Canad. Math. Bull. Vol. 17 (2), 1974.

# MODULES ET ANNEAUX QUASI-CONTINUS

PAR
LOUIS JEREMY

1. **Introduction.** Le but de ce travail est de prolonger les travaux de Y. Utumi sur les anneaux continus.

Nous appelons *module quasi-continu* un module stable par tout projecteur de son enveloppe injective. Un anneau unitaire $A$ est dit *quasi-continu à gauche* (resp. à droite) si le $A$-module à gauche $_AA$ (resp. à droite $A_A$) est quasi-continu. Cette définition est plus générale que celle d'anneau continu à gauche donnée par Yuzo Utumi, et quand l'anneau est régulier, elles coïncident (§III).

Carl Faith ([4], Théorème 2, p. 186) caractérise les anneaux quasi-frobéniusiens par le fait que $A^{(\mathbb{N})}$ est un $A$-module à gauche injectif. Nous montrons que $A$ est quasi-frobéniusien si et seulement si $A^{(\mathbb{N})}$ est un $A$-module à gauche quasi-continu. Plus généralement, nous montrons que si $M$ est un $A$-module à gauche, alors $M^{(\mathbb{N})}$ est quasi-continu si et seulement si $M$ est $\sum$-quasi-injectif ce qui étend la notion de $\sum$-quasi-injectivité étudiée par $A$. Cailleau et G. Renault [2] (Corollaire 4.4). Nous avons été amenés à expliquer cette "densité" des projecteurs d'un module isotypique. On sait que Yuzo Utumi, prolongeant un résultat de Wolfson et Zelinsky [16], [17], qui concernait l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension $n>1$, a montré [12] qu'un anneau régulier auto-injectif à gauche tel que tout idéal bilatère non nul contienne un élément nilpotent non nul est engendré (en tant qu'anneau) par ses idempotents, et aussi par ses éléments inversibles. Nous prolongeons ce résultat en montrant que l'anneau des endomorphismes d'un module isotypique est toujours engendré respectivement par ses projecteurs, ses éléments inversibles, ses éléments de carré nul. En particulier, tout anneau de matrices $\mathfrak{M}_n(A)$, $n>1$, sur un anneau $A$ unitaire quelconque est engendré par ses matrices idempotentes (Corollaire 4.10).

Nous étudions ensuite (§V) quelques décompositions des anneaux quasi-continus à gauche. Nous montrons en particulier que si l'anneau $A$ quasi-continu à gauche vérifie la condition $eAf=0 \Rightarrow fAe=0$ $(e=e^2, f=f^2)$, alors il existe un idempotent central $e \in A$ (resp. $e' \in A$) tel que $Ae$ soit l'idéal bilatère (resp. à gauche) maximum réduit (sans élément nilpotent$\neq 0$) de $A$ (Corollaires 5.4 et 5.6). Nous donnons une décomposition analogue quand $A$ est quasi-continu à gauche et à droite, sans autre condition (Proposition 5.10).

Au cours du paragraphe VI, nous étudions l'enveloppe quasi-continue d'un module et nous montrons qu'un anneau à idéal singulier nul à gauche et à droite a

"Received by the editors June, 1972."

même enveloppe injective à gauche et à droite si et seulement si il a même enveloppe quasi-continue.

Le dernier paragraphe est une étude de l'anneau associé à un module quasi-continu. Cela nous permet de montrer qu'un module quasi-continu est somme directe d'un module quasi-injectif et d'un module dont l'anneau associé est réduit (Corollaire 7.7).

Certains résultats figurant dans cet article ont été annoncés dans [C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, p. 80–83, 12 juillet 1971].

Je tiens à remercier Monsieur Le Professeur G. Renault pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et les suggestions dont il m'a fait part.

II. **Notations et préliminaires.** Les anneaux considérés sont toujours unitaires non nécessairement commutatifs. Les modules considérés sont, sauf précision contraire, des modules à gauche.

Si $N$ est un sous-module de $M$, $N \prec M$ signifie que $M$ est *extension essentielle* de $N$; $E(M)$ désigne une *enveloppe injective* de $M$.

Nous notons $j(M)=\{h \mid h \in \mathrm{End}_A M, \mathrm{Ker}\, h \prec M\}$; $S(M)=\mathrm{End}_A M/j(M)$ est *l'anneau associé* à $M$. Pour un anneau $A$, nous notons ${}_AA$ (resp. $A_A$) le $A$-module à gauche (resp. à droite) $A$; $j({}_AA)$ est alors égal à *l'idéal singulier* à gauche de $A$.

Si $X \subset A$, nous notons $l(X)=\{x \in A \mid xX=0\}$ et $r(X)=\{x \in A \mid Xx=0\}$.

Un anneau est dit *régulier* (au sens de Von Neumann) si tout idéal à gauche (resp. à droite) monogène est facteur direct. Alors les idéaux à gauche (resp. à droite) monogènes forment un treillis. Quand ce treillis est complet, l'anneau régulier est dit *complet;* un anneau régulier est complet si et seulement si c'est un anneau de Baer (Yuzo Utumi [12], lemme 1).

Un *anneau de Baer* est un anneau $A$ dans lequel tout annulateur à gauche (resp. à droite) est facteur direct [6]. Dans un anneau de Baer les idéaux à gauche (resp. à droite) facteurs directs forment un treillis complet, la borne supérieure d'une famille $(Ae_i)_{i\in I}$, $e_i=e_i^2$, étant $\bigcup_{i\in I} Ae_i=lr(\sum_{i\in I} Ae_i)$, la borne inférieure étant leur intersection.

Un anneau régulier complet est dit *continu à gauche* (resp. à droite) si le treil lis de ses idéaux à gauche (resp. à droite) facteurs directs est supérieurement continu, ce qui signifie que le treillis des idéaux à gauche est complet et satisfait la condition

$$(\cup a_\alpha) \cap b = \cup (a_\alpha \cap b)$$

pour toute chaîne $(a_\alpha)$ et tout élément $b$ (Yuzo Utumi [12], p. 598). Yuzo Utumi a montré qu'un anneau régulier est continu à gauche si et seulement si tout idéal à gauche complément est facteur direct [13]. Rappelons qu'un *complément* dans un module est un sous-module sans extension essentielle propre. Si $N$ et $K$ sont deux sous-modules de $M$, $K$ est appelé complément relatif de $N$ dans $M$ si $K$ est maximal parmi les sous-modules $X$ de $M$ qui vérifient $N \cap X=0$. Un module est *bien* *complémenté* si l'intersection de deux compléments est un complément, ou encore si tout sous-module est essentiel dans un complément unique [9].

Rappelons que si $A$ est un anneau tel que $j(_AA)=0$, et si $B=E(_AA)$, alors $B$ est un anneau régulier auto-injectif à gauche et $\mathrm{End}_A B=\mathrm{End}_B B$, [7].

Un idéal à gauche (resp. à droite) d'un anneau $A$ est dit *réduit* s'il ne contient aucun élément nilpotent (un élément nilpotent sera toujours supposé non nul). Dans un anneau réduit, les idempotents sont centraux.

III. **Modules continus—modules quasi-continus.** Généralisant la notion d'anneau régulier continu, Yuzo Utumi définit et étudie les anneaux continus [15]. La définition qu'il en donne ne fait intervenir que les propriétés du $A$-module à gauche $_AA$. Aussi nous poserons:

DÉFINITION 3.1. Un $A$-module $M$ est dit *continu* s'il vérifie les conditions suivantes:

($C_1$) *Tout sous-module de $M$ est essentiel dans un facteur direct de $M$;*

($C_2$) *Tout sous-module de $M$ isomorphe à un facteur direct de $M$ est facteur direct de $M$.*

La condition ($C_1$) peut encore s'énoncer "Tout sous-module complément est facteur direct".

Notons que la condition ($C_2$) implique la condition:

($C_3$) *Si $P$ et $Q$ sont facteurs directs tels que $P \cap Q=0$, alors $P \oplus Q$ est facteur direct* (Yuzo Utumi [15]).

Un *anneau* est dit continu à gauche (resp. à droite) si le $A$-module $_AA$ (resp. $A_A$) est continu.

DÉFINITION 3.2. Un $A$-module $M$ est dit *quasi-continu* s'il vérifie l'une des propriétés équiventes suivalantes:

(1) *$M$ vérifie les conditions ($C_1$) et ($C_3$) ci-dessus;*

(2) *Pour tout sous-module $N$ de $M$, tout projecteur de $N$ se prolonge en un projecteur de $M$;*

(3) *$M$ est stable par tout projecteur d'une enveloppe injective $E(M)$;*

(4) *Tout facteur direct est facteur direct absolu.*

Rappelons qu'un sous-module $X$ de $M$ est appelé facteur direct absolu si pour tout sous-module complément relatif $Y$ de $X$, on a $M=X\oplus Y$ ([9], p. 13 et [5], p. 73). L'équivalence de ces propriétés est facile à établir. On pourra se reporter à [9] (p. 13 et 14) et à [13] (Théorème 3). Jacques Bichot, dans [1], appelle ces modules "infra-injectifs".

Comme ci-dessus, on définit un *anneau* quasi-continu à gauche (resp. à droite).

On contrôlera aisément les implications suivantes pour un $A$-module $M$:

Injectif $\Rightarrow$ quasi-injectif $\Rightarrow$ continu $\Rightarrow$ quasi-continu.

Il existe des modules continus non quasi-injectifs ([12], p. 603, exemple 2) et des modules quasi-continus non continus ($\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$).

Un anneau *régulier* est continu à gauche si et seulement si il est quasi-continu à gauche.

PROPRIÉTÉS 3.3. Nous signalons ici quelques propriétés simples des modules et anneaux quasi-continus.

(1) Tout facteur direct d'un module quasi-continu (resp. continu) est quasi-continu (resp. continu).

(2) Si $N$ est un sous-module du module quasi-continu $M$, essentiel dans les deux facteurs directs $P$ et $Q$ de $M$, alors $P$ est isomorphe à $Q$.

(3) Une somme directe de modules quasi-continus n'est pas nécessairement quasi-continue (Corollaire 4.3.).

(4) Si $M$ est un $A$-module à gauche quasi-continu tel que $j(M)=0$, alors $M$ est bien complémenté.

(5) Soient $A$ un anneau tel que $j({}_AA)=0$ et $B=E({}_AA)$. Alors $A$ est quasi-continu à gauche si et seulement si $A$ contient les idempotents de $B$. Comme $\text{End}_A B=\text{End}_B B$, ce résultat est immédiat ([12], p. 603, Lemme 8 quand $A$ est régulier).

(6) Soit $A$ un anneau dans lequel tout idéal à gauche complément est facteur direct ($C_1$). Alors $A$ est un anneau de Baer si et seulement si $j({}_AA)=0$.

(7) Soit $A$ un anneau dans lequel tout idéal à gauche complément est facteur direct. Si $A$ est réduit, alors $B=E({}_AA)$ est un anneau réduit. ([10], Proposition 3.1 et Théorème 4.1).

(8) Soit $A$ un anneau quasi-continu à gauche. Pour toute somme directe $\bigoplus_{i\in I} Ae_i$ de facteurs directs, il existe des idempotents orthogonaux $(e_i')_{i\in I}$ tels que pour tout $i\in I$, $Ae_i=Ae_i'$.

REMARQUE 3.4. Soit $M$ un $A$-module à gauche bien complémenté. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) Tout complément est facteur direct;

(2) Tout sous-module monogène est essentiel dans un facteur direct et le treillis $\mathscr{L}(M)$ des facteurs directs de $M$ est supérieurement continu. (La démonstration de Yuzo Utumi [13], Théorème 2, p. 64, faite dans le cas des anneaux réguliers s'adapte ici, avec des modifications mineures.)

IV. **Quasi-continuité de $M^{(I)}$.** Nous désignons par $M^{(I)}$ la somme directe de copies de $M$ indexées par l'ensemble $I$.

Dans tout ce paragraphe, si $M=M_1\oplus M_2$, nous appellerons $p_1$ (resp. $p_2$) la projection canonique de $M_1\oplus M_2$ sur $M_1$ (resp. $M_2$). D'autre part, nous identifierons $\text{Hom}(M_1, M_2)$ [resp. $\text{Hom}(M_2, M_1)$] et son image canonique dans $\text{End}_A M$, obtenue en prolongeant chaque $f\in\text{Hom}(M_1, M_2)$ (resp. $g\in\text{Hom}(M_2, M_1)$ par l'homomorphisme nul de $M_2$ (resp. $M_1$).

LEMME 4.1. *Soient $M_1$ et $M_2$ deux $A$-modules tels que $M_1\cap M_2=0$ et $f$ un homomorphisme de $M_1$ dans $M_2$. Alors $f$ est la restriction à $M_1$ d'un projecteur $p$ de $M=M_1\oplus M_2$ d'image $M_2$, et $f=pp_1$.*

On pose $p=f\oplus p_2$. Il. est immédiat que $p^2=p$ et que la restriction de $p$ à $M_1$ coincide avec $f$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1974-044-8 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 4.2. *Soit $M=M_1\oplus M_2$ un A-module quasi-continu. Si N est un sous-module de $M_1$, tout homomorphisme f de N dans $M_2$ se prolonge en un homomorphisme de $M_1$ dans $M_2$.*

D'après le Lemme 4.1, il existe un projecteur $p'$ de $N\oplus M_2$ d'image $M_2$, tel que $f$ soit la restriction de $p'$ à $N$. $p'$ se prolonge en un projecteur $p$ de $M$ d'image $M_2$ et $f$ est la restriction à $N$ de $pp_1$.

COROLLAIRE 4.3. *Soient A un anneau et M un A-module. Alors:*

(1) *Si ${}_AA\times M$ est un A-module quasi-continu, M est injectif;*

(2) *Si $M^2$ est quasi-continu. M est quasi-injectif.*

Pour généraliser la motion de module $\sum$-quasi-injectif étudiée par A. Cailleau et G. Renault [2], [3], on peut se demander quels sont les modules $M$ tels que $M^{(I)}$ soit quasi-continu pour tout ensemble $I$. On obtient le résultat suivant:

COROLLAIRE 4.4. *Soit M un A-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *M est $\sum$-quasi-injectif;*

(2) *$M^{(\mathbb{N})}$ est quasi-continu;*

(3) *$M^{(I)}$ est quasi-continu pour tout I.*

La démonstration est immédiate à l'aide du Corollaire 4.3.

Nous pouvons maintenant, en traduisant ce corollaire dans le cas où $M={}_AA$, donner une caractérisation des anneaux quasi-frobeniusiens qui généralise celle donnée par Carl Faith [4] (Théorème 2, p. 186):

COROLLAIRE 4.5. *Un anneau A est quasi-frobeniusien si et seulement si le A-module à gauche ${}_AA^{(\mathbb{N})}$ est quasi-continu.*

Le théorème 4.2 nous permet d'obtenir des démonstrations faciles des résultats démontrés par Yuzo Utumi dans le cas des anneaux continus à gauche [15] (Corollaire 7.5, Corollaire 8.4).

COROLLAIRE 4.6. *Soit A un anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *A est auto-injectif à gauche;*

(2) *$A^2$ est un A-module quasi-continu;*

(3) *Il existe un entier $n>1$ tel que $\mathfrak{M}_n(A)$ soit un anneau quasi-continu à gauche.*

On sait que $\mathfrak{M}_n(A)$ est quasi-continu à gauche si et seulement si $A^n$ est quasi-continu à gauche.

COROLLAIRE 4.7. *Soient $N_1$ et $N_2$ deux sous-modules d'un module quasi-continu M tels que $N_1\cap N_2=0$, essentiels respectivement dans les facteurs directs $P_1$ et $P_2$. Si $N_1$ est isomorphe à $N_2$, alors $P_1$ est isomorphe à $P_2$.*

Il en résulte, en particulier, qu'un module quasi-continu vérifie la condition:

($C_2'$) *Si P est un facteur direct de M et N un sous-module de M isomorphe à P, tel que $N\cap P=0$, alors N est facteur direct de M.*



https://doi.org/10.4153/CMB-1974-044-8 Published online by Cambridge University Press

Ces résultats (le corollaire 4.3 par exemple) laissent supposer que les projecteurs d'un module isotypique quasi-injectif sont suffisamment nombreux pour engendrer l'anneau des endomorphismes du module; cela nous a conduit à étudier l'anneau des endomorphismes d'un module isotypique en général, c'est-à-dire de la forme $M^{(I)}$.

Théorème 4.8. *Soit $M$ un $A$-module. L'anneau des endomorphismes du module $M^2$ est engendré respectivement parses projecteurs, ses automorphismes et ses endomorphismes de carré nul.*

Soit $f \in \mathrm{End}_A M^2$. On écrit $M^2 = M_1 \oplus M_2$ où $M_1$ et $M_2$ sont isomorphes. On a $f = p_1 f p_1 + p_1 f p_2 + p_2 f p_1 + p_2 f p_2$. D'après le lemme 4.1, tout homomorphisme de $M_1$ dans $M_2$ (resp. de $M_2$ dans $M_1$) est un produit de deux projecteurs. C'est aussi la différence de deux automorphismes puisque si h est un tel homomorphisme on a $h^2=0$, donc $(1+h)(1-h)=(1-h)(1+h)=1$. Il suffit donc de montrer que $p_1 f p_1$ et $p_2 f p_2$ sont dans le sous-anneau de $\mathrm{End}_A M^2$ engendré par $\mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ et $\mathrm{Hom}(M_2, M_1)$. Or, si par exemple $g \in \mathrm{Hom}(M_1, M_1)$ et si $\varphi$ est un isomorphisme de $M_1$ sur $M_2$, on a $g = \varphi^{-1}(\varphi g)$, avec $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(M_2, M_1)$ et $\varphi g \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.9. *Soit $M$ un $A$-module dont l'anneau des endomorphismes est engendré respectivement par les endomorphismes de carré nul, les projecteurs, les isomorphismes de $M$. Soit $N$ un $A$-module isomorphe à un facteur direct de $M$ tel que $M \cap N = 0$. Alors l'anneau des endomorphismes de $M \oplus N$ est engendré respectivement par les endomorphismes de carré nul, les projecteurs, les isomorphismes de $M \oplus N$.*

Il suffit de le vérifier pour $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $h \in \mathrm{End}_A N$ et $u \in \mathrm{End}_A M$. Pour $f$ et $g$ le résultat se déduit directement du lemme 4.1. Soient $N'$ un sous-modulé de $M$ isomorphe à $N$ et $\varphi$ un isomorphisme de $N$ sur $N'$. On a $h = \varphi^{-1}(\varphi h)$. On applique le lemme 4.1 à $\varphi^{-1}$ et à $\varphi h$. D'autre part il existe des automorphismes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de $M$ tels que $u$ soit un polynôme en $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Dans ce polynôme substituons $\beta_i = \alpha_i + 1_N$ à $\alpha_i$ $(1 \leq i \leq n)$ et soit $v$ l'endomorphisme de $M \oplus N$ ainsi obtenu. Comme $\mathrm{End}_A N \cdot \mathrm{End}_A M = \mathrm{End}_A M \cdot \mathrm{End}_A N = 0$. il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $v = u + k \cdot 1_N$, d'où $u = v \cdot 1_M = v(1_{M \oplus N} - 1_N)$.

Corollaire 4.10. *Soit $M$ un $A$-module et $I$ un ensemble de cardinal $> 1$. Alors l'anneau des endomorphismes du $A$-module $M^{(I)}$ est engendré respectivement par ses projecteurs ses automorphismes et ses endomorphismes de carré nul.*

Remarque 4.11. La méthode utilisée pour les démonstrations 4.1, 4.8 et 4.9 permet par exemple d'exprimer immédiatement et de manière élémentaire une matrice (2-2) à coefficients dans un anneau $A$ comme somme de produits de matrices idempotentes (resp. inversibles).

THÉORÈME 4.12. ([15], Lemme 7.7). *Soit $A$ un anneau régulier auto-injectif à gauche tel que pour tout idempotent central $g\neq 0$, $Ag$ contienne un élément nilpotent. Alors, pour tout idempotent $e$, il existe des idempotents $e_1$, $e_2$, $e_3$ tels que:*

(1) $A(1-e)=Ae_1\oplus Ae_2\oplus Ae_3$;

(2) *$Ae_1$ et $Ae_2$ sont isomorphes;*

(3) *$Ae_3$ est isomorphe à un facteur direct de $Ae_1\oplus Ae_2$;*

(4) *$e_3$ est un idempotent abélien* [6].

On considère l'ensemble des couples $(X, Y)$ d'idéaux à gauche de $A$ isomorphes, contenus dans $A(1-e)$, et tels que $X\cap Y=0$. Soit $(Ae_1, Ae_2)$, $e_1=e_1^2$, $e_2=e_2^2$, un couple maximal et $1=e+e_1+e_2+e_3$. Dans $Ae_3$, pour deux idempotents $\varepsilon$ et $\varepsilon'$, si $A\varepsilon\cap A\varepsilon'=0$, alors $\varepsilon A\varepsilon'=0$, et $e_3$ est un idempotent abélien [6]. On considère alors le couple maximal $(Af, Af')$, $f=f^2$, $f'=f'^2$, vérifiant $Af'\subset Ae\oplus Ae_1\oplus Ae_2$, $Af\subset Ae_3$, $Af$ et $Af'$ étant isomorphes. On pose $Ae_3=Af\oplus Ag$, $g=g^2$ et $Ae\oplus Ae_1\oplus Ae_2=Af\oplus Ag'$. Le couple $(Af, Af')$ étant maximal, on a $gAg'=0$. Dans $Ae_3$, comme $Af\cap Ag=0$, on a $gAf=0$, d'où $gAf'=0$ et $AgA=Ag(Af'\oplus Ag'\oplus Af\oplus Ag)=AgAg\subset Ag$. $g$ est donc central dans $A$ et $g\in e_3Ae_3$. Comme $e_3$ est abélien, Ag est réduit ce qui entraîne $g=0$.

COROLLAIRE 4.13. ([12], Théorème 2). *Tout anneau régulier auto-injectif à gauche ne contenant aucun idéal bilatère réduit non nul est engendré respectivement par ses idempotents et ses éléments inversibles.*

COROLLAIRE 4.14. ([12], Théorème 3, dans le cas où $A$ est un anneau régulier). *Un anneau de Baer $A$ quasi-continu à gauche ne contenant aucun idéal bilatère réduit non nul est régulier et auto-injectif* à *gauche.*

V. **Décomposition des anneaux quasi-continus à gauche.** Yuzo Utumi a établi ([12], §5) qu'un anneau régulier continu à gauche est le produit d'un anneau réduit et d'un anneau ne contenant aucun idéal bilatère réduit. Nous cherchons, dans ce paragraphe, à généraliser ce résultat à certains anneaux quasi-continu à gauche. Quand l'enveloppe injective de l'anneau considéré est un anneau régulier, la propriété se déduit évidemment du résultat de Yuzo Utumi que nous venons de signaler.

LEMME 5.1. *Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux à gauche d'un anneau $A$, $\mathfrak{S}$ étant essentiel dans $\mathfrak{b}$. Alors $\mathfrak{S}$ est réduit si et seulement si $\mathfrak{b}$ est réduit.*

Soit $\alpha\in\mathfrak{b}-\{0\}$ un élément nilpotent ($\alpha^n=0$, $\alpha^{n-1}\neq 0$, $n\geq 2$). Il existe un $\lambda\in A$ tel que $0\neq\lambda\alpha^{n-1}\in\mathfrak{S}$. Mais $(\alpha^{n-1}\lambda\alpha^{n-1})^2=0$ d'où $\alpha^{n-1}\lambda\alpha^{n-1}=0$. Alors $(\lambda\alpha^{n-1})^2=0$ et $\lambda\alpha^{n-1}=0$. On aboutit à une contradiction.

PROPOSITION 5.2. *Soit $A$ un anneau dans lequel tout idéal à gauche complément est facteur direct. Alors, il existe un idempotent $e\in A$ tel que $Ae$ soit un idéal à gauche réduit et tel que $A(1-e)=l(Ae)$ est un idéal bilatère de $A$ et $Ae$ contient tout idéal bilatère réduit.*

Soit $\mathfrak{S}=\oplus_{i\in I}\mathfrak{S}_i$ une somme directe maximale d'idéaux bilatères réduits de $A$. C'est un idéal bilatère réduit. Il existe alors un idempotent $e\in A$ tel que $\mathfrak{S}\prec Ae$. $Ae$ est réduit d'après le lemme 5.1. Alors $A(1-e)=l(Ae)$ est un idéal bilatère. D'après la maximalité de $\oplus_{i\in I}\mathfrak{S}_i$, $A(1-e)$ ne contient aucun idéal bilatère réduit non nul, donc si $\mathfrak{b}$ est un tel idéal $\mathfrak{b}(1-e)\subset\mathfrak{b}\cap A(1-e)=0$, et $\mathfrak{b}\subset Ae$.

Remarque 5.3. Dans un anneau $A$ quasi-continu à gauche, si $e=e^2$ et $f=f^2$, on a $eAf\subset j({}_AA)$ si et seulement si $fAe\subset j({}_AA)$, ce qui signifie que $Ae$ et $Af$ ne contiennent pas d'idéaux à gauche non nuls isomorphes. Cela entraîne $Ae\cap Af=0$. Nous aurons souvent à considérer des anneaux vérifiant la propriété:

$$\text{(P)}\qquad e=e^2,\qquad f=f^2,\qquad eAf=0\Rightarrow fAe=0.$$

C'est le cas des anneaux de Baer quasi-continus à gauche (resp. à droite) et des anneaux semi-premiers.

Corollaire 5.4. *Un anneau $A$ quasi-continu à gauche vérifiant la propriété (P) est le produit d'un anneau réduit par un anneau ne contenant aucun idéal bilatère réduit.*

Notons que si $A$ est un anneau de Baer et si $B=E({}_AA)$, Be est l'idéal bilatère réduit maximum de $A$ et $A(1-e)=B(1-e)$ (Corollaire 4.14).

Proposition 5.5. *Soit $A$ un anneau quasi-continu à gauche. Alors, il existe un idempotent $e\in A$ tel que $A(1-e)$ ne contienne aucun idéal à gauche non nul de $A$ réduit. L'idéal $A(1-e)=l(Ae)$ est bilatére.*

La méthode est la même que pour la Proposition 5.2, en remarquant que chaque idéal à gauche $\mathfrak{S}_i$, $i\in I$ est essentiel dans un facteur direct $Ae_i$ $(e_i=e_i^2)$ et qu'on peut choisir les $(e_i)_{i\in I}$ orthogonaux (Propriétés 3.3, 8°).

Corollaire 5.6. *Un anneau $A$ quasi-continu à gauche vérifiant la propriété (P) est le produit d'un anneau réduit par un anneau ne contenant aucun idéal à gauche réduit.*

Dans ce cas, les corollaires 5.4 et 5.6 donnent la même décomposition de l'anneau $A$ car $A(1-e)\,Ae=Ae\,A(1-e)=0$ et $Ae$ est bilatère.

Corollaire 5.7. *Dans un anneau de Baer $A$ quasi-continu à gauche vérifiant la propriété (P) les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout idéal bilatère non nul contient un élément nilpotent;*

(2) *Tout idéal à gauche non nul contient un élément nilpotent;*

(3) *Tout idéal à gauche non nul facteur direct de $A$ contient un idempotent non central.*

(1) est équivalent à (2) car, dans ce cas, les décompositions de $A$ données par les corollaires 5.4 et 5.6 sont les mêmes.

(3) $\Rightarrow$ (2) car $A$ vérifie la propriété (P) donc si l'idempotent e de la décomposition n'est pas central, $(1-e)\,Ae\neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $x \in A-\{0\}$ tel que $x^2=0$. Alors $Ax \subset l(x)$. Comme $x \notin j({}_AA)$ il existe un idempotent $\varepsilon$ tel que $A\varepsilon \cap l(x)=0$. $A\varepsilon x$ est isomorphe à $A\varepsilon$ et $A\varepsilon x \cap A\varepsilon = 0$. Alors $A\varepsilon x$ est facteur direct de $A$ (Corollaire 4.7) donc engendré par un idempotent $e \cdot e$ n'est pas central, sinon, si $e=\lambda x$, $e^2=\lambda xe=\lambda ex=0$ puisque $e \in l(x)$.

COROLLAIRE 5.8. *Soit $A$ un anneau quasi-continu à gauche. Alors tout idéal à gauche non nul contenu dans $j({}_AA)$ contient un élément nilpotent.*

Avec les notations de la proposition 5.5, on a $Ae \cap j({}_AA)=0$, et $j({}_AA) \subset A(1-e)$.

COROLLAIRE 5.9. *Un anneau $A$ quasi-continu à gauche qui vérifie la propriété $(P)$ se décompose en un produit d'anneaux, soit $A=A_1 \times A_2 \times A_3$ où $A_1$ est réduit, $A_2$ est essentiel sur $j({}_{A_2}A_2)$, $A_3$ étant régulier, auto-injectif à gauche dans lequel tout idéal à gauche non nul contient un élément nilpotent.*

Car $j({}_AA)$ est essentiel dans un idéal bilatère $Af$, $f=f^2$ étant central.

PROPOSITION 5.10. *Un anneau $A$ tel que tout idéal à gauche complément et tout idéal à droite complément soit facteur direct est le produit d'un anneau réduit par un anneau ne contenant aucun idéal bilatère réduit.*

Suivant la démonstration de la Proposition 5.2, on considère une somme directe $\mathfrak{S}=\oplus_{i\in I}\mathfrak{S}_i$ d'idéaux bilatères réduits de $A$. Avec les mêmes notations que pour cette démonstration, $\mathfrak{S}$ est essentiel dans l'idéal à gauche réduit $Ae=(e=e^2)$; de plus $\mathfrak{S} \cap l(\mathfrak{S})=0$ et $l(\mathfrak{S}) \supset l(Ae)=A(1-e)$, d'où $A(1-e)=l(\mathfrak{S})$. De même $\mathfrak{S}$ est essentiel dans l'idéal à droite réduit $A\varepsilon$ où $\varepsilon=\varepsilon^2$ et $(1-\varepsilon)A=r(\mathfrak{S})$. Alors $A\varepsilon = lr(\mathfrak{S})$ est un idéal bilatère. Comme $\mathfrak{S} < lr(\mathfrak{S}) < Ae$, $Ae=A\varepsilon$ et $Ae$ est bilatère et réduit. $e=\varepsilon$ est central.

## VI. **Enveloppe quasi-continue d'un module.**

LEMME 6.1. *Soient $M$ un $A$-module, $E(M)$ une enveloppe injective de $M$, $Q(M)$ l'intersection des sous-modules quasi-continus de $E(M)$ contenant $M$. Alors $Q(M)$ est un module quasi-continu.*

La vérification est immédiate.

DÉFINITION 6.2. On appelle envoloppe *quasi-continue* d'un $A$-module à gauche $M$ tout $A$-module $M$ extension quasi-continue minimale de $M$. Elle est définie à un $M$-isomorphisme près ([9], p. 14).

PROPOSITION 6.3. *Soit $A$ un anneau à idéal singulier à gauche nul. Son enveloppe quasi-continue à gauche est un anneau de Baer quasi-continu à gauche.*

Soient $B=E({}_AA)$, $Q$ l'enveloppe quasi-continue de ${}_AA$ contenue dans $B$. Alors $1 \in Q$ et $Q$ contient les idempotents de l'anneau $B$. On décompose $B$ suivant le Corollaire 5.4; alors, $Q=Qe \oplus B(1-e)$ (Corollaire 4.13). On controle ensuite que les éléments de $Qe$ sont de la forme $q=\sum_{i=1}^{p_q} a_ie_i$ où $a_i \in Ae$ et $e_i=e_i^2 \in Be$ $(1 \leq i \leq p_q)$. Il est alors immédiat que $Qe$ est un anneau. $Q$ est donc un anneau.

COROLLAIRE 6.4. *Soit $A$ un anneau à idéal singulier nul à gauche et à droite. Alors $A$ a même enveloppe injective à gauche et à droite si et seulement si il a méme enveloppe quasi-continue.*

(D'après la Proposition 5.10, le Corollaire 5.4, le propriété 3.3, 7°, et [13] Théorème 1.4).

## VII. **Anneau associé à un module quasi-continu**

THÉORÈME 7.1. ([15], dans le cas d'un anneau). *Soit $M$ un $A$-module continu. Alors, l'anneau associé $S(M)$ est régulier, $j(M)$ est égal au radical de Jacobson de l'anneau des endomorphismes de $M$, les idempotents de $S(M)$ sont les classes des pr ojecteurs de $M$, et l'anneau $S(M)$ est continu à droite.*

Ce résultat a été obtenu indépendamment de notre étude par J. Bichot (papier non publié).

On peut par exemple reprendre la démonstration de [7] concernant l'anneau associé à un module injectif (p. 102, Proposition 1). On remarque aussi que si $E$ est une enveloppe injective de $M$, $S(M)$ contient les idempotents de $S(E)$ (Proposition 7.5). La dernière assertion résulte alors du Théorème 5 de [13] (p. 66).

COROLLAIRE 7.2. *Soit $A$ un anneau continu à gauche et noethérien à gauche; alors $A$ est artinien à gauche.*

En effet, $A/_{j}(A)$ est régulier et noethérien à gauche donc semi-simple. Comme $A$ est noéthérien, $j(_AA)$ est nilpotent, et $A$ est artinien à gauche.

COROLLAIRE 7.3. *Soit $A$ un anneau continu à gauche et à droite. Alors $A$ est quasi-fro-bénuisien si et seulement si $A$ est noethérien à gauche et à droite.*

Cela résulte du Corollaire 7.2 et de [15], Théorème 7.10.

PROPOSITION 7.4. *Soit $M$ un $A$-module à gauche quasi-continu. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées;*

(1) *l'anneau $S(M)$ associé à $M$ contient les idempotents de $S(E)$, anneau associé à $E=E(M)$;*

(2) *toute famille d'idempotents orthogonaux se reléve en une famille de projecteurs orthogonaux de $M$;*

(3) *$S(M)$ est un anneau de Baer qui vérifie la propriété $(C_3)$ d'addition des facteurs directs;*

(4) *les idéaux à gauche facteurs directs de $S(M)$ consistuent un treillis supérieurement continu.*

On convient d'identifier $S(M)$ à son image canonique dans $S(E)$.

PROPOSITION 7.5. *Soit $M$ un $A$-module dont les sous-modules à gauche compléments sont facteurs directs de $M$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes;*

(1) *L'anneau $S(M)$ associé à $M$ est réduit;*

(2) *Les idempotents de $S(M)$ sont centraux;*

(3) *Pour tout facteur direct P de M et tout* $f \in End_A M$, $P \cap f^{-1}(P) < P$;

(4) *Pour tout facteur direct* $P \neq 0$ *de M et tout* $f \in End_A M$, $P \cap f^{-1}(P) \neq 0$.

Les implications $1 \Rightarrow 2$ et $3 \Rightarrow 4$ sont évidentes.

$2 \Rightarrow 3$ Si $p = p^2 \in \mathrm{End}_A M$ a pour image $P$, on a $fp - pf \in J(M)$ et $T = P \cap \mathrm{Ker}(fp - pf) < P$; or $T \subset f^{-1}(P)$ donc $T = P \cap f^{-1}(P) < P$.

$4 \Rightarrow 1$ Soit $0 \neq \bar f \in S(M)$, avec $\bar f^2 = 0$. Soit $Q$ un facteur direct de $M$ essentiel sur $\mathrm{Ker} f$; posons $M = P \oplus Q$. Alors $P \neq 0$; soit $x \in P \cap f^{-1}(P) \cap \mathrm{Ker} f^2$. Alors $f(x) \in P \cap \mathrm{Ker} f = 0$ et $x \in P \cap \mathrm{Ker} f = 0$ d'où $P \cap f^{-1}(P) = 0$. Contradiction.

Proposition 7.6. *Soit E un A-module injectif (resp. quasi-injectif). Alors E se décompose en somme directe* $E = F \oplus F'$ *où les anneaux associés vérifient l'égalité* $S(E) = S(F) \times S(F')$, $S(F)$ *étant un anneau réduit et* $S(F')$ *n'ayant aucun idéal bilatère non nul réduit. De plus,* $F'$ *se décompose en somme directe* $F' = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ *où* $E_1$ *et* $E_2$ *sont isomorphes,* $E_3$ *étant isomorphe à un facteur direct de* $E_1 \oplus E_2$.

Il suffit de le montrer quand $M$ est injectif. On sait qu'il existe un projecteur $p$ de $E$ tel que $\bar p$ soit central dans $S(E)$, $S(E)\bar p$ réduit, $S(E)\overline{(1-p)}$ sans idéal bilatère réduit. On pose $p(E) = F$ et $\mathrm{Ker}\, p = F'$. Si $f \in \mathrm{Hom}(F, F')$, $\overline{(1-p)fp} = 0$ donc $f \in j(E)$. Alors $S(E) = S(F) \times S(F')$.

D'après le théorème 4.12 il existe des idempotents de $S(E)$ donc des projecteurs orthogonaux $p_1$, $p_2$, $p_3$ de $E$ (Proposition 7.4) tels que $S(F') = S(F')\bar p_1 \oplus S(F')\bar p_2$, $S(F')\bar p_3$, où $S(F')\bar p_1$ et $S(F')\bar p_2$ sont isomorphes et $S(F')\bar p_3$ isomorphe à un facteu direct de $S(F')\bar p_1 \oplus S(F')\bar p_2$. Il est facile de vérifier que les sous-modules $E_1 = p_1(E)$ et $E_2 = p_2(E)$ sont isomorphes et $E_3 = p_3(E)$ est isomorphe à un facteur direct de $E_1 \oplus E_2$. D'autre part, on peut supposer $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, d'où $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

Corollaire 7.7. *Soit M un M-module à gauche quasi-continu; alors M se décompose en somme directe* $M = N \oplus N'$ *où* $N'$ *est quasi-injectif et* $S(N)$ *réduit.*

(Cf. Corollaire 4.3).

## Bibliographie


1. J. Bichot, *Essentialité et importance dans les modules* (Doctorat de spécialité Faculté des Sciences de Lyon, 20 septembre 1968. Imprimé à Beyrouth, 1969).

2. A. Cailleau et G. Renault, *Etude des modules Σ-quasi-injectifs*. C.R. Acad. Sc. Paris, t. **270**, p. 1391–1394 (1er juin 1970).

3. A. Cailleau et G. Renault, *Anneau associé à une somme directe infinie de modules quasi-injectifs*. Archiv. der Mathematik, vol. XXI, 1970 fasc. 6 (p. 561–566).

4. C. Faith, *Rings with ascending condition on annihilators*. Nagoya Math. J. **27-1** (1966), p. 179–191.

5. L. Fuchs, *Abelian groups*. Pergamon Press, 1960.

6. L. Kaplansky, *Rings of operators*. W. A. Benjamin, Inc., 1968.

7. J. Lambek, *Lectures on rings and modules* (Blaisdell Publishing Company) 1966.

8. B. Osofsky, *Endomorphism rings of quasi-injective modules*. Can. J. Math. Vol. 20, n° 4 (1968), p. 895–903.

9. G. Renault, Thèse Bull. Soc. Math. France, mémoire 9, supplément au numéro de mars 1967.

10. G. Renault, *Anneaux réduits non commutatifs*. Journal de Mathématiques pures et appliquées **46**, 1967, p. 203–214.

11. G. Renault, *Anneau associé à un module injectif.* Bull. Soc. Math. 2 ème série, **92,** 1968, p. 53–58.

12. Y. Utumi, *On continuous regular rings and semi-simple self-injective rings.* Can. J. Math. **12** (1960), p. 597–605.

13. Y. Utumi, *On continuous regular rings.* Can. Math. Bull. **4** (1961), p. 63–69.

14. Y. Utumi, *On rings of which any one sided quotient rings are two-sided.* Proc. Amer. Math. Soc., **14,** (1963), p. 141–147.

15. Y. Utumi, *On continuous rings and self-injective rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), p. 158–173.

16. K. G. Wofson, *An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations*, Amer. J. Math., **75** (1957), 358–386.

17. D. Zelinsky, *Every linear transformation is a sum of non-singular ones*, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 627–630.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE POITIERS
40, AVENUE DU RECTEUR PINEAU
86—POITIERS FRANCE
FRANCE