre de Langlands de ρ_p.*

Preuve. D'une part, la projection de $\mathrm{Supp}(b_1^G(\varphi_1)^\vee)$ sur $\mathfrak{a}_T^G$ est égale à

$$\{\pm\tfrac{1}{2}(\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee), \pm\tfrac{1}{2}\alpha_1^\vee\}$$

et, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathfrak{a}_T^G$, on a

$$\alpha_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

$$\alpha_2(x_1, x_2) = 2x_2$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$(2\alpha_1 + \alpha_2)(x_1, x_2) = 2x_1,$$

on a

$$\alpha((x_1, x_2)_{M_1}) = x_1 + x_2 \quad (\text{resp. } \alpha((x_1, x_2)_{M'_1}) = x_1 - x_2),$$

où α est l'unique racine positive de A_{M_1} (resp. $A_{M'_1}$) dans G, et on a

$$\alpha((x_1, x_2)_{M_2}) = x_1 \quad (\text{resp. } \alpha((x_1, x_2)_{M'_2}) = x_2),$$

où α et 2α sont les uniques racines positives de A_{M_2} (resp. $A_{M'_2}$) dans G. D'autre part, la projection de $\mathrm{Supp}(b_1^H(\varphi_1)^\vee)$ sur $\mathfrak{a}_S^H$, que l'on a identifié à $\mathfrak{a}_T^G$ grâce à l'isomorphisme $j\colon S \xrightarrow{\sim} T$ de (2.6), est aussi égale à

$$\{\pm\tfrac{1}{2}(\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee), \pm\tfrac{1}{2}\alpha_1^\vee\}$$

et celle de $\mathrm{Supp}(b^H(f_q)^\vee)$ coïncide avec la projection de $\mathrm{Supp}(f_q^\vee)$ sur $\mathfrak{a}_T^G$ et, pour tout $(x_1, x_2) \in \mathfrak{a}_T^G \cong \mathfrak{a}_S^H$, on a

$$\beta_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$\beta_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2,$$

on a

$$\beta((x_1, x_2)_{L_1}) = x_1 - x_2,$$

où β est l'unique racine positive de A_{L_1} dans H, et on a

$$\beta((x_1, x_2)_{L_2}) = x_1 + x_2,$$

où β est l'unique racine positive de A_{L_2} dans H. Par suite, d'après la Remarque (4.20), si on prend $D = 2(C + C(f^{p,q}))$, où $C \in \mathbb{R}_+$, les hypothèses du Lemme (4.19) sont vérifiées pour $f^{p,q} f_q b_j^G(\varphi_j)$ et pour $h^{p,q} b^H(f_q) b_j^H(\varphi_j)$. Il ne reste plus qu'à prendre pour C une constante faisant marcher le Théorème (4.18) pour $(G, f_{\mathbb{R}}^G)$ et pour $(H, f_{\mathbb{R}}^H)$ et à remarquer que

$$J_{M_1'}^G(\tilde{f}^G) = J_{M_1}^G(\tilde{f}^G)$$

et

$$J_{M_2'}^G(\tilde{f}^G) = J_{M_2}^G(\tilde{f}^G)$$

car $M_1' = \dot{s}_{\alpha_2} M_1 \dot{s}_{\alpha_2}^{-1}$ et $M_2' = \dot{s}_{\alpha_1} M_2 \dot{s}_{\alpha_1}^{-1}$ et car $f_{\mathbb{R}}^G$ est $K_{\mathbb{R}}$-invariante par conjugaison. $\square$

Remarque (5.4). Pour $\mathrm{GSp}(4)$, les hypothèses (i) et (ii) de (4.20) sont particulièrement simples à formuler car tout sous-espace $\mathfrak{a}_M^G, M \in \mathcal{L}$, ou $\mathfrak{a}_L^H, L \in \mathcal{L}^H$, de $\mathfrak{a}_T^G$ est orthogonal à l'un des murs. $\square$

Il nous reste à calculer les constantes ${}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ et ${}^c d_Q^H(\rho'_{\mathbb{R}}, \mathrm{M}, f_{\mathbb{R}}^H)$, puis les constantes $\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}})$ et $\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \rho'_{\mathbb{R}})$ pour les représentations de carré intégrable $\pi'_{\mathbb{R}}$ et $\rho'_{\mathbb{R}}$ pour lesquelles les constantes ${}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ et ${}^c d_Q^H(\rho'_{\mathbb{R}}, \mathrm{M}, f_{\mathbb{R}}^H)$ ne s'annulent pas identiquement. On se limitera pour l'instant aux termes correspondant à des sous-groupes de Levi propres, reportant à plus tard l'étude des cas $M = G$ et $L = H$. Pour les constantes ${}^c d_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ et ${}^c d_Q^H(\rho'_{\mathbb{R}}, \mathrm{M}, f_{\mathbb{R}}^H)$, on exprimera les résultats sous la forme plus compacte de formules pour ${}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}^G)$ et ${}^c D_L^H(\rho'_{\mathbb{R}}, Y, f_{\mathbb{R}}^H)$.

On notera sgn l'unique caractère non trivial de $\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathbb{R}^\times$. On rappelle qu'on a introduit en (2.7), pour chaque entier $n \geqslant 1$, la représentation $\sigma_n(\frac{1-n}{2})$ de la série

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

discrète de $\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.

THÉORÈME (5.5). *Soient* $M = M_1$, M_2 *ou* T, $\pi'_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ *et* $X = (x_1, x_2) \in \mathfrak{a}_M^G \subset \mathbb{R}^2$. *Alors, on a les formules suivantes.*

(i) *Si* $M = M_1 = \mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(1)$, *si* $X = (x, x)$ *et si* $\pi'_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}} \otimes \mathrm{sgn}^b$, *où* $\sigma_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}))$ *et* $b \in \{0, 1\}$, *on a*

$$^cD_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}^G) = \frac{1}{2}\begin{cases} \mathrm{e}^{-3|x|} & \textit{si } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \\ -\mathrm{e}^{-|x|} & \textit{si } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_3(-1). \end{cases}$$

(ii) *Si* $M = M_2 = \mathrm{GL}(1)\times\mathrm{GL}(2)$, *si* $X = (x, 0)$ *et si* $\pi'_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^a \otimes \sigma_{\mathbb{R}}$, *où* $\sigma_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}))$ *et* $a \in \{0, 1\}$, *on a*

$$^cD_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}^G) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2|x|} & \textit{si } a = 0 \textit{ et } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \\ -\mathrm{e}^{-|x|} & \textit{si } a = 1 \textit{ et } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_2(-\frac{1}{2}). \end{cases}$$

(iii) *Si* $M = T = \mathrm{GL}(1)^3 = \{(t_1, t_2, t_1t_4 = t_2t_3)\}$ *et si* $\pi'_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^b$, *où* $a, b \in \{0, 1\}$, *on a*

$$\begin{aligned} ^cD_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}^G) \;=\; & \frac{(-1)^a}{2}[\mathrm{e}^{-2|x_1|-|x_2|} + \mathrm{e}^{-|x_1|-2|x_2|}] \\ & + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(|x_1|+|x_2|)-3(|x_1-x_2|+|x_1+x_2|)/2} \\ & + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2(|x_1|+|x_2|)+(|x_1-x_2|+|x_1+x_2|)/2}. \end{aligned}$$

(iv) *Dans tous les autres cas, on a*

$$^cD_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}^G) = 0.$$

Pour ce qui est des constantes $^cd_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ et $^cd_Q^H(\rho'_{\mathbb{R}}, \mathrm{M}, f_{\mathbb{R}}^H)$ elles même, on a, par exemple, les conséquences directes du Théorème (5.5) suivantes. Si P est le sous-groupe parabolique $P_1 \in \mathcal{P}(M_1)$ contenant le sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires supérieures, le support de la fonction $^cd_P^G(\sigma_{\mathbb{R}} \otimes \mathrm{sgn}^b, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ de Λ est $\{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\}$ si $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1$ et on a

$$^cd_{P_1}^G(\sigma_1 \otimes \mathrm{sgn}^b, (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}), f_{\mathbb{R}}^G) = \tfrac{1}{2},$$

ce support est $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ si $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_3(-1)$ et on a

$$^cd_{P_1}^G(\sigma_3(-1) \otimes \mathrm{sgn}^b, (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), f_{\mathbb{R}}^G) = -\tfrac{1}{2}$$

et ce support est vide dans tous les autres cas. De même, si P est le sous-groupe parabolique $P_2 \in \mathcal{P}(M_2)$ contenant B, le support de la fonction ${}^c d_P^G(\mathrm{sgn}^a \otimes \sigma_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ de Λ est $\{(2,0)\}$ si $a = 0$ et $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1$ et on a

$$ {}^c d_{P_2}^G(1 \otimes \sigma_1, (2,0), f_{\mathbb{R}}^G) = 1, $$

ce support est $\{(1,0)\}$ si $a = 1$ et $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_2(-\frac{1}{2})$ et on a

$$ {}^c d_{P_2}^G(\mathrm{sgn} \otimes \sigma_2(-\tfrac{1}{2}), (1,0), f_{\mathbb{R}}^G) = -1 $$

et ce support est vide dans tous les autres cas. Enfin, le support de la fonction ${}^c d_B^G(\mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^b, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ de Λ est $\{(2,1),(1,2),(2,-1)\}$ et on a

$$ {}^c d_B^G(\mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^b, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G) = \begin{cases} \frac{(-1)^a}{2} \text{ si } \Lambda = (2,1) \\ \frac{(-1)^a}{2} + \frac{1}{2} \text{ si } \Lambda = (1,2) \\ \frac{1}{2} \text{ si } \Lambda = (2,-1) \text{ ou } (2,-1). \end{cases} $$

Preuve. Pour calculer les ${}^c D_M^G(\pi'_{\mathbb{R}}, X, f_{\mathbb{R}}^G)$, il suffit de calculer les $\Phi_M^L(\rho_{\mathbb{R}}^\vee, \gamma e^{X^L})$ pour $M \subset L \subset G, M \subsetneq G$, arbitraires dans $\mathcal{L}$, $\rho_{\mathbb{R}}$ dans $\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0 \backslash L(\mathbb{R}))$, γ elliptique dans $M(\mathbb{R})^1$ et $X^L \in \mathfrak{a}_M^L$, puis d'inverser, par récurrence sur le rang de A_M, les formules (i) et (ii) de la Proposition (4.8). Comme tous ces calculs sont fastidieux mais élémentaires, nous nous contenterons de donner les formules pour les expressions

$$ \varphi_M(\gamma\, \mathrm{e}^X) = \Phi_M^G(\pi_{\mathbb{R}}'^\vee, \gamma\, \mathrm{e}^X) + \Phi_M^G(\pi_{\mathbb{R}}''^\vee, \gamma\, \mathrm{e}^X), $$

où $M = M_1$, M_2 ou T, $\gamma \in M(\mathbb{R})^1$ est elliptique, $X \in \mathfrak{a}_M^G$ et $\Pi = \{\pi'_{\mathbb{R}}, \pi''_{\mathbb{R}}\}$ est le L-paquet décrit en (2.4), et de les démontrer en suivant une méthode suggérée par Kottwitz (il est aussi possible d'appliquer directement les formules d'Harish–Chandra (et Herb) rappelées avant la preuve du Lemme (4.13)). On espère qu'il n'y aura pas de confusion entre la représentation $\pi'_{\mathbb{R}}$ dans le L-paquet décrit en (2.4) et la représentation $\pi'_{\mathbb{R}}$ de $A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R})$ de l'énoncé du théorème; d'ailleurs, cette dernière n'interviendra plus d'ici la fin de la preuve.

Tout d'abord, on remarque que $\pi_{\mathbb{R}}'^\vee = \pi'_{\mathbb{R}}$ et $\pi_{\mathbb{R}}''^\vee = \pi''_{\mathbb{R}}$ et que $\pi'_{\mathbb{R}}$ et $\pi''_{\mathbb{R}}$ sont induites à partir de la composante neutre $G(\mathbb{R})^0$ de $G(\mathbb{R})$, de sorte que

$$ (\Theta_{\pi'_{\mathbb{R}}} + \Theta_{\pi''_{\mathbb{R}}}) | G(\mathbb{R}) - G(\mathbb{R})^0 \equiv 0. $$

Maintenant, sur $G(\mathbb{R})^0$, on a d'après [Vo 2] Section 6 et avec les notations de *loc. cit.*,

$$ 1 = -(A + B + C + D) - I - (H + J) + F + (E + G) + L $$

avec

$$A+B+C+D=\Theta_{\pi'_{\mathbb{R}}}+\Theta_{\pi''_{\mathbb{R}}},$$

$$I=\Theta_{M_1,\sigma_1\otimes 1,(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}$$

$$H+J=\Theta_{M_2,1\otimes\sigma_1,(2,0)}$$

$$F=\Theta_{M_1,\sigma_3(-1)\otimes 1,(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$$

$$E+G=\Theta_{M_2,\mathrm{sgn}\otimes\sigma_2(-\frac{1}{2}),(1,0)}$$

$$L=\Theta_{T,1,(2,1)}$$

où, pour tout $\pi_{\mathbb{R}}\in\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ et tout $\nu\in(\mathfrak{a}_M^G)^*$, $\Theta_{M,\pi_{\mathbb{R}},\nu}$ est le caractère de la représentation induite

$$\mathcal{I}_P(\pi_{\mathbb{R}}\otimes \mathrm{e}^{\nu})$$

pour n'importe quel $P\in\mathcal{P}(M)$ (si $\nu=(y_1,y_2)\in(\mathfrak{a}_M^G)^*\subset(\mathfrak{a}_T^G)^*=\mathbb{R}^2$, on a

$$\nu(X)=x_1y_1+x_2y_2$$

pour tout $X=(x_1,x_2)\in\mathfrak{a}_M^G\subset\mathfrak{a}_T^G=\mathbb{R}^2$). Or les $\Theta_{M,\pi,\nu}$ se calculent explicitement (cf. [Kn] (10.27) and (10.28)) et, tout calcul fait, on obtient les formules suivantes pour $\varphi_M(\gamma e^X)$:

(a) si $M=M_1$, si

$$\gamma=\begin{pmatrix}k_\theta & 0\\ 0 & \varepsilon k_\theta\end{pmatrix}$$

et si $X=(x,x)$, on a

$$\varphi_M(\gamma\,\mathrm{e}^X)=(1+\varepsilon)[\mathrm{e}^{-3|x|}-(\mathrm{e}^{2i\theta}+1+\mathrm{e}^{-2i\theta})\,\mathrm{e}^{-|x|}];$$

(b) si $M=M_2$, si

$$\gamma=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & k_\theta & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$$

et si $X=(x,0)$, on a

$$\varphi_M(\gamma\,\mathrm{e}^X)=2[\mathrm{e}^{-2|x|}-\varepsilon(\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta})\,\mathrm{e}^{-|x|}];$$

(c) Si $M = T$, si $\gamma = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon\varepsilon_2, \varepsilon\varepsilon_1)$ et si $X = (x_1, x_2)$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_M(\gamma\,\mathrm{e}^X) \;=\; & (1+\varepsilon)(1+\varepsilon_1\varepsilon_2)[\mathrm{e}^{|x_1|+|x_2|-3(|x_1-x_2|+|x_1+x_2|)/2} \\ & +\mathrm{e}^{-2(|x_1|+|x_2|)+(|x_1-x_2|+|x_1+x_2|)/2}] \\ & -(1+\varepsilon)(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)[\mathrm{e}^{-2|x_1|-|x_2|}+\mathrm{e}^{-|x_1|-2|x_2|}];\end{aligned}$$

(bien sûr dans les formules ci-dessus, $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ et

$$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

pour $\theta \in [0, 2\pi[$). □

Pour toute représentation unitaire $\sigma_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, on a

$$\Delta(\sigma_{\mathbb{R}}, \sigma_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \\ -1 & \text{si } \sigma_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^c \circ \det \ (c \in \{0, 1\}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\Delta\left(\sigma_{\mathbb{R}}, \sigma_n\left(\frac{1-n}{2}\right)\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_n\left(\frac{1-n}{2}\right) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

quel que soit l'entier $n \geqslant 2$.

Par suite, pour toute représentation $\pi_{\mathbb{R}} \in \Pi_{\mathrm{unit}}(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R}))$, on a

$$\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \sigma_1 \otimes \mathrm{sgn}^b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \otimes \mathrm{sgn}^b \\ -1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = (\mathrm{sgn}^c \circ \det) \otimes \mathrm{sgn}^b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.6(i)$'$}$$

et

$$\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \sigma_3(-1) \otimes \mathrm{sgn}^b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = \sigma_3(-1) \otimes \mathrm{sgn}^b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.6(i)$''$}$$

dans le cas $M = M_1$, on a

$$\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, 1 \otimes \sigma_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = 1 \otimes \sigma_1 \\ -1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = 1 \otimes (\mathrm{sgn}^c \circ \det) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.6(ii)$'$}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

et

$$\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \mathrm{sgn} \otimes \sigma_2(-\tfrac{1}{2})) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn} \otimes \sigma_2(-\tfrac{1}{2}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.6(ii)$''$}$$

dans le cas $M = M_2$ et on a

$$\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^b) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^a \otimes \mathrm{sgn}^b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.6(iii)}$$

dans le cas $M = T$.

Des calculs analogues (mais plus faciles) donnent les résultats suivants.

THÉORÈME (5.7). *Soient* $L = L_1$, L_2 *ou* S, $\rho'_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0 \backslash L(\mathbb{R}))$ *et* $Y = (y_1, y_2) \in \mathfrak{a}_L^H \subset \mathbb{R}^2$ *(on rappelle qu'en* (2.6) *on a identifié* $\mathfrak{a}_S^H$ *à* $\mathbb{R}^2$ *de sorte que* $\beta_1^\vee = (1,1)$ *et* $\beta_2^\vee = (1,-1)$*). Alors on a les formules suivantes.*

(i) *Si* $L = L_1 = \mathrm{GL}(1)\backslash[\mathrm{GL}(2) \times T_2]$, *si* $Y = (y, -y)$ *et si* $\rho'_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}} \otimes \mathrm{sgn}^{a'_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a''_2}$, *où* $\sigma_2 \in \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$, *où* $a'_2, a''_2 \in \{0, 1\}$ *et où le caractère central de* $\sigma_{\mathbb{R}}$ *est égal à* $\mathrm{sgn}^{a'_2 + a''_2}$, *on a*

$${}^cD_L^H(\rho'_{\mathbb{R}}, Y, f_{\mathbb{R}}^H) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-3|y|} & \text{si } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \quad \text{et } a'_2 = a''_2 \\ -\mathrm{e}^{-|y|} & \text{si } \sigma = \sigma_3(-1) \quad \text{et } a'_2 = a''_2. \end{cases}$$

(ii) *Si* $L = L_2 = \mathrm{GL}(1)\backslash[T_2 \times \mathrm{GL}(2)]$, *si* $Y = (y, y)$ *et si* $\rho'_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^{a'_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a''_1} \otimes \sigma_{\mathbb{R}}$, *où* $a'_1, a''_1 \in \{0, 1\}$, $\sigma_{\mathbb{R}} \in \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$ *et où le caractère central de* $\sigma_{\mathbb{R}}$ *est égal à* $\mathrm{sgn}^{a'_1 + a''_1}$, *on a*

$${}^cD_L^H(\rho'_{\mathbb{R}}, Y, f_{\mathbb{R}}^H) = \begin{cases} -\mathrm{e}^{-3|y|} & \text{si } a'_1 = a''_1 \quad \text{et } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \\ \mathrm{e}^{-|y|} & \text{si } a'_1 = a''_1 \quad \text{et } \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_3(-1). \end{cases}$$

(iii) *Si* $L = S = \mathrm{GL}(1)\backslash[T_2 \times T_2]$, *si* $Y = (y_1, y_2)$ *et si* $\rho'_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2}$, *où* $a_1, a_2 \in \{0, 1\}$, *on a*

$${}^cD_L^H(\rho'_{\mathbb{R}}, Y, f_{\mathbb{R}}^H) = \mathrm{e}^{-|y_1+y_2|/2 - 3|y_1-y_2|/2} - \mathrm{e}^{-3|y_1+y_2|/2 - |y_1-y_2|/2}.$$

(iv) *Dans tous les autres cas, on a*

$${}^cD_L^H(\rho'_{\mathbb{R}}, Y, f_{\mathbb{R}}^H) = 0. \qquad \square$$

Pour toute représentation $\rho_{\mathbb{R}} \in \Pi_{\mathrm{unit}}(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R}))$, on a

$$\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \sigma_1 \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_{\mathbb{R}} = \sigma_1 \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \\ -1 & \text{si } \rho_{\mathbb{R}} = (\mathrm{sgn}^{a_1} \circ \det) \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.8(i)$'$}$$

et

$$\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \sigma_3(-1) \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_{\mathbb{R}} = \sigma_3(-1) \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.8(i)$''$}$$

dans le cas $L = L_1$, on a

$$\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \sigma_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \sigma_1 \\ -1 & \text{si } \rho_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes (\mathrm{sgn}^{a_2} \circ \det) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.8(ii)$'$}$$

et

$$\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \sigma_3(-1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \sigma_3(-1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.8(ii)$''$}$$

dans le cas $L = L_2$ et on a

$$\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_1} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \otimes \mathrm{sgn}^{a_2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.8(iii)}$$

dans le cas $L = S$.

Si on reporte maintenant les formules que l'on vient d'établir pour les constantes ${}^cD_P^G(\pi'_{\mathbb{R}}, \Lambda, f_{\mathbb{R}}^G)$ et ${}^cd_Q^H(\rho'_{\mathbb{R}}, \mathrm{M}, f_{\mathbb{R}}^H)$ et les constantes $\Delta(\pi_{\mathbb{R}}, \pi'_{\mathbb{R}})$ et $\Delta(\rho_{\mathbb{R}}, \rho'_{\mathbb{R}})$ dans les formules du Théorème (5.3), on obtient des formules explicites pour $T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^G)$ et $T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^H)$. Pour les écrire, nous utiliserons les notations suivantes.

Si $M \in \mathcal{L}$ (resp. $L \in \mathcal{L}^H$) et si π (resp. ρ) est une représentation de M (resp. L), on notera $i_M(\pi)$ (resp. $i_L(\rho)$) l'image commune des $\mathcal{I}_P(\pi)$, $P \in \mathcal{P}(M)$ (resp. $\mathcal{I}_Q(\rho)$, $Q \in \mathcal{P}^H(L)$) dans le groupe de Grothendieck de représentations de G (resp. H) adéquat. On vérifie facilement que

$$i_{M_1}(\sigma \otimes \chi) = i_{M_1}(\sigma^\vee \otimes \omega_\sigma \chi),$$

où $\sigma^\vee$ est la contragrédiente de σ et ω_σ est son caractère central, que

$$i_{M_2}(\chi \otimes \sigma) = i_{M_2}(\chi^{-1} \otimes (\chi \circ \det)\sigma)$$

et que

$$i_T(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi) = i_T(\chi_2 \otimes \chi_1 \otimes \chi) = i_T(\chi_1 \otimes \chi_2^{-1} \otimes \chi_2 \chi),$$

pour toute représentation σ de $\mathrm{GL}(2)$ et tous caractères χ, χ_1, χ_2 de $\mathrm{GL}(1)$; de même, on vérifie facilement que

$$i_{L_1}(\sigma \otimes \chi' \otimes \chi'') = i_{L_1}(\sigma \otimes \chi'' \otimes \chi'),$$

que

$$i_{L_2}(\chi' \otimes \chi'' \otimes \sigma) = i_{L_2}(\chi'' \otimes \chi' \otimes \sigma)$$

et que

$$i_S(\chi_1' \otimes \chi_1'' \otimes \chi_2' \otimes \chi_2'') = i_S(\chi_1'' \otimes \chi_1' \otimes \chi_2' \otimes \chi_2'') = i_S(\chi_1' \otimes \chi_1'' \otimes \chi_2'' \otimes \chi_2')$$

pour toute représentation σ de $\mathrm{GL}(2)$ et tous caractères $\chi', \chi'', \chi_1', \chi_1'', \chi_2', \chi_2''$ de $\mathrm{GL}(1)$ tels que $\omega_\sigma = \chi'\chi''$ et $\chi_1'\chi_1'' = \chi_2'\chi_2''$.

THÉORÈME (5.9). *Les nombres premiers $p \neq q$ et les fonctions $f_{\mathbb{R}}^G, f_{\mathbb{R}}^H, f^{p,q}$ et $h^{p,q}$ sont fixés comme dans le Théorème* (5.3)*. Il existe alors une constante $D \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction $f_q \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ et tout entier $j > 0$ vérifiant les propriétés* (i) *et* (ii) *du Théorème* (5.3)*, on ait les formules des traces suivantes.*
(a)

$$T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^G) = J_G^G(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{2} J_{M_1}^G(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{2} J_{M_2}^G(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{8} J_T^G(\widetilde{f}^G),$$

où on a posé $\widetilde{f}^G = f_{\mathbb{R}}^G \widetilde{f}$, avec $\widetilde{f}^p = f^{p,q} f_q$ et $\widetilde{f} = \widetilde{f}^p b_j^G(\varphi_j)$, et où les $J_M^G(\widetilde{f}^G)$ se calculent comme suit.

(1) $J_{M_1}^G(\widetilde{f}^G)$ est égal à

$$\sum_{\substack{\sigma,\chi \\ \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1}} \Big[z_1(\sigma_p)^j z_2(\sigma_p)^j \chi(p)^j \operatorname{tr} i_{M_1}(\sigma_f^p(\tfrac{3}{2}) \otimes \chi_f^p(-\tfrac{3}{2}), \widetilde{f}^p)$$

$$+ \tfrac{1}{2} p^{3j/2} (z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j) \chi(p)^j \operatorname{tr} i_{M_1}(\sigma_f^{p,q}(\tfrac{3}{2})$$

$$\otimes \chi_f^{p,q}(-\tfrac{3}{2}), f^{p,q}) \sum_{X_q} f_{M_1,q}(\sigma_q \otimes \chi_q, X_q)\, \mathrm{e}^{-3|x|} \Big]$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\xi,\chi}\Big[\xi(p)^{2j}\chi(p)^j\ \mathrm{tr}\ i_{M_1}((\xi_f^p\circ\det)(\tfrac{3}{2})\otimes\chi_f^p(-\tfrac{3}{2}),\widetilde{f}^p)\\
&\qquad+\tfrac{1}{2}p^j(1+p^j)\xi(p)^j\chi(p)^j\ \mathrm{tr}\ i_{M_1}((\xi_f^{p,q}\circ\det)(\tfrac{3}{2})\\
&\qquad\otimes\chi_f^{p,q}(-\tfrac{3}{2}),f^{p,q})\sum_{X_q}f_{M_1,q}((\xi_q\circ\det)\otimes\chi_q,X_q)\ \mathrm{e}^{-3|x|}\Big]\\
&-\sum_{\substack{\sigma,\chi\\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_3(-1)}}\Big[p^jz_1(\sigma_p)^jz_2(\sigma_p)^j\chi(p)^j\ \mathrm{tr}\ i_{M_1}(\sigma_f^p(\tfrac{1}{2})\otimes\chi_f^p(-\tfrac{1}{2}),\widetilde{f}^p)\\
&\qquad+\tfrac{1}{2}p^{3j/2}(z_1(\sigma_p)^j+z_2(\sigma_p)^j)\chi(p)^j\ \mathrm{tr}\ i_{M_1}(\sigma_f^{p,q}(\tfrac{1}{2})\\
&\qquad\otimes\chi_f^{p,q}(-\tfrac{1}{2}),f^{p,q})\sum_{X_q}f_{M_1,q}(\sigma_q\otimes\chi_q,X_q)\ \mathrm{e}^{-|x|}\Big],
\end{aligned}
$$

où σ parcourt les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ qui sont non ramifiées en p, χ et ξ parcourent les caractères de Hecke de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ non ramifiés en p et X_q parcourt $\mathfrak{a}_{M_1,q}$ et où $\{z_1(\sigma_p),z_2(\sigma_p)\}$ est l'ensemble des valeurs propres de Hecke de σ_p et $(x,x)=X_q^G$.

(2) *$J_{M_2}^G(\widetilde{f}^G)$ est égal à*

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{\substack{\chi,\sigma\\ \chi_{\mathbb{R}}=1,\sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_1}}p^{j/2}\chi(p)^j(z_1(\sigma_p)^j+z_2(\sigma_p)^j)\ \mathrm{tr}\ i_{M_2}(\chi_f^p(2)\otimes\sigma_f^p(-1),\widetilde{f}^p)\\
&\quad-2\sum_{\substack{\chi,\xi\\ \chi_{\mathbb{R}}=1}}(1+p^j)\chi(p)^j\xi(p)^j\ \mathrm{tr}\ i_{M_2}(\chi_f^p(2)\otimes(\xi_f^p\circ\det)(-1),\widetilde{f}^p)\\
&\quad-2\sum_{\substack{\chi,\sigma\\ \chi_{\mathbb{R}}=\mathrm{sgn}\\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_2(-\frac{1}{2})}}p^j\chi(p)^j(z_1(\sigma_p)^j+z_2(\sigma_p)^j)\ \mathrm{tr}\ i_{M_2}(\chi_f^p(1)\otimes\sigma_f^p(-\tfrac{1}{2}),\widetilde{f}^p),
\end{aligned}
$$

où σ parcourt les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ qui sont non ramifiées en p et χ,ξ parcourent les caractères de Hecke de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ non ramifiés en p et où $\{z_1(\sigma_p),z_2(\sigma_p)\}$ est l'ensemble des valeurs propres de Hecke de σ_p.

(3) *$J_T^G(\widetilde{f}^G)$ est égal à*

$$
\begin{aligned}
&4 \sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi \\ \chi_{1,\mathbb{R}}=\chi_{2,\mathbb{R}}}} \chi_1(p)^j \chi_2(p)^j \chi(p)^j \\
&\quad\times\Bigg[(-1)^a \operatorname{tr} i_T(\chi_{1,f}^p(2) \otimes \chi_{2,f}^p(1) \otimes \chi_f^p(-\tfrac{3}{2}), \widetilde{f}^p) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} p^j \operatorname{tr} i_T(\chi_{1,f}^{p,q}(2) \otimes \chi_{2,f}^{p,q}(-1) \otimes \chi_f^{p,q}(-\tfrac{1}{2}), f^{p,q}) \\
&\qquad \times \sum_{X_q} f_{T,q}(\chi_{1,q} \otimes \chi_{2,q} \otimes \chi_q, X_q)\, \mathrm{e}^{-(x_1+x_2)/2-3|x_1-x_2|/2} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} i_T(\chi_{1,f}^{p,q}(1) \otimes \chi_{2,f}^{p,q}(2) \otimes \chi_f^{p,q}(-\tfrac{3}{2}), f^{p,q}) \\
&\qquad \times \sum_{X_q} f_{T,q}(\chi_{1,q} \otimes \chi_{2,q} \otimes \chi_q, X_q)\, \mathrm{e}^{-3(x_1+x_2)/2+|x_1-x_2|/2}\Bigg],
\end{aligned}
$$

où χ_1, χ_2, χ parcourent les caractères de Hecke de $\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ non ramifiés en p, avec $\chi_{1,\mathbb{R}} = \chi_{2,\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^a$, $a \in \{0,1\}$, où X^p parcourt $\mathfrak{a}_{T,f}^p$ et où $(x_1,x_2) = s(X^p)$.
(b)

$$
T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^H) = J_H^H(\widetilde{f}^H) + \tfrac{1}{2} J_{L_1}^H(\widetilde{f}^H) + \tfrac{1}{2} J_{L_2}^H(\widetilde{f}^H) + \tfrac{1}{4} J_S^H(\widetilde{f}^H)
$$

où on a posé $\widetilde{f}^H = f_{\mathbb{R}}^H \widetilde{h}$, avec $\widetilde{h}^p = h^{p,q} b^H(f_q)$ et $\widetilde{h} = \widetilde{h}^p b_j^H(\varphi_j)$, et où les $J_L^H(\widetilde{f}^H)$ se calculent comme suit.

(1) *$J_{L_1}^H(\widetilde{f}^H)$ est égal à*

$$
\begin{aligned}
&-2 \sum_{\substack{\sigma,\chi',\chi'' \\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_1 \\ \chi'_{\mathbb{R}}=\chi''_{\mathbb{R}}}} \Bigg[\chi'(p)^j \operatorname{tr} i_{L_1}(\sigma_f^p \otimes \chi_f'^p(\tfrac{3}{2}) \otimes \chi_f''^p(-\tfrac{3}{2}), \widetilde{h}^p) \\
&\qquad - \tfrac{1}{2} p^{3j/2} (z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j) \operatorname{tr} i_{L_1}(\sigma_f^{p,q} \otimes \chi_f'^{p,q}(\tfrac{3}{2}) \\
&\qquad \otimes \chi_f''^{p,q}(-\tfrac{3}{2}), h^{p,q}) \sum_{Y_q} h_{L_1,q}(\sigma_q \otimes \chi'_q \otimes \chi''_q, Y_q)\, \mathrm{e}^{-3|y|}\Bigg],
\end{aligned}
$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$+2 \sum_{\substack{\xi,\chi',\chi'' \\ \chi'_{\mathbb{R}}=\chi''_{\mathbb{R}}}} \Big[\chi'(p)^j \ \mathrm{tr}\ i_{L_1}((\xi_f^p \circ \det) \otimes \chi_f'^p(\tfrac{3}{2}) \otimes \chi_f''^p(-\tfrac{3}{2}), \widetilde{h}^p)$$

$$- \tfrac{1}{2}p^j(1+p^j)\xi(p)^j \ \mathrm{tr}\ i_{L_1}((\xi_f^{p,q} \circ \det) \otimes \chi_f'^{p,q}(\tfrac{3}{2})$$

$$\otimes \chi_f''^{p,q}(-\tfrac{3}{2}), h^{p,q}) \sum_{Y_q} h_{L_1,q}((\xi_q \circ \det) \otimes \chi'_q \otimes \chi''_q, Y_q)\ \mathrm{e}^{-3|y|}\Big],$$

$$+2 \sum_{\substack{\sigma,\chi',\chi'' \\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_3(-1) \\ \chi'_{\mathbb{R}}=\chi''_{\mathbb{R}}}} \Big[p^j\chi'(p)^j \ \mathrm{tr}\ i_{L_1}(\sigma_f^p \otimes \chi_f'^p(\tfrac{1}{2}) \otimes \chi_f''^p(-\tfrac{1}{2}), \widetilde{h}^p)$$

$$- \tfrac{1}{2}p^{3j/2}(z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j) \ \mathrm{tr}\ i_{L_1}(\sigma_f^{p,q} \otimes \chi_f'^{p,q}(\tfrac{1}{2})$$

$$\otimes \chi_f''^{p,q}(-\tfrac{1}{2}), h^{p,q}) \sum_{Y_q} h_{L_1,q}(\sigma_q \otimes \chi'_q \otimes \chi''_q, Y_q)\ \mathrm{e}^{-|y|}\Big],$$

où σ parcourt les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ qui sont non ramifiées en p, χ',χ'' parcourent les caractères de Hecke de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ non ramifiés en p tels que $\omega_\sigma = \chi'\chi''$ et Y^p parcourt $\mathfrak{a}_{L_{1,f}}^p$ et où $\{z_1(\sigma_p), z_2(\sigma_p)\}$ est l'ensemble des valeurs propres de Hecke de σ_p, où ω_σ est le caractère central de σ et où $(y,-y) = s(Y^p)$.

(2) *La formule pour $J_{L_2}^H(\widetilde{f}^H)$ se déduit de celle pour $J_{L_1}^H(\widetilde{f}^H)$ en remplaçant L_1 par L_2, $(y,-y)$ par (y,y) et en permutant σ_f^p (resp. $\xi_f^p\circ\det$) avec $\chi_f'^p(\lambda)\otimes\chi_f''^p(-\lambda)$ $(\lambda = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.*

(3) *$J_S^H(\widetilde{f}^H)$ est égal à*

$$- 4 \sum_{\substack{\chi'_1,\chi''_1,\chi'_2,\chi''_2 \\ \chi'_{1,\mathbb{R}}=\chi''_{1,\mathbb{R}} \\ \chi'_{2,\mathbb{R}}=\chi''_{2,\mathbb{R}}}} \chi'_1(p)^j \ \mathrm{tr}\ i_S(\chi'^{p,q}_{1,f}(2) \otimes \chi''^{p,q}_{1,f}(-2) \otimes \chi'^{p,q}_{2,f}(1) \otimes \chi''^{p,q}_{2,f}(-1), h^{p,q})$$

$$\times \sum_{Y_q} h_{S,q}(\chi'_{1,f,q} \otimes \chi''_{1,f,q} \otimes \chi'_{2,f,q} \otimes \chi''_{2,f,q}, Y_q)\ \mathrm{e}^{-3(y_1+y_2)/2-|y_1-y_2|/2}$$

$$+ 4 \sum_{\substack{\chi'_1,\chi''_1,\chi'_2,\chi''_2 \\ \chi'_{1,\mathbb{R}}=\chi''_{1,\mathbb{R}} \\ \chi'_{2,\mathbb{R}}=\chi''_{2,\mathbb{R}}}} p^j\chi'_1(p)^j \ \mathrm{tr}\ i_S(\chi'^{p,q}_{1,f}(2) \otimes \chi''^{p,q}_{1,f}(-2) \otimes \chi'^{p,q}_{2,f}(-1)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$\otimes\, \chi''^{p,q}_{2,f}(1), h^{p,q}) \sum_{Y_q} h_{S,q}(\chi'_{1,f,q} \otimes \chi''_{1,f,q} \otimes \chi'_{2,f,q} \otimes \chi''_{2,f,q}, Y_q)$$

$$\times\, \mathrm{e}^{-(y_1+y_2)/2-3|y_1-y_2|/2},$$

où $\chi'_1, \chi''_1, \chi'_2, \chi''_2$ parcourent les caractères de Hecke de $\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times$ non ramifiés en p tels que $\chi'_1\chi''_1 = \chi'_2\chi''_2$ et Y^p parcourt $\mathfrak{a}^p_{S,f}$ et où $(y_1, y_2) = s(Y^p)$.

Preuve. Nous nous contenterons de donner la preuve de la formule (a)(1), les preuves des autres formules étant similaires.

Soit $\pi = \sigma \otimes \chi$ une représentation dans $\Pi_{\text{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{A}))$ qui est non ramifiée en p et q. Tout d'abord, on remarque que, si $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1$ ou $\sigma_3(-1)$, alors σ est nécessairement automorphe cuspidale et que, si $\sigma_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^a \circ \det$, $a \in \{0, 1\}$, alors σ est nécessairement de la forme $\xi \circ \det$ pour un caractère de Hecke ξ de $\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times$. Puis, on remarque que, pour $\nu \in W \cdot \mu$, on a

$$\nu(t_{\sigma_p \otimes \chi_p}) = \begin{cases} z_1(\sigma_p) z_2(\sigma_p) \chi(p) & \text{si } \nu = (1,1,0,0) \\ z_1(\sigma_p)\chi(p) & \text{si } \nu = (1,0,1,0) \\ z_2(\sigma_p)\chi(p) & \text{si } \nu = (0,1,0,1) \\ \chi(p) & \text{si } \nu = (0,0,1,1). \end{cases}$$

Maintenant, compte tenu de ces remarques, il ne reste plus qu'à combiner le Théorème (5.3)(a) et le Théorème (5.5)(i) pour obtenir la formule cherchée pour $J^G_{M_1}(\widetilde{f}^G)$. □

Terminons ce paragraphe par quelques considérations sur les expressions $J^G_G(\widetilde{f}^G)$ et $J^H_H(\widetilde{f}^H)$.

D'après Vogan (cf. [Vo 2] Sect. 6), il y a, à équivalence près, exactement douze représentations standard

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$$

de $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) = \{\pm 1\} \backslash \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ admettant le même caractère infinitésimal que la représentation triviale et, donc, à équivalence près, il y a exactement douze représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ ayant même caractère infinitésimal que la représentation triviale, à savoir les quotients de Langlands

$$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H}, \overline{I}, \overline{J}, \overline{K}, \overline{L}$$

correspondants. Parmi ces douze représentations admissibles irréductibles, seules

$$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{L}$$

sont unitaires. Les représentations $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$, $C = \overline{C}$ et $D = \overline{D}$ sont de la série discrète alors que $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}, \overline{L}$ sont non tempérées. La représentation $\overline{L}$ est la représentation triviale. Dans le groupe de Grothendieck adéquat, on a

$$\begin{aligned} \overline{E} &= E - (A+B), \\ \overline{F} &= F - (B+C), \\ \overline{G} &= G - (C+D) \end{aligned}$$

et

$$\overline{L} = L - (H+I+J) + (E+F+G) - (A+B+C+D).$$

Pour le groupe $\mathbb{R}^\times \backslash \mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})$ qui a deux composantes connexes et dont la composante neutre est $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$, il y a, à équivalence près, exactement sept représentations irréductibles unitaires

$$\pi^{\mathrm{H}}, \pi^{\mathrm{W}}, \pi^1, \pi^{2,\pm}, c^{\pm}$$

ayant même caractère infinitésimal que la représentation triviale. On a

$$\begin{aligned} \pi^{\mathrm{H}} | \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) &= A + D, \\ \pi^{\mathrm{W}} | \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) &= B + C \end{aligned}$$

et les représentations π^{H} et π^{W} sont de la série discrète; en fait on a

$$\{\pi^{\mathrm{H}}, \pi^{\mathrm{W}}\} = \{\pi', \pi''\}$$

(cf. (2.4)). On a

$$\pi^1 | \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) = \overline{E} + \overline{G},$$

$$\pi^{2,\pm} | \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) = \overline{F}$$

et

$$\pi^{2,-} = (\mathrm{sgn} \circ c) \pi^{2,+};$$

en fait, pour $\mu = (0,0;0)$, on a $\pi^1 = \pi^1_\mu$ et $\pi^{2,\pm} = \pi^{2,\pm}_\mu$ avec les notations de [Ta] Section 1, de sorte que

$$h^{p,q}(\mathfrak{g}, K'_{\mathbb{R}}; \pi^1) = \begin{cases} 1 & \text{si } (p,q) = (2,0), (0,2), (3,1) \text{ ou } (1,3) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$h^{p,q}(\mathfrak{g}, K'_{\mathbb{R}}; \pi^{2,\pm}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (p,q) = (1,1) \text{ ou } (2,2) \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{C})$. On a

$$c^{\pm}|\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) = \overline{L}$$

et, en fait, c^{+} est le caractère trivial de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})$ et $c^{-} = \mathrm{sgn} \circ c$.

LEMME (5.10). *A équivalence près, les seules représentations irréductibles unitaires π de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})$ telles que*

$$\mathrm{tr}\, \pi(f_{\mathbb{R}}^{G}) \neq 0$$

sont les sept représentations π^{H}, π^{W}, π^{1}, $\pi^{2,\pm}$ et $c^{\pm}$ ci-dessus. De plus, on a

$$\mathrm{tr}\, \pi^{\mathrm{H}}(f_{\mathbb{R}}^{G}) = \mathrm{tr}\, \pi^{\mathrm{W}}(f_{\mathbb{R}}^{G}) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\mathrm{tr}\, \pi^{1}(f_{\mathbb{R}}^{G}) = 1,$$

$$\mathrm{tr}\, \pi^{2,\pm}(f_{\mathbb{R}}^{G}) = \tfrac{1}{2}$$

et

$$\mathrm{tr}\, c^{\pm}(f_{\mathbb{R}}^{G}) = 1.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que l'on peut prendre $f_{\mathbb{R}}^{G}$ de la forme

$$f_{\mathbb{R}}^{G} = \begin{cases} (-1)^{3}(f_A + f_B + f_C + f_D)/4 \text{ sur } \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) \\ 0 \text{ sur } (\mathbb{R}_{+}^{\times} \backslash \mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})) - \mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}) \end{cases}$$

où f_A, f_B, f_C, f_D sont des pseudo-coefficients très cuspidaux dans $\mathcal{H}(\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R}))$ de A, B, C, D respectivement (cf. [Lab 2]) et de remarquer que

$$\mathrm{tr}\, \rho(f_X) = 0 \quad (\forall X = A, B, C, D)$$

pour toute représentation standard ρ de $\mathrm{PSp}(4, \mathbb{R})$ avec $\rho \neq A, B, C, D$ à équivalence près. □

PROPOSITION (5.11). (a) *Pour toute fonction $f^{p} \in C_{c}^{\infty}(G(\mathbb{A}_{f}^{p}))$ et tout entier $j > 0$, on a*

$$\begin{aligned} &J_{G}^{G}(f_{\mathbb{R}}^{G} f^{p} b_{j}^{G}(\varphi_j)) \\ &\quad = \sum_{\pi} m_{\mathrm{disc}}^{G}(\pi)\varepsilon(\pi_{\mathbb{R}}) p^{3j/2}(z_1(\pi_p)^j + z_2(\pi_p)^j + z_3(\pi_p)^j + z_4(\pi_p)^j)\ \mathrm{tr}\, \pi_{f}^{p}(f^{p}), \end{aligned}$$

où π *parcourt les représentations dans* $\Pi_{\mathrm{disc}}(\mathbb{R}_+^\times \mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{A}))$ *qui sont non ramifiées en* p*, où*

$$\varepsilon(\pi_{\mathbb{R}}) = -\tfrac{1}{2}\,(\textit{resp.}\ 1,\ \textit{resp.}\ \tfrac{1}{2})$$

si $\pi_{\mathbb{R}}$ *est équivalente à* π^{H} *ou* π^{W} (resp. π^1 *ou* $c^\pm$, resp. $\pi^{2,\pm}$) *et* $\varepsilon(\pi_{\mathbb{R}}) = 0$ *dans tous les autres cas et où*

$$t_{\pi_p} = \mathrm{diag}(z_1(\pi_p), z_2(\pi_p), z_3(\pi_p), z_4(\pi_p)) \in \widehat{T}$$

est le paramètre de Langlands de π_p*.*

(b) *Pour toute fonction* $h^p \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{A}_f^p))$ *et tout entier* $j > 0$*, on a*

$$\begin{aligned} J_H^H(f_{\mathbb{R}}^H h^p b_j^H(\varphi_j)) = &- \sum_{\substack{\rho_1,\rho_2 \\ \rho_{1,\mathbb{R}}=\sigma_3(-1) \\ \rho_{2,\mathbb{R}}=\sigma_1}} p^{3j/2}[(z'(\rho_{1,p})^j + z''(\rho_{1,p})^j) \\ &- (z'(\rho_{2,p})^j + z''(\rho_{2,p})^j)]\ \mathrm{tr}(\rho_{1,f}^p \otimes \rho_{2,f}^p)(h^p + h^p\circ\iota) \\ &+ \sum_{\substack{\rho_1,\xi_2 \\ \rho_{1,\mathbb{R}}=\sigma_3(-1)}} [p^{3j/2}(z'(\rho_{1,p})^j + z''(\rho_{1,p})^j) \\ &- p^j(1+p^j)\xi_2(p)^j]\ \mathrm{tr}(\rho_{1,f}^p \otimes \xi_{2,f}^p \circ \det)(h^p + h^p\circ\iota) \end{aligned}$$

où ρ_1, ρ_2 *parcourent les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de* $\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *non ramifiées en* p*, où* ξ_2 *parcourt les caractères de Hecke de* $\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ *non ramifiés en* p*, où* $\omega_{\rho_1} = \omega_{\rho_2}$ *dans la première somme et* $\omega_{\rho_2} = \xi_2^2$ *dans la seconde,* ω_ρ *étant le caractère central de* ρ*, où* $\{z'(\pi_p), z''(\pi_p)\}$ *est l'ensemble des valeurs propres de Hecke de* ρ_p *et où* $\iota\colon H \to H$ *est l'involution qui échange les deux facteurs* $\mathrm{GL}(2)$. □

6. Stabilisation des termes paraboliques

Pour formuler agréablement les résultats de ce paragraphe, nous aurons besoin de quelques rappels.

Si $\chi\colon \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ est un caractère de Hecke tel que $\chi_{\mathbb{R}} = \mathrm{sgn}^a|\ |^n$ pour un $a \in \{0,1\}$ et un $n \in \mathbb{Z}$, la théorie du corps de classes abélien associe à χ un corps de nombres $E(\chi) \subset \mathbb{C}$ tel que $\chi(\mathbb{A}_f^\times) \subset E(\chi)^\times$ et, pour chaque place finie λ de $E(\chi)$, une représentation λ-adique $V_\lambda(\chi)$, de dimension 1 et pure de poids $-2n$, de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Si χ est non ramifié en un nombre premier p et si λ ne divise pas p, $V_\lambda(\chi)$ est non ramifiée en p et

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j, V_\lambda(\chi)) = \chi(p)^j \quad (\forall j \in \mathbb{Z}).$$

Par exemple, on a $E(|\,|^{-1}) = \mathbb{Q}$ et $V_\ell(|\,|^{-1}) = \mathbb{Q}_\ell(1)$. Bien sûr, si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de Hecke comme ci-dessus, $E(\chi_1\chi_2)$ est contenu dans le composé E de $E(\chi_1)$ et $E(\chi_2)$ dans $\mathbb{C}$ et, quitte à étendre les scalaires à E, on a

$$V_\lambda(\chi_1\chi_2) = V_\lambda(\chi_1) \otimes_{E_\lambda} V_\lambda(\chi_2)$$

pour toute place finie λ de E.

Si σ est une représentation automorphe cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ telle que

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_n^\vee = \sigma_n \det{}^{\otimes(1-n)} = \sigma_n(1-n)$$

pour un entier $n \geqslant 1$ (on a $\sigma_n(\mathrm{sgn} \circ \det) \cong \sigma_n$), Eichler, Shimura et Deligne ont associé à σ un corps de nombres $E(\sigma) \subset \mathbb{C}$ tel que σ_f soit défini sur $E(\sigma)$ (cf. [Wa 2]) et, pour toute place finie λ de $E(\sigma)$ une représentation λ-adique $V_\lambda(\sigma)$, de dimension 2 et pure de poids n, de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Si σ est non ramifiée en un nombre premier p et si λ ne divise pas p, $V_\lambda(\sigma)$ est non ramifiée en p et on a

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j, V_\lambda(\sigma)) = p^{j/2}(z_1(\sigma_p)^j + z_2(\sigma_p)^j) \in E(\sigma) \quad (\forall j \in \mathbb{Z}),$$

où $\{z_1(\sigma_p), z_2(\sigma_p)\}$ est l'ensemble des valeurs propres de Hecke de σ_p (cf. [De]). Si ω_σ est le caractère central de σ, on a $E(\omega_\sigma) \subset E(\sigma)$ et, quitte à étendre les scalaires à $E(\sigma)$, on a

$$V_\lambda(\omega_\sigma) \cong (\Lambda^2 V_\lambda(\sigma))(1),$$

pour toute place finie λ de $E(\sigma)$. Si χ est un caractère de Hecke de $\mathbb{R}^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ et si E est le composé de $E(\chi)$ et $E(\sigma)$ dans $\mathbb{C}$, on a $E((\chi \circ \det)\sigma) \subset E$ et, quitte à étendre les scalaires à E, on a

$$V_\lambda((\chi \circ \det)\sigma) \cong V_\lambda(\chi) \otimes V_\lambda(\sigma),$$

pour toute place finie λ de E.

Maintenant, pour chaque place finie λ d'un corps de nombres assez grand $E \subset \mathbb{C}$, introduisons les $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f)//K)$-modules virtuels suivants:

$$\begin{aligned} W_{1,\lambda} = & \sum_{\substack{\sigma,\chi \\ \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1^\vee}} V_\lambda(\omega_\sigma\chi) \otimes j_{M_1}(\sigma_f(3) \otimes \chi_f(-3))^K \\ & - \sum_{\xi,\chi} V_\lambda(\xi^2\chi) \otimes j_{M_1}((\xi_f \circ \det)(3) \otimes \chi_f(-3))^K \\ & - \sum_{\substack{\sigma,\chi \\ \sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_3^\vee}} V_\lambda(\omega_\sigma\chi)(1) \otimes j_{M_1}(\sigma_f(3) \otimes \chi_f(-2))^K, \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}W_{2,\lambda} = & \sum_{\substack{\chi,\sigma \\ \chi_{\mathbb{R}}=1 \\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_1^\vee}} V_\lambda((\chi\circ\det)\sigma)\otimes j_{M_2}(\chi_f(4)\otimes\sigma_f(-2))^K \\ & - \sum_{\substack{\chi,\xi \\ \chi_{\mathbb{R}}=1}} (V_\lambda(\chi\xi)+V_\lambda(\chi\xi)(-1))\otimes j_{M_2}(\chi_f(4)\otimes(\xi_f\circ\det)(-2))^K \\ & - \sum_{\substack{\chi,\sigma \\ \chi_{\mathbb{R}}=\mathrm{sgn} \\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_2^\vee}} V_\lambda((\chi\circ\det)\sigma)\otimes j_{M_2}(\chi_f(3)\otimes\sigma_f(-1))^K\end{aligned}$$

et

$$W_{3,\lambda} = \sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi \\ \chi_{1,\mathbb{R}}=\chi_{2,\mathbb{R}}=1}} V_\lambda(\chi_1\chi_2\chi)\otimes j_T(\chi_{1,f}(4)\otimes\chi_{2,f}(2)\otimes\chi_f(-3))^K,$$

où σ parcourt les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$, où χ, ξ, χ_1 et χ_2 parcourent les caractères de Hecke de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ et où, pour tout $M\in\mathcal{L}$, tout $P\in\mathcal{P}(M)$ et tout $M(\mathbb{A}_f)$-module π_f, on a noté

$$j_M(\pi_f) = i_M(\delta_{P,f}^{-1/2}\pi_f)$$

le $G(\mathbb{A}_f)$-module virtuel associé à la représentation induite non normalisée

$$\mathcal{J}_P(\pi_f) = \mathcal{I}_P(\delta_{P,f}^{-1/2}\pi_f).$$

Plus précisément, il n'y a qu'un nombre fini de σ, χ, ξ, χ_1 et χ_2 tels que les induites correspondantes $j_M(\pi_f)$ qui apparaissent dans les formules ci-dessus aient des vecteurs fixes par K non nuls. On prend alors pour E le composé

$$E = E(K)\subset\mathbb{C}$$

de tous les corps $E(\sigma)$, $E(\chi)$, $E(\xi)$, $E(\chi_1)$ et $E(\chi_2)$ pour ces σ, χ, ξ, χ_1 et χ_2 là et on utilise les E-structures de σ_f, χ_f, ξ_f, $\chi_{1,f}$ et $\chi_{2,f}$ dans la définition des $W_{1,\lambda}$, $W_{2,\lambda}$ et $W_{3,\lambda}$.

Pour toute place finie λ du corps de nombres $E\subset\mathbb{C}$ ci-dessus, on posera

$$W_\lambda = W_\ell\otimes_{\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda = \sum_{i=0}^{6}(-1)^i H_c^i(S_K\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}, E_\lambda),$$

où ℓ est la caractéristique de λ, et

$$\overline{W}_\lambda = W_\lambda - (W_{1,\lambda} + W_{2,\lambda} + W_{3,\lambda}). \tag{6.1}$$

Il est facile de voir que, pour toute fonction $f^p \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)_{\mathbb{Q}}$ et tout entier j, on a

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p, W_\lambda),\ \mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f^p, \overline{W}_\lambda) \in E \subset \mathbb{C}$$

(si $j \geqslant j(f^p)$, cela résulte du Corollaire (1.3)). Le résultat principal de cet article est alors:

THÉORÈME (6.2). *Pour toute place finie λ du corps de nombres E ci-dessus, pour tout nombre premier p, distinct de la caractérisitique ℓ de λ et qui est bon pour K, pour toute fonction $f^p \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^p)//K^p)_{\mathbb{Q}}$ et pour tout entier $j > 0$, on a*

$$\mathrm{tr}(\Phi_j^p \times f^p, \overline{W}_\lambda) = J_G^G(f_{\mathbb{R}}^G f^p b_j^G(\varphi_j)) - \tfrac{1}{4} J_H^H(f_{\mathbb{R}}^H h^p b_j^H(\varphi_j)),$$

le second membre étant explicité dans la Proposition (5.11).

Preuve. Fixons $p \neq q$, $f_{\mathbb{R}}^G$, $f_{\mathbb{R}}^H$, $f^{p,q}$ et $h^{p,q}$ comme dans les Théorèmes (5.3) et (5.9), en imposant de plus que $f^{p,q} \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^{p,q})//K^{p,q})_{\mathbb{Q}}$. D'après le Théorème (5.9), on une constante D. Fixons une place finie de E de caractéristique ℓ distincte de p. Alors, si on rassemble les résultats obtenus jusqu'à présent (Corollaire (1.3), Formules (2.2) et (2.11), Lemmes (3.1), (3.4) et (3.5) et le Théorème (5.9)), on obtient que, pour toute fonction $f_q \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)_{\mathbb{Q}}$ et tout entier $j > 0$ tels que

$$j \geqslant j(f^{p,q} f_q)$$

(cf. Corollaire (1.3)) et que

$$\begin{cases} |\alpha(\mu)| \log q > D, & \forall \alpha \in \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}, \quad \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee) \\ j > \dfrac{D + |\alpha(\mu)| \log q}{\log p}, & \forall \alpha \in R, \quad \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee), \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\Phi_p^j \times f'^p, W_\ell) = {} & [J_G^G(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{4} J_H^H(\widetilde{f}^H)] \\ & + [\tfrac{1}{2} J_{M_1}^G(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{8}(J_{L_1}^H(\widetilde{f}^H) + J_{L_2}^H(\widetilde{f}^H)] + \tfrac{1}{2} J_{M_2}^G(\widetilde{f}^G)) \\ & + [\tfrac{1}{8} J_T^G(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{16} J_S^H(\widetilde{f}^H)], \end{aligned}$$

où $\widetilde{f}^p = f^{p,q} f_q$, $\widetilde{f}^G = f_{\mathbb{R}}^G \widetilde{f}^p b_j^G(\varphi_j)$, $\widetilde{h}^p = h^{p,q} b^H(f_q)$ et $\widetilde{f}^H = f_{\mathbb{R}}^H \widetilde{h}^p b_j^H(\varphi_j)$ et où les $J_M^G(\widetilde{f}^G)$ et les $J_L^H(\widetilde{f}^H)$ sont explicités dans l'énoncé (5.11).

Maintenant, il est facile de stabiliser les termes paraboliques dans le membre de droite de la formule ci-dessus.

Le groupe endoscopique H_M de $M = M_1$ (resp. M_1', resp. T) déduit de H par descente n'est autre que le sous-groupe de Levi $L = L_2$ (resp. L_1, resp. S) de H, identifié à M_1 (resp. M_1', resp. T) par

$$(\mathrm{diag}(t', t''), g) \mapsto (A = t'g, \lambda = t't'' \det g)$$

(resp.

$$(g, \mathrm{diag}(t', t'')) \mapsto \dot{s}_{\alpha_2}(A = gt', \lambda = t't'' \det g)\dot{s}_{\alpha_2}^{-1},$$

resp.

$$(\mathrm{diag}(t_1', t_1''),\ \mathrm{diag}(t_2', t_2'')) \mapsto \mathrm{diag}(t_1't_2', t_1't_2'', t_1''t_2', t_1''t_2'')).$$

Par suite, compte tenu de notre normalisation des facteurs de transfert, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\, i_{L_2}(\chi_f'^{p,q}(\lambda) \otimes \chi_f''^{p,q}(-\lambda) \otimes \sigma_f^{p,q}, h^{p,q})\\ &\quad = \mathrm{tr}\, i_{M_1}(\sigma_f^{p,q}(\chi_f''^{p,q} \circ \det)^{-1}(\lambda) \otimes \chi_f''^{p,q}(-\lambda), f^{p,q})\end{aligned}$$

et

$$h_{L_2,q}(\chi_{f,q}' \otimes \chi_{f,q}'' \otimes \sigma_{f,q}, X_q) = f_{M_1,q}(\sigma_{f,q}(\chi_{f,q}'' \circ \det)^{-1} \otimes \chi_{f,q}'', X_q)$$

pour tous $\chi_f'^p, \chi_f''^p, \sigma_f^p$ avec $\chi_f'^p\chi_f''^p = \omega_{\sigma_f^p}$ et tous $\Lambda = (\lambda, \lambda) \in (\mathfrak{a}_{L_2}^H)_{\mathbb{C}}^* = (\mathfrak{a}_{M_1}^G)_{\mathbb{C}}^*$ et $X_q \in \mathfrak{a}_{L_2,q}^H = \mathfrak{a}_{M_1,q}^G$ resp.

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\, i_{L_1}(\sigma_f^{p,q} \otimes \chi_f'^{p,q}(\lambda) \otimes \chi_f''^{p,q}(-\lambda), h^{p,q})\\ &\quad = \mathrm{tr}\, i_{M_1'}(\sigma_f^{p,q}(\chi_f''^{p,q} \circ \det)^{-1}(\lambda) \otimes \chi_f''^{p,q}(-\lambda), f^{p,q}\end{aligned}$$

et

$$h_{L_1,q}(\chi_{f,q}'' \otimes \sigma_{f,q} \otimes \chi_{f,q}', X_q) = f_{M_1',q}(\sigma_{f,q}(\chi_{f,q}'' \circ \det)^{-1} \otimes \chi_{f,q}'', X_q)$$

pour tous $\sigma_f^p, \chi_f'^p, \chi_f''^p$ avec $\omega_{\sigma_f^p} = \chi_f'^p\chi_f''^p$ et tous $\Lambda = (\lambda, -\lambda) \in (\mathfrak{a}_{L_1}^H)_{\mathbb{C}}^* = (\mathfrak{a}_{M_1'}^G)_{\mathbb{C}}^*$ et $X_q \in \mathfrak{a}_{L_1,q}^H = \mathfrak{a}_{M_1',q}^G$, resp.

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\, i_S\left(\chi_{1,f}'^{p,q}\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right) \otimes \chi_{1,f}''^{p,q}\left(-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)\right.\\ &\quad \left.\otimes\ \chi_{2,f}'^{p,q}\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right) \otimes \chi_{2,f}''^{p,q}\left(-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right), f^{p,q}\right)\\ &= \mathrm{tr}\, i_T\left(\chi_{2,f}'^{p,q}(\chi_{1,f}''^{p,q})^{-1}(\lambda_1) \otimes \chi_{2,f}''^{p,q}(\chi_{1,f}''^{p,q})^{-1}(\lambda_2)\right.\\ &\quad \left.\otimes\ \chi_{1,f}''^{p,q}\left(-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right), f^{p,q}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & h_{S,q}(\chi'_{1,q} \otimes \chi''_{1,q} \otimes \chi'_{2,q} \otimes \chi''_{2,q}, X_q) \\ & \quad = f_{T,q}(\chi'_{2,q}(\chi''_{1,q})^{-1} \otimes \chi''_{2,q}(\chi''_{1,q})^{-1} \otimes \chi''_{1,q}, X_q) \end{aligned}$$

pour tous $\chi'^{p}_{1,f}$, $\chi''^{p}_{1,f}$, $\chi'^{p}_{2,f}$, $\chi''^{p}_{2,f}$ avec $\chi'^{p}_{1,f}\chi''^{p}_{1,f} = \chi'^{p}_{2,f}\chi''^{p}_{2,f}$ et tous $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathfrak{a}^H_S)^*_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}^G_H)^*_{\mathbb{C}}$ et $X_q \in \mathfrak{a}^H_{S,q} = \mathfrak{a}^G_{T,q}$). L'argument est le suivant. D'après le Lemme 9.2 de [Ha 1] et un calcul similaire à celui de [Ha 1] Section 12 ou [She 1] (3.4), on voit que le terme constant de $\widetilde{h}^p$ le long de H_M est un transfert ordinaire du terme constant de $\widetilde{f}^p$ le long de M, i.e. ici que ces deux termes constants ont les mêmes intégrales orbitales puisque $H_M = M$ n'a pas d'endoscopie et que $\Delta^{M,p} \equiv 1$ vu les normalisations choisies; donc $\widetilde{h}^p_{H_M} = \widetilde{f}^p_M$ d'après le Théorème 10 de [H-C].

On en déduit que les termes en $\mathrm{e}^{-3|x|}$ et $\mathrm{e}^{-|x|}$ et ceux en $\mathrm{e}^{-3|y|}$ et $\mathrm{e}^{-|y|}$ dans l'expression

$$\tfrac{1}{2}J^G_{M_1}(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{8}(J^H_{L_1}(\widetilde{f}^H) + J^H_{L_2}(\widetilde{f}^H))$$

se simplifient pour $x = y$ et que les autres se regroupent. De même, on en déduit que les termes en

$$\mathrm{e}^{-(x_1+x_2)/2-3|x_1-x_2|/2}$$

et

$$\mathrm{e}^{-(y_1+y_2)/2-3|y_1-y_2|/2}$$

dans l'expression

$$\tfrac{1}{8}J^G_T(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{16}J^H_S(\widetilde{f}^H)$$

se simplifient pour $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, alors que ceux en

$$\mathrm{e}^{-3(x_1+x_2)/2+|x_1-x_2|/2}$$

et

$$\mathrm{e}^{-3(y_1+y_2)/2+|y_1-y_2|/2}$$

se regroupent pour $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ en termes en

$$\mathrm{e}^{-3(x_1+x_2)/2}(\mathrm{e}^{|x_1-x_2|/2} + \mathrm{e}^{-|x_1-x_2|/2}) = \mathrm{e}^{-x_1-2x_2} + \mathrm{e}^{-2x_1-x_2}$$

qui à leur tour se regroupent avec les termes restants de $J^G_T(\widetilde{f}^G)$.

Tout calcul fait, on obtient que

$$\tfrac{1}{2}J^G_{M_1}(\widetilde{f}^G) \;-\; \tfrac{1}{8}(J^H_{L_1}(\widetilde{f}^H) + J^H_{L_2}(\widetilde{f}^H)) = \operatorname{tr}(\Phi^j_p \times \widetilde{f}^p, W_{1,\lambda}),$$
$$\tfrac{1}{8}J^G_T(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{16}J^H_S(\widetilde{f}^H) = \operatorname{tr}(\Phi^j_p \times \widetilde{f}^p, W_{3,\lambda}),$$

et aussi, de manière plus directe, que

$$\tfrac{1}{2}J^G_{M_2}(\widetilde{f}^G) = \operatorname{tr}(\Phi^j_p \times \widetilde{f}^p, W_{2,\lambda}).$$

On a donc démontré la formule cherchée,

$$\operatorname{tr}(\Phi^j_p \times \widetilde{f}^p, \overline{W}_\lambda) = J^G_G(f^G_{\mathbb{R}}\widetilde{f}^p b^G_j(\varphi_j)) - \tfrac{1}{4}J^H_H(f^H_{\mathbb{R}}\widetilde{h}^p b^H_j(\varphi_j))$$

pour $\widetilde{f}^p = f^{p,q}f_q$, $\widetilde{h}^p = h^{p,q}b^H(f_q)$ et j satisfaisant les hypothèses restrictives du début de la preuve du théorème.

Fixons un plongement $\iota\colon E_\lambda \hookrightarrow \mathbb{C}$ qui induit l'identité sur E, alors la différence $\Delta(j, f_q)$ des deux membres de l'égalité cherchée garde un sens pour $f_q \in \mathcal{C}^\infty_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ arbitraire (i.e. non nécessairement à valeurs dans $\mathbb{Q}$). De plus, en considérant d'une part la décomposition isotypique de $\iota_*(\overline{W}_\lambda)$ en tant que $\mathcal{C}^\infty_c(G(\mathbb{A}_f)//K)$-module virtuel et d'autre part la forme des expressions $J^G_G(f_{\mathbb{R}}\widetilde{f}^p b^G_j(\varphi_j))$ et $J^H_H(f^H_{\mathbb{R}}\widetilde{h}^p b^H_j(\varphi_j))$ données dans la Proposition (5.9), on voit facilement que

$$\Delta(j, f_q) = \sum_{z,\widehat{t}} c(z,\widehat{t})z^j f^\vee_q(\widehat{t})$$

pour une certaine fonction $c\colon \mathbb{C}^\times \times (\widehat{T}/W) \to \mathbb{C}$ à support fini, quels que soient $j > 0$ et $f_q \in \mathcal{C}^\infty_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$.

Or, on a déjà démontré que

$$\Delta(j, f_q) = 0$$

si $f_q \in \mathcal{C}^\infty_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)_{\mathbb{Q}}$, si $j \geqslant j(f^{p,q}f_q)$ et si

$$\begin{cases} |\alpha(\mu)|\log q > D, & \forall\alpha \in \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}, \quad \forall\mu \in \operatorname{Supp}(f^\vee_q) \\ j > \dfrac{D + |\alpha(\mu)|\log q}{\log p}, & \forall\alpha \in R, \quad \forall\mu \in \operatorname{Supp}(f^\vee_q). \end{cases}$$

Par suite, dans un premier temps, on voit que

$$\sum_{\widehat{t}} c(z,\widehat{t})f^\vee_q(\widehat{t}) = 0$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$ et toute $f_q \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)_{\mathbb{Q}}$ telle que

$$|\alpha(\mu)| \log q > D$$

$(\forall \alpha \in \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}, \forall \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee))$, puis dans un deuxième temps, on voit que la fonction c est identiquement nulle, ce qu'il fallait démontrer. □

7. Quelques conséquences du calcul de la trace de W_ℓ

Considérons le corps de nombres $E = E(K) \subset \mathbb{C}$ introduit dans la Section 6, fixons une place finie λ de E de caractéristique ℓ et fixons un plongement $E_\lambda \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$ qui induit l'identité sur E, comme dans la preuve du Thérème (6.2). On a la décomposition isotypique

$$\iota_*(\overline{W}_\lambda) = \sum_{\Pi_f} \iota_*(\overline{W}_\lambda)(\Pi_f) \otimes \Pi_f^K$$

de $\iota_*(\overline{W}_\lambda)$ en tant que $\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)$-module, où Π_f parcourt les classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de $G(\mathbb{A}_f)$ qui ont des vecteurs fixes non nuls sous K et $\iota_*(\overline{W}_\lambda)(\Pi_f)$ est une représentation complexe (non continue) virtuelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Bien entendu, seul un nombre fini de Π_f donnent une contribution non nulle. Quitte à remplacer E_λ par une extension finie de E_λ dans $\mathbb{C}$, on peut supposer que, quel que soit Π_f, on a

$$\iota_*(\overline{W}_\lambda)(\Pi_f) = \iota_*(\overline{W}_\lambda(\Pi_f))$$

pour une représentation λ-adique virtuelle $\overline{W}_\lambda(\Pi_f)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

THÉORÈME (7.1). *Fixons une représentation irréductible admissible Π_f de $G(\mathbb{A}_f)$ telle que $\Pi_f^K \neq (0)$. Alors, on peut trouver un ensemble fini S de places finies de $\mathbb{Q}$ et une fonction $\widetilde{h}_S \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{Q}_S))$ ayant les propriétés suivantes:*

(i) *S contient toutes les 'mauvaises' places pour K et donc toutes les places finies de $\mathbb{Q}$ en lesquelles Π_f est ramifiée;*
(ii) *si $p \notin S \cup \{\ell\}$, $\overline{W}_\lambda(\Pi_f)$ est non ramifiée en p;*
(iii) *pour tout $p \notin S \cup \{\ell\}$ et tout entier j, on a*

$$\iota(\mathrm{tr}(\Phi_p^j, \overline{W}_\lambda(\Pi_f)))$$
$$= \left[\sum_{\pi_\mathbb{R}} m_{\mathrm{disc}}^G(\pi_\mathbb{R} \otimes \Pi_f)\varepsilon(\pi_\mathbb{R})\right] p^{3j/2}(z_1(\Pi_p)^j$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

$$+ z_2(\Pi_p)^j + z_3(\Pi_p)^j + z_4(\Pi_p)^j)$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\substack{\rho_1,\rho_2 \\ \rho_{1,\mathbb{R}}\cong\sigma_3(-1) \\ \rho_{2,\mathbb{R}}\cong\sigma_1}} \delta(\rho^S_{1,f} \otimes \rho^S_{2,f}, \Pi^S_f) \operatorname{tr}(\rho_{1,S} \otimes \rho_{2,S})(\widetilde{h}_S)$$

$$\times p^{3j/2}[(z'(\rho_{1,p})^j + z''(\rho_{1,p})^j) - (z'(\rho_{2,p})^j + z''(\rho_{2,p})^j)]$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{\substack{\rho_1,\xi_2 \\ \rho_{1,\mathbb{R}}\cong\sigma_3(-1)}} \delta(\rho^S_{1,f} \otimes (\xi^S_{2,f} \circ \det), \Pi^S_f) \operatorname{tr}(\rho_{1,S} \otimes (\xi_{2,S} \circ \det))(\widetilde{h}_S)$$

$$\times p^{3j/2}[(z'(\rho_{1,p})^j + z''(\rho_{1,p})^j) - p^j(1+p^j)\xi_2(p)^j]$$

avec les notations de la Proposition (5.11) *et où, pour toute représentation admissible irréductible $\rho^S_f = \prod_{q\notin S} \rho_q$ de $H(\mathbb{A}^S_f)$, on a posé*

$$\delta(\rho^S_f, \Pi^S_f) = 1$$

si, pour toute place finie $q \notin S$, ρ_q est non ramifiée et si le paramètre de Langlands de Π_q dans $\widehat{T} \subset \widehat{G}$ est l'image du paramètre de Langlands de ρ_q dans $\widehat{S} \subset \widehat{H}$ par le plongement η_0: $\widehat{H} \hookrightarrow \widehat{G}$, et on a posé

$$\delta(\rho^S_f, \Pi^S_f) = 0$$

sinon.

Preuve. Soit $\Pi^{(1)}_f, \ldots, \Pi^{(r)}_f$ (resp. $\Pi^{(r+1)}_f, \ldots, \Pi^{(r+s)}_f$) la liste finie des (classes d'équivalence de) représentations irréductibles admissibles Π'_f de $G(\mathbb{A}_f)$ telles que ${\Pi'_f}^K \neq (0)$ et que

$$\overline{W}_\lambda(\Pi'_f) \neq 0$$

(resp. que

$$\sum_{\pi_\mathbb{R}} m^G_{\text{disc}}(\pi_\mathbb{R} \otimes \Pi'_f)\varepsilon(\pi_\mathbb{R}) \neq 0).$$

On peut trouver $f \in \mathcal{C}^\infty_c(G(\mathbb{A}_f)//K)$ telle que

$$\operatorname{tr} \Pi_f(f) = 1$$

et que

$$\operatorname{tr} \Pi'_f(f) = 0$$

pour toute Π'_f dans la liste finie $\Pi_f^{(1)}, \dots, \Pi_f^{(r+s)}$ qui n'est pas isomorphe à la représentation Π_f. Alors, si T est un ensemble fini de places finies de $\mathbb{Q}$, contenant toutes les 'mauvaises' places pour K et assez grand, on a

$$f = f_T 1_{K^T},$$

où

$$K^T = \prod_{q \notin T} G(\mathbb{Z}_q),$$

et, pour toute fonction $g^T \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^T)//K^T)$, on a

$$\operatorname{tr} \Pi_f(f_T g^T) = \operatorname{tr} \Pi_f^T(g^T)$$

et

$$\operatorname{tr} \Pi'_f(f_T g^T) = 0$$

pour toute Π'_f dans la liste finie $\Pi_f^{(1)}, \dots, \Pi_f^{(r+s)}$ qui n'est pas isomorphe à la représentation Π_f.

Fixons un tel ensemble T et fixons un transfert ordinaire $h_T \in \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{Q}_T))$ de la fonction f_T (cf. (2.8.1)). Soit $\rho_f^{T,(1)}, \dots, \rho_f^{T,(t)}$ la liste finie des (classes d'équivalence de) représentations irréductibles admissibles ρ_f^T de $H(\mathbb{A}_f^T)$ qui admettent des vecteurs fixes non nuls sous $H(\widehat{\mathbb{Z}}^T)$ et pour lesquelles il existe une représentation

$$\rho_{\mathbb{R}} \in \{\sigma_3(-1) \otimes \sigma_1, \sigma_3(-1) \otimes \det, \sigma_3(-1) \otimes (\operatorname{sgn} \circ \det)\}$$

et une représentation irréductible admissible ρ_T de $H(\mathbb{Q}_T)$ telles que

$$\operatorname{tr} \rho_T(h_T + h_T \circ \iota) \neq 0$$

(cf. (5.11)(b)) et telles que la représentation

$$\rho_{\mathbb{R}} \otimes \rho_T \otimes \rho_f^T$$

de $H(\mathbb{A})$ intervienne avec une multiplicité non nulle dans $L^2(Z_H(\mathbb{R})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A}))$ (Z_H est le centre de H). Pour chaque place finie q de $\mathbb{Q}$, on a un homomorphisme de changement de base

$$b_q^H : \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_q)//G(\mathbb{Z}_q)) \to \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{Q}_q)//H(\mathbb{Z}_q)).$$

(cf. Sect. 4), d'où un homomorphisme

$$b^{H,T} = \bigotimes_{q\notin T} b_q^H : \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^T)//K^T) \to \mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbb{A}_f^T)//H(\widehat{\mathbb{Z}}^T)).$$

On a, par définition de $b^{H,T}$,

$$\operatorname{tr} \rho_f^T(b^{H,T}(g^T)) = \operatorname{tr} \Pi_f^T(g^T)$$

pour toute fonction $g^T \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^T)//K^T)$ et toute représentation irréductible admissible ρ_f^T de $H(\mathbb{A}_f^T)$ telle que $\delta(\rho_f^T, \Pi_f^T) = 1$. On peut donc trouver une fonction $g^T \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f^T)//K^T)$ telle que

$$\operatorname{tr} \Pi_f^T(g^T) = 1$$

et que

$$\operatorname{tr} \rho_f^T(b^{H,T}(g^T)) = 0$$

pour toute représentation ρ_f^T dans la liste finie $\rho_f^{T,(1)}, \ldots, \rho_f^{T,(t)}$ pour laquelle $\delta(\rho_f^T, \Pi_f^T) = 0$.

On prendra pour S n'importe quel ensemble fini de places finies de $\mathbb{Q}$, contenant T et assez grand pour que

$$g^T = g_{S-T}^T 1_{K^S}$$

et on posera

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_S &= h_T b_{S-T}^H(g_{S-T}^T) + h_T b_{S-T}^H(g_{S-T}^T) \circ \iota \\ &= (h_T + h_T \circ \iota) b_{S-T}^H(g_{S-T}^T), \end{aligned}$$

où bien entendu $b_{S-T}^H = \bigotimes_{q\in S-T} b_q^H$. Il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème (6.2) et la Proposition (5.11) aux fonctions

$$f^p = f_T g^{T\cup\{p\}}$$

et

$$h^p = h_T b_{S-T}^H(g_{S-T}^T) 1_{H(\widehat{\mathbb{Z}}^{T\cup\{p\}})},$$

quel que soit $p \notin S \cup \{\ell\}$, pour conclure. □

COROLLAIRE (7.2). *Fixons* Π_f, S *et* $\widetilde{h}_S$ *comme dans le théorème précédent. Notons*

$$R = R(S, \widetilde{h}_S, \Pi_f^S)$$

l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations irréductibles unitaires ρ *de* $H(\mathbb{A})$ *ayant les propriétés suivantes:*

(a) *ρ intervient avec une multiplicité non nulle dans $L^2(Z_H(\mathbb{R})H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A}))$,*
(b) $\rho_{\mathbb{R}} \in \{\sigma_3(-1) \otimes \sigma_1, \sigma_3(-1) \otimes \det, \sigma_3(-1) \otimes (\mathrm{sgn} \circ \det)\}$,
(c) $\mathrm{tr}\, \rho_S(\widetilde{h}_S) \neq 0$,
(d) $\delta(\rho_f^S, \Pi_f^S) = 1$.

Alors:

(i) *soit $R = \emptyset$ et, pour tout $p \notin S \cup \{\ell\}$ et tout entier j, on a*

$$\iota(\mathrm{tr}(\Phi_p^j, \overline{W}_\lambda(\Pi_f))) = \mu(\Pi_f)p^{3j/2}(z_1(\Pi_p)^j + z_2(\Pi_p)^j + z_3(\Pi_p)^j + z_4(\Pi_p)^j)$$

où on a posé

$$\mu(\Pi_f) = \sum_{\pi_{\mathbb{R}}} m_{\mathrm{disc}}^G(\pi_{\mathbb{R}} \otimes \Pi_f)\varepsilon(\pi_{\mathbb{R}});$$

(ii) *soit $R \neq \emptyset$ et, pour tout $p \notin S \cup \{\ell\}$ et tout entier j, on a*

$$\begin{aligned}\iota(\mathrm{tr}(\Phi_p^j, \overline{W}_\lambda(\Pi_f))) \;=\; &\sum_{\substack{\sigma \\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_3(-1)}} \mu_1(\Pi_f, \sigma)p^{3j/2}(z'(\sigma_p)^j + z''(\sigma_p)^j)\\ &+ \sum_{\substack{\sigma \\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_1}} \mu_2(\Pi_f, \sigma)p^{3j/2}(z'(\sigma_p)^j + z''(\sigma_p)^j)\\ &+ \sum_{\zeta} \mu_2(\Pi_f, \zeta \circ \det)p^j(1 + p^j)\zeta(p)^j,\end{aligned}$$

où σ parcourt les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales de $\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ non ramifiées hors de S et ζ parcourt les caractères $\mathbb{R}_+^\times \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ non ramifiés hors de S, où $\{z'(\sigma_p), z''(\sigma_p)\}$ est l'ensemble des valeurs propres de Hecke de σ_p et où les multiplicités $\mu_n(\Pi_f, \sigma)$ $(n = 1, 2)$ sont définies comme suit:

$$\mu_1(\Pi_f, \sigma) = \frac{|R_1(\sigma)|}{|R|}\mu(\Pi_f) + \frac{1}{4} \sum_{\rho \in R_1(\sigma)} \varepsilon(\rho_{\mathbb{R}})\, \mathrm{tr}\, \rho_S(\widetilde{h}_S)$$

et

$$\mu_2(\Pi_f, \sigma) = \frac{|R_2(\sigma)|}{|R|}\mu(\Pi_f) - \frac{1}{4} \sum_{\rho \in R_2(\sigma)} \varepsilon(\rho_{\mathbb{R}})\, \mathrm{tr}\, \rho_S(\widetilde{h}_S),$$

avec

$$R_1(\sigma) = \{\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \in R \mid \rho_1 \cong \sigma\},$$

$$R_2(\sigma) = \{\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \in R \mid \rho_2 \cong \sigma\}$$

et

$$\varepsilon(\rho_{\mathbb{R}}) = \begin{cases} 1 \text{ si } \rho_{\mathbb{R}} = \sigma_3(-1) \otimes \sigma_1 \\ -1 \text{ si } \rho_{\mathbb{R}} = \sigma_3(-1) \otimes (\mathrm{sgn}^{a_2} \circ \det) \quad (a_2 \in \{0,1\}). \end{cases} \qquad \square$$

Considérons maintenant les $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\mathbb{Q}}$-modules

$$H_!^i(S_K \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell) \quad (i \in \mathbb{Z}),$$

images des groupes de cohomologie à supports compacts dans les groupes de cohomologie ordinaire, et leurs semi-simplifiés, notés

$$W_{!,\ell}^i.$$

Pour E_λ une extension finie assez grande de $\mathbb{Q}_\ell$, munie d'un plongement ι dans $\mathbb{C}$, on définit les représentations λ-adiques semi-simples

$$W_{!,\lambda}^i(\Pi_f), \quad (i \in \mathbb{Z})$$

et la représentation λ-adique virtuelle

$$W_{!,\lambda}(\Pi_f) = \sum_i (-1)^i W_{!,\lambda}^i(\Pi_f),$$

quel que soit la classe d'équivalence Π_f de représentations irréductibles admissibles de $G(\mathbb{A}_f)$ ayant des vecteurs fixes non nuls sous K.

Le $\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\mathbb{Q}}$-module sous-jacent à $W_{!,\ell}^i$ n'est autre que

$$H_!^i(S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell.$$

Comme $H^i(S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) = (0)$ si $i \notin \{0,2,3,4\}$, on a $H_c^i(S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) = (0)$ si $i \notin \{2,3,4,6\}$ et donc $W_{!,\ell}^i = 0$ si $i \notin \{2,3,4\}$. De plus, d'après Grothendieck, on a un accouplement parfait

$$W_{!,\ell}^i \times W_{!,\ell}^{6-i} \to \mathbb{Q}_\ell(-3)$$

et, d'après Deligne, $W_{!,\ell}^i$ est pur de poids i en tant que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module. Bien entendu, les $W_{!,\lambda}^i(\Pi_f)$ ont des propriétés analogues.

D'après Borel, la cohomologie parabolique $H_!^*(S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$ contient la cohomologie cuspidale $H_{\mathrm{cusp}}^*(S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$ comme sous-$\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\mathbb{Q}}$-module et on a

$$H_{\mathrm{cusp}}^*(S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = \bigoplus_\pi m_{\mathrm{cusp}}^G(\pi) H^*(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}}'; \pi_{\mathbb{R}}) \otimes \pi_f^K,$$

où π parcourt les classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de $\mathbb{R}^\times\backslash G(\mathbb{A})$ et où $m^G_{\text{cusp}}(\pi)$ est la multiplicité de π dans la partie cuspidale

$$L^2_{\text{cusp}}(\mathbb{R}^\times G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})) \subset L^2(\mathbb{R}^\times G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})).$$

En particulier, si Π_f est une représentation irréductible admissible de $G(\mathbb{A}_f)$, on a

$$\begin{aligned} \dim_{E_\lambda} W^2_{!,\lambda}(\Pi_f) &= \dim_{E_\lambda} W^4_{!,\lambda}(\Pi_f) \\ &\geqslant (2m^G_{\text{cusp}}(\pi^1\otimes\Pi_f) + m^G_{\text{cusp}}(\pi^{2,+}\otimes\Pi_f) \\ &\quad + m^G_{\text{cusp}}(\pi^{2,-}\otimes\Pi_f)) \dim \Pi_f^K \end{aligned}$$

et

$$\dim_{E_\lambda} W^3_{!,\lambda}(\Pi_f) \geqslant 2(m^G_{\text{disc}}(\pi^{\mathrm{H}}\otimes\Pi_f) + m^G_{\text{disc}}(\pi^{\mathrm{W}}\otimes\Pi_f)) \dim \Pi_f^K$$

(on a $m^G_{\text{cusp}}(c^\pm\otimes\Pi_f) = 0$ d'après le théorème d'approximation forte et on a $m^G_{\text{cusp}}(\pi_{\mathbb{R}}\otimes\Pi_f) = m^G_{\text{disc}}(\pi_{\mathbb{R}}\otimes\Pi_f)$ dès que $\pi_{\mathbb{R}}$ est une représentation tempérée de $\mathbb{R}^\times\backslash G(\mathbb{R})$, cf. [Wal] Thm. 4.3).

DÉFINITION (7.3) (Piatetski–Shapiro). Soit π une représentation automorphe irréductible de $G(\mathbb{A})$, soit $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneq G$, et soit π^M une représentation automorphe irréductible de $M(\mathbb{A})$. On dira que π est associée à (M, π^M), si, pour presque tous les nombres premiers p pour lesquels π_p et π_p^M sont non ramifiées, π_p est l'unique sous-quotient irréductible non ramifié de

$$\mathcal{J}_P(\pi_p^M) = \mathcal{I}_P(\delta^{-1/2}_{P(\mathbb{Q}_p)}\pi_p^M),$$

où P est n'importe quel sous-groupe parabolique dans $\mathcal{P}(M)$.

DÉFINITION (7.4). Soit π une représentation automorphe irréductible de $G(\mathbb{A})$ et soit $\rho = \rho_1\otimes\rho_2$ une représentation automorphe irréductible de $H(\mathbb{A})$ (ρ_1 et ρ_2 sont donc des représentations automorphes irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ et $\omega_{\rho_1} = \omega_{\rho_2}$). On dira que π est associée à (H,ρ) si, pour presque tous les p pour lesquels π_p, $\rho_{1,p}$ et $\rho_{2,p}$ sont non ramifiées, le paramètre de Langlands de π_p dans $\widehat{T}\subset\widehat{G}$ est

$$\operatorname{diag}(z'(\rho_{1,p}), z'(\rho_{2,p}), z''(\rho_{2,p}), z''(\rho_{1,p}))$$

où $\operatorname{diag}(z'(\rho_{n,p}), z''(\rho_{n,p})) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ est le paramètre de Langlands de $\rho_{n,p}$ $(n = 1, 2)$.

THÉORÈME (7.5). *Soit π une représentation automorphe cuspidale irréductible de $G(\mathbb{A})$ avec $\pi_{\mathbb{R}} \in \{\pi^{\mathrm{H}}, \pi^{\mathrm{W}}, \pi^1, \pi^{2,\pm}\}$. Alors, une au moins des propriétés suivantes est satisfaite:*

(1) *π est associée à $(M_1, \sigma(3) \otimes \chi(-2))$ (resp. $(M_2, \chi(3) \otimes \sigma(-1))$), où σ est une représentation automorphe cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ avec $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_3^{\vee}$ (resp. $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_2^{\vee}$) et où χ est un caractère de $\mathbb{R}_+^{\times}\mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}^{\times}$;*

(2) *π est associée à $(H, \rho_1(1) \otimes \rho_2)$, où ρ_1 est une représentation automorphe cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$, avec $\rho_{1,\mathbb{R}} = \sigma_3^{\vee}$, et où ρ_2 est une représentation automorphe cuspidale irréductible de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$, avec $\rho_{2,\mathbb{R}} = \sigma_1^{\vee}$ (resp. $\rho_2 = \chi \circ \det$ pour χ un caractère de $\mathbb{R}_+^{\times}\mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}^{\times}$);*

(3) *$\pi_{\mathbb{R}} = \pi^{\mathrm{H}}$ ou π^{W}, $m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^1 \otimes \pi_f) = m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{2,\pm} \otimes \pi_f) = 0$ et il existe un ensemble fini S de nombres premiers, contenant tous les p pour lesquels π_p est ramifiée, un corps de nombres E et, pour chaque place finie λ de E, une représentation λ-adique semi-simple, pure de poids 3, V_λ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ayant la propriété suivante: pour tout $p \notin S$ et toute place finie λ de E ne divisant pas p, V_λ est non ramifiée en p et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j, V_\lambda) = \left[\frac{m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{H}} \otimes \pi_f) + m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{W}} \otimes \pi_f)}{2}\right] p^{3j/2} \sum_{n=1}^{4} z_n(\pi_p)^j,$$

où

$$\mathrm{diag}(z_1(\pi_p), z_2(\pi_p), z_3(\pi_p), z_4(\pi_p)) \in \widehat{T}$$

est le paramètre de Langlands de π_p (en particulier, pour presque tous les p pour lesquels π_p est non ramifiée, on a

$$|z_n(\pi_p)| = 1, \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

i.e. la conjecture de Ramanujan–Petersson est vérifiée);

(4) *$\pi_{\mathbb{R}} = \pi^1$ ou $\pi^{2,\pm}$, $m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{H}} \otimes \pi_f) = m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{W}} \otimes \pi_f) = 0$ et il existe un ensemble fini S de nombres premiers, contenant tous les p pour lesquels π_p est ramifiée, un corps de nombres E et, pour chaque place finie λ de E, une représentation λ-adique semi-simple, pure de poids 2, V'_λ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ayant la propriété suivante: pour tout $p \notin S$ et toute place finie λ de E ne divisant pas p, V'_λ est non ramifiée en p et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(\Phi_p^j, V'_\lambda \oplus V'^{\vee}_\lambda(-3)) \\ &\quad = \left[m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^1 \otimes \pi_f) + \frac{m_{\mathrm{cusp}}^G(\pi^{2,+} \otimes \pi_f) + m_{\mathrm{cusp}}^G(\pi^{2,-} \otimes \pi_f)}{2}\right] \\ &\qquad \times p^{3j/2} \sum_{n=1}^{4} z_n(\pi_p)^j, \end{aligned}$$

où

$$\mathrm{diag}(z_1(\pi_p), z_2(\pi_p), z_3(\pi_p), z_4(\pi_p)) \in \widehat{T}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000102414055 Published online by Cambridge University Press

est le paramètre de Langlands de π_p (en particulier, pour presque tous les p pour lesquels π_p est non ramifiée, on a, à une permutation près,

$$|z_1(\pi_p)| = |z_2(\pi_p)| = p^{-1/2}$$

et

$$z_1(\pi_p)z_4(\pi_p) = z_2(\pi_p)z_3(\pi_p) = \pm 1).$$

Remarque. Si π est associée à $(M_1, \sigma(3) \otimes \chi(-2))$, avec $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_3^{\vee}$, (resp. $(M_2, \chi(-3) \otimes \sigma(-1))$ avec $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_2^{\vee}$, resp. $(H, \rho_1(1) \otimes \rho_2)$, avec $\rho_{1,\mathbb{R}} = \sigma_3^{\vee}$ et $\rho_{2,\mathbb{R}} = \sigma_1^{\vee}$, resp. $(H, \rho_1(1) \otimes (\chi_2 \circ \det))$, avec $\rho_{1,\mathbb{R}} = \sigma_3^{\vee}$), on peut considérer le corps de nombres E composé de $E(\sigma)$ et $E(\chi)$ (resp. $E(\chi)$ et $E(\sigma)$, resp. $E(\rho_1)$ et $E(\rho_2)$, resp. $E(\rho_1)$ et $E(\chi_2)$) et, pour chaque place finie λ de E, la représentation λ-adique semi-simple de dimension 4 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

$$V_\lambda = V_\lambda(\chi)(-2) \oplus (V_\lambda(\sigma) \otimes V_\lambda(\chi)) \oplus V(\omega_\sigma \chi)(1)$$

(resp.

$$V_\lambda = (V_\lambda(\chi) \otimes V_\lambda(\sigma)) \oplus V_\lambda(\sigma)(-1),$$

resp.

$$V_\lambda = V_\lambda(\rho_1) \oplus V_\lambda(\rho_2)(-1)$$

resp.

$$V_\lambda = V_\lambda(\chi_2)(-1) \oplus V_\lambda(\rho_1) \oplus V_\lambda(\chi_2)(-2)).$$

Alors, pour presque tout p tel que π_p soit non ramifiée et pour toute place finie λ de E ne divisant pas p, V_λ est non ramifiée en p et, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{tr}(\Phi_p^j, V_\lambda) = p^{3j/2} \sum_{n=1}^{4} z_n(\pi_p)^j,$$

où

$$\mathrm{diag}(z_1(\pi_p), z_2(\pi_p), z_3(\pi_p), z_4(\pi_p)) \in \widehat{T}$$

est le paramètre de Langlands de π_p.

Preuve. Le noyau de l'épimorphisme canonique de $\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\mathbb{Q}}$-modules

$$H_c^i(S_K(\mathbb{Q})^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_!^i(S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$$

est un quotient de la cohomologie de la frontière de la compactification de Borel–Serre de $S_K(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$. Cette frontière s'obtient par recollement de trois strates

$$X_K^P = P(\mathbb{Q})\backslash[(G(\mathbb{R})/K'_{\mathbb{R}}) \times (G(\mathbb{A}_f)/K)]$$

$(P = P_1, P_2, B)$, où B est le sous-groupe de Borel de G des matrices triangulaires supérieures et où P_1 (resp. P_2 est l'unique sous-groupe parabolique dans $\mathcal{P}(M_1)$ (resp. $\mathcal{P}(M_2)$) qui contient B. La cohomologie de ces strates est aisément calculable (cf. [Sch 1] et [Sch 2]). Tout calcul fait, on obtient les égalités suivantes de $\mathcal{C}_c(G(\mathbb{A}_f)//K)_{\overline{\mathbb{Q}}}$-modules virtuels

$$\begin{aligned}
H^0(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}}) &= \sum_{\xi,\chi} j_{M_1}((\xi_f\circ\det)(3)\otimes\chi_f(-3))^K \\
H^1(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}}) &= 2\sum_{\substack{\sigma,\chi\\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_1^\vee}} j_{M_1}(\sigma_f(3)\otimes\chi_f(-3))^K \\
&\quad+\sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi\\ \chi_{1,\mathbb{R}}=\chi_{2,\mathbb{R}}}} j_T(\chi_{1,f}(4)\otimes\chi_{2,f}(2)\otimes\chi_f(-3))^K \\
&\quad-\sum_{\xi,\chi} j_{M_1}((\xi_f\circ\det)(3)\otimes\chi_f(-3))^K \\
H^2(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}}) &= 2\sum_{\substack{\sigma,\chi\\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_3^\vee}} j_{M_1}(\sigma_f(3)\otimes\chi_f(-2))^K \\
&\quad+\sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi\\ \chi_{1,\mathbb{R}}=\chi_{2,\mathbb{R}}}} j_T(\chi_{1,f}(4)\otimes\chi_{2,f}(2)\otimes\chi_f(-3))^K \\
H^3(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}}) &= H^0(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}}) + H^2(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}}) \\
H^4(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}}) &= H^1(X_K^{P_1},\overline{\mathbb{Q}})
\end{aligned}$$

et

$$H^0(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}}) = \sum_{\chi,\xi} j_{M_2}(\chi_f(4)\otimes(\xi_f\circ\det)(-2))^K$$

$$\begin{aligned}
H^1(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}}) &= 2\sum_{\substack{\chi,\sigma\\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_1^\vee}} j_{M_2}(\chi_f(4)\otimes\sigma_f(-2))^K\\
&\quad+\sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi\\ \xi_{2,\mathbb{R}}=1}} j_T(\chi_{1,f}(4)\otimes\chi_{2,f}(2)\otimes\chi_f(-3))^K\\
&\quad-\sum_{\chi,\xi} j_{M_2}(\chi_f(4)\otimes(\xi_f\circ\det)(-2))^K\\
H^2(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}}) &= 2\sum_{\substack{\chi,\sigma\\ \sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_2^\vee}} j_{M_2}(\chi_f(3))\otimes\sigma_f(-1))^K\\
&\quad+\sum_{\substack{\chi_1,\chi_2,\chi\\ \chi_{2,\mathbb{R}}=\mathrm{sgn}}} j_T(\chi_{1,f}(4)\otimes\chi_{2,f}(2)\otimes\chi_f(-3))^K\\
H^3(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}}) &= H^0(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}})+H^2(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}})\\
H^4(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}}) &= H^1(X_K^{P_2},\overline{\mathbb{Q}})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
H^0(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}}) &= \sum_{\chi_1,\chi_2,\chi} j_T(\chi_{1,f}(4)\otimes\chi_{2,f}(2)\otimes\chi_f(-3))^K\\
H^1(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}}) &= 2H^0(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}})\\
H^2(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}}) &= 2H^0(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}})\\
H^3(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}}) &= 2H^0(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}})\\
H^4(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}}) &= H^0(X_K^{B},\overline{\mathbb{Q}}),
\end{aligned}$$

où ξ, χ_1, χ_2, χ parcourent les caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ et où σ parcourt les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ (si $\sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_n^\vee$ pour un entier $n\geqslant 1$, σ_f est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$). En outre, les autres H^i sont tous nuls.

Par conséquent, si π est une représentation automorphe cuspidale irréductible de $G(\mathbb{A})$, avec $\pi_{\mathbb{R}}\in\{\pi^{\mathrm{H}},\pi^{\mathrm{W}},\pi^1,\pi^{2,\pm}\}$, qui n'est associée à aucun des couples (M,π^M) suivants:

- $(M_1,\sigma(3)\otimes\chi(-3))$ avec $\sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_1^\vee$
- $(M_1,\sigma(3)\otimes\chi(-2))$ avec $\sigma_{\mathbb{R}}=\sigma_3^\vee$

- $(M_2, \chi(4) \otimes \sigma(-2))$ avec $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1^\vee$
- $(M_2, \chi(3) \otimes \sigma(-1))$ avec $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_2^\vee$
- $(T, \chi_1(4) \otimes \chi_2(2) \otimes \chi(-3))$,

et si on a choisi K assez petit pour que $\pi_f^K \neq (0)$, on a les égalités de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-modules virtuels

$$W_{!,\lambda}(\pi_f) = W_\lambda(\pi_f) = \overline{W}_\lambda(\pi_f).$$

Donc, si on suppose de plus que π n'est associée à aucun des couples $(H, \rho_1(1) \otimes \rho_2)$ et $(H, \rho_1(1) \otimes (\chi_2 \circ \det))$ avec $\rho_{1,\mathbb{R}} = \sigma_3^\vee$ et $\rho_{2,\mathbb{R}} = \sigma_1^\vee$, il résulte de (7.2)(i) qu'il existe un ensemble fini de places finies de $\mathbb{Q}$ tel que

$$\iota(\mathrm{tr}(\Phi_p^j, W_{!,\lambda}(\pi_f))) = \mu(\pi_f) p^{3j/2} \sum_{n=1}^{4} z_n(\pi_p)^j$$

pour tout entier j et tout $p \notin S$ ne divisant pas λ. Alors, en utilisant les propriétés des $W_{!,\lambda}^i(\pi_f)$ rappelées ci-dessus, on vérifie facilement que l'une des propriétés (3) et (4) du théorème est satisfaite avec

$$V_\lambda = W_{!,\lambda}^3(\pi_f)$$

si $\pi_{\mathbb{R}} = \pi^{\mathrm{H}}$ ou π^{W} et

$$V'_\lambda = W_{!,\lambda}^2(\pi_f)$$

si $\pi_{\mathbb{R}} = \pi^1$ ou $\pi^{2,\pm}$ (par exemple, si $\mu(\pi_f) < 0$, on a nécessairement $W_{!,\lambda}^2(\pi_f) = W_{!,\lambda}^4(\pi_f) = (0)$ et

$$2[m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{H}} \otimes \pi_f) + m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{W}} \otimes \pi_f)] \leqslant \dim W_{\lambda,!}^3(\pi_f) = -4\mu(\pi_f)$$

de sorte que

$$m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^1 \otimes \pi_f) = m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{2,\pm} \otimes \pi_f) = 0$$

et que

$$m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{H}} \otimes \pi_f) + m_{\mathrm{disc}}^G(\pi^{\mathrm{W}} \otimes \pi_f) = -2\mu(\pi_f) > 0).$$

Pour achever la démonstration du théorème, il ne reste plus qu'à remarquer que π ne peut être associée ni à $(M_1, \sigma(3) \otimes \chi(-3))$ avec $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1^\vee$, ni à $(M_2, \chi(4) \otimes \sigma(-2))$ avec $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_1^\vee$, ni à $(T, \chi_1(4) \otimes \chi_2(2) \otimes \chi(-3))$. En effet, d'après [Rod] Théorème 2, pour presque tout p, l'unique sous-quotient irréductible non ramifié de $\mathcal{I}_{P_1}(\sigma_p(\frac{3}{2}) \otimes \chi_p(-\frac{3}{2}))$ ou de $\mathcal{I}_{P_2}(\chi_p(2) \otimes \sigma_p(-1))$ n'est pas unitaire et celui de $\mathcal{I}_B(\chi_{1,p}(2) \otimes \chi_{2,p}(1) \otimes \chi_p(-\frac{3}{2}))$ ne peut être unitaire que si $\chi_{1,p} = \chi_{2,p}$, auquel cas il est de dimension 1. $\square$

On laisse au lecteur intéressé le soin de combiner les résultats ci-dessus avec ceux obtenus par Taylor dans [Ta]. Cela permet en particulier de remplacer dans l'énoncé du Théorème 2 de loc. cit. l'expression 'outside a set of Dirichlet density zero' par 'outside a finite set'.

Remerciement

Je remercie le département de mathématiques de l'Université de Toronto et l'Institut Isaac Newton de Cambridge pour leur hospitalité durant la préparation de ce travail au printemps 1993.

Je remercie plus particulièrement J. Arthur pour son accueil chaleureux à Toronto et pour les discussions fructueuses que j'ai eues avec lui. Il m'a appris à calculer le côté spectral de sa formule des traces et je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie vivement R. Kottwitz et R. Taylor pour leurs suggestions qui m'ont permis d'améliorer certains résultats et de simplifier certains calculs.

Je remercie enfin M. Bonnardel et M. Le Bronnec qui ont réalisé la composition en TeX du manuscript.

Bibliographie

[Ar 1] Arthur, J.: L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators, *Invent. Math*. 97 (1981) 257–290.
[Ar 2] Arthur, J.: The trace formula in invariant form, *Ann. of Math*. 114 (1981) 1–74.
[Ar 3] Arthur, J.: The invariant trace formula. I. Local theory, *J. Amer. Math. Soc*. 1 (1988) 323–383.
[Ar 4] Arthur, J.: On a family of distributions obtained from orbits, *Can. J. Math*. 38 (1986) 179–214.
[Ar 5] Arthur, J.: Intertwining operators and residues I. Weighted characters, *J. Funct. Anal*. 84 (1989) 19–84.
[Ar 6] Arthur, J.: The invariant trace formula. II. Global theory, *J. Amer. Math. Soc*. 1 (1988) 501–554.
[Ar 7] Arthur, J.: On elliptic tempered characters, *Acta. Math*. 171 (1993) 75–138.
[Ar 8] Arthur, J.: Intertwining operators and residues II. Invariant distributions, *Compos. Math*. 70 (1989) 51–99.
[Cl] Clozel, L.: The fundamental lemma for stable base change, *Duke Math. J*. 61 (1990) 255–302.
[Cl-De] Clozel, L. et Delorme, P.: Le théorème de Paley–Wiener invariant pour les groupes réductifs. II, *Ann. Sc. E.N.S.* 23 (1990) 193–228.
[De] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations l-adiques, dans 'Séminaire Bourbaki 1969', *Lecture Notes in Math*. 179 Springer-Verlag, (1969) 139–172.
[Fa-Ch] Faltings, G. et Chai, C.-L.: Degeneration of abelian varieties, Springer-Verlag, (1990).
[Fl-Ka 1] Flicker, Y. Z. et Kazdhan, D. A.: Geometric Ramanujan conjecture and Drinfeld reciprocity law, dans 'Number theory, trace formulas and discrete groups. Aubert, K. E., Bombieri, E. et Golfeld, D., (éd.)', Academic Press, (1989) 201–218.
[Fl-Ka 2] Flicker, Y. Z. et Kazdhan, D. A.: A simple trace formula *J. Anal. Math*. 50 (1988) 189–200.

[Ha 1] Hales, T. C.: A simple definition of transfer factors for unramified groups, dans 'Representation theory of groups and algebras, Adams, J., Herb, R., Kudla, S., Li, J.-S., Lipsman, R. et Rosenberg, J., (éd.)', *Contemporary Mathematics* 145 (1993) 109–134.

[Ha 2] Hales, T. C.: Shalika germs on $\mathrm{GSp}(4)$, dans 'Orbites unipotentes et représentations, II. Groupes p-adiques et réels', *Astérisque* 171–172, (1989) 195–256.

[Ha 3] Hales, T. C.: The fundamental lemma for $\mathrm{Sp}(4)$, preprint.

[Ha 4] Hales, T. C.: The fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to unit elements, to appear in *Can. J. Math*.

[Har] Harder, G.: Der Vergleich der topologischen und der arithmetischen Spurformel für GSp_4.

[H-C] Harish-Chandra.: Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, dans 'Proceedings of the 1977 annual seminar of the Canadian Mathematical Congress, Rossman, W., (éd.)', *Queen's paper in Pure and Applied Math*. 48 (1978) 281–347.

[Il] Illusie, L.: Appendice à Théorème de finitude en cohomologie étale dans 'Cohomologie étale, SGA $4\frac{1}{2}$', *Lecture Notes in Math*. 569 Springer-Verlag (1977), 252–261.

[Kn] Knapp, A. W.: Representation theory of semisimple groups, An overview based on examples, Princeton University Press, (1986).

[Ko 1] Kottwitz, R. E.: Points on some Shimura varieties over finite fields, *J. Amer. Math. Soc*. 5 (1992) 373–444.

[Ko 2] Kottwitz, R. E.: Shimura varieties and l-adic representations, dans 'Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. 1, Clozel, L. et Milne, J. S., (éd.)', Academic Press, (1990), pp. 161–209.

[Ko 3] Kottwitz, R. E.: Base change for unit elements of Hecke algebras, *Compositio Math*. 60 (1986) 237–250.

[Ko 4] Kottwitz, R. E.: Stable trace formula: elliptic singular terms, *Math. Ann*. 275 (1986) 365–399.

[Lab 1] Labesse, J.-P.: Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base, *Duke Math. J*. 61 (1990) 519–530.

[Lab 2] Labesse, J.-P.: Pseudo-coefficients très cuspidaux et K-Théorie, *Math. Ann*. 291 (1991) 607–616.

[La-Sh] Langlands, R. P. et Shelstad, D.: On the definition of transfert factors, *Math. Ann*. 278 (1987) 219–271.

[Lau] Laumon, G.: Cohomology of Drinfeld modular varieties, Vol. I and II, Cambridge University Press, (1996).

[Pi] Pink, R.: On the calculation of local terms in the Lefschetz–Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne, *Ann. of Math*. 135 (1992) 483–525.

[Rod] Rodier, F.: Sur les représentations non ramifiées des groupes réductifs p-adiques; l'exemple de $\mathrm{GSp}(4)$, *Bull. Soc. Math. France* 116 (1988) 15–42.

[Rog] Rogawski, J.: An application of the building to orbital integrals, *Compos. Math*. 42 (1981) 417–423.

[Sch 1] Schwermer, J.: On arithmetic quotients of the Siegel upper half space of degree two, *Compos. Math*. 58 (1986) 233–258.

[Sch 2] Schwermer, J.: On Euler products and residual Eisenstein cohomology classes for Siegel modular varieties, *Forum Math*. 7 (1995) 1–28.

[Sha] Shalika, J. A.: A theorem on semi-simple p-adic groups, *Ann. of Math*. 95 (1972) 226–242.

[She 1] Shelstad, D.: L-indistinguishability for real groups, *Math. Ann*. 259 (1982) 385–430.

[She 2] Shelstad, D.: Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, *Ann. Sc. ENS* 12 (1979), 1–31.

[Ta] Taylor, R.: On the l-adic cohomology of Siegel threefolds, *Invent. Math*. 114 (1993) 289–310.

[Vo 1] Vogan, D. A.: Representation of real reductive groups, Birkhaüser, 1981.

[Vo 2] Vogan, D. A.: The Kazdhan–Lusztig conjecture for real reductive groups, dans 'Representation theory of reductive groups, Trombi, P. C., (éd.)', Birkhaüser (1983), pp. 223-264.

[Wa 1] Waldspurger, J.-L.: Homogénéité de certaines distributions sur les groupes p-adiques, *Publications Math. IHES* 81 (1995) 25–72.

[Wa 2] Waldspurger, J.-L.: Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur $\mathrm{GL}(2)$, *Compos. Math*. 54 (1985) 121–171.

[Wal] Wallach, N.: On the constant term of a square integrable automorphic form, dans 'Operator algebras and group representations. II. *Monographs and Studies in Maths*. 18' Pitman, (1984), pp. 227–237.

[Zi] Zink, T.: The Lefschetz trace formula for an open algebraic surface, dans 'Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, vol. 2, Clozel, L. et Milne, J. S., (ed.)', Academic Press, (1990), 337–376.

[We 1] Weissauer, R.: The Ramanujan conjecture for genus two Siegel modular forms (An application of the trace formula), preprint.

[We 2] Weissauer, R.: A special case of the fundamental lemma, Parts I, II, III, IV, preprints.