

SUR LE SEMI-GROUPE DE L'OPERATEUR INVERSE DE Δ

YOSHIFUSA ITO

1. Introduction.

Soient N le noyau newtonien sur l'espace euclidien \mathbf{R}^n à dimension $n \geq 3$ et E l'espace de Banach formé par des fonctions finies et continues définies dans \mathbf{R}^n s'annulant à l'infini et normé usuellement. Définissons l'opérateur de convolution K par $Kf = -N * f$. Dans cette note nous traitons l'opérateur K dans E . D'abord on remarque l'existence de l'extension fermée \bar{K} de l'opérateur K . On note $\bar{\Delta}$ l'extension fermée de l'opérateur de Laplace Δ . Soient $(G_t)_{t \geq 0}$ et $(T_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe des opérateurs dont le générateur infinitésimal est $\bar{\Delta}$ et celui dont le générateur infinitésimal est \bar{K} . On montrera que la transformation de Bessel applique $(G_t)_{t \geq 0}$ à $(T_t)_{t \geq 0}$, et chaque opérateur T_t est défini par la différence de la mesure de Dirac δ à l'origine et d'une fonction s_t analytique en dehors de l'origine. La fonction s_t est sphériquement symétrique et à décroissance rapide. Elle oscille encore infiniment sur toute la demi-droite. En l'appliquant on peut obtenir la solution explicite de problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \text{(a)} & \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \bar{K}u(x, t) \\ \text{(b)} & u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

La solution du présent problème est représentée par

$$u(x, t) = T_t u_0(x) = u_0(x) - s_t * u_0(x),$$

si u_0 appartient au domaine de \bar{K} .

Finalement on montrera que

$$\int_0^\infty T_t dt = -\bar{\Delta}$$

Received February 18, 1976.

au sens des distributions; c'est-à-dire, $-\bar{A}$ est un noyau de potentiel engendré par $(T_t)_{t \geq 0}$.

L'étude de \bar{K} au lieu de \bar{A} dans $\partial u / \partial t = \bar{A}u$ est fondée sur l'intérêt au processus appelé "l'inhibition latérale" par les physiologistes ([4], [5] et [6]). La forme de la différence $\delta - s_t$ représente approximativement la réponse du système nerveux à stimulation du petit groupe des récepteurs dans l'organe sensoriel.

2. Préliminaires.

On désigne par x ou y un élément de \mathbf{R}^n et par s ou t un élément de $\mathbf{R}_+^1 = \{s \in \mathbf{R}^1 \mid s \geq 0\}$.

On note:

E_0 l'espace des fonctions finies et continues dans \mathbf{R}^n à support compact.

E l'espace de Banach formé par des fonctions finies et continues dans \mathbf{R}^n s'annulant à l'infini et muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |f(x)|$.

L^1 l'espace formé par des fonctions sommables dans \mathbf{R}^n .

Soit L un opérateur dans E . On écrit $D(L)$ le domaine de L . On a évidemment $E \supset D(\bar{K}) \supset D(K) \supset E_0$. Les sous-espaces $D(\bar{K})$, $D(K)$ et E_0 sont denses dans E .

La transformée de Fourier d'une fonction f dans \mathbf{R}^n est définie par

$$\mathcal{F}f(y) = \int f(x) \exp(2\pi\sqrt{-1}x \cdot y) dx$$

dès que l'intégrale a un sens, où $x \cdot y$ est le produit scalaire dans \mathbf{R}^n . La transformée inverse de Fourier d'une fonction g dans \mathbf{R}^n s'écrit comme $\mathcal{F}^{-1}g$.

On désigne par δ la mesure de Dirac à l'origine et par I l'opérateur d'identité.

On pose

$$g_s(x) = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4s}\right).$$

Alors

$$\mathcal{F}g_s(y) = e^{-4\pi^2 s |y|^2}.$$

La fonction bessélienne du premier ordre est définie par

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad \text{si } \arg z \neq \pi.$$

On appelle la fonction bessélienne du troisième ordre la fonction $K_\nu(z)$ définie par

$$\text{i) } K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi} \quad \text{si } \nu \text{ n'est pas entier,} \quad (1)$$

$$\text{ii) } K_m(z) = \frac{(-1)^m}{2} \left[\frac{\partial I_{-m}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_m(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=m} \quad \text{si } m \text{ est entier,} \quad (2)$$

où I_ν est la fonction bessélienne modifiée du premier ordre définie par

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \quad \text{si } \arg z \neq \pi. \quad (3)$$

Il est bien connu que $K_\nu(z)$ est représentée par l'intégrale suivante ([3] p. 183):

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{z^2}{4t}\right) \cdot t^{-\nu-1} dt$$

pour $\nu > 0$ et $z > 0$.

En modifiant cette égalité, on a

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2 r^2} - 4\pi^2 s r^2\right) r^{2\nu-1} dr = \frac{1}{(2\pi)^{2\nu}} \left(\frac{t}{s}\right)^{\nu/2} K_\nu(2\sqrt{st})$$

pour $\nu > 0$, $s > 0$ et $t > 0$. (4)

Soit τ_x la translation de x . Rappelons que T est un opérateur de convolution sur un espace vectoriel V formé par des fonctions si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- i) $\tau_x V = V$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.
- ii) $\tau_x(Tf) = T(\tau_x f)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et toute $f \in V$.

Dans cette note le noyau newtonien est

$$N = \frac{1}{(n-2)\Omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}},$$

où Ω_n est l'aire de la sphère d'unité dans \mathbf{R}^n . On appelle le potentiel newtonien d'une fonction f

$$N_* f(x) = \frac{1}{(n-2)\Omega_n} \int \frac{f(x-y)}{|y|^{n-2}} dy$$

dès que l'intégrale a un sens. Il est clair que $K: f \rightarrow -N_* f$ est un opérateur linéaire de convolution.

3. Le semi-groupe associé à l'opérateur \bar{K} et un problème de Cauchy.

L'opérateur K n'est pas fermé dans E . En effet, il existe un exemple suivant :

EXEMPLE. Soient ε une constante positive $< 1/2$ et $(\tilde{W}_k)_{k=1}^\infty$ une suite des fonctions finies, continues et non-négatives sur R^1 qui satisfait aux conditions suivantes :

- 1) $\text{supp } \tilde{w}_k \subset (k - \varepsilon, k + \varepsilon)$.
- 2) $\tilde{w}_k < 1/\varepsilon k^2$.
- 3) $\int_0^\infty \tilde{w}_k(r) r dr = 1/k$.
- 4) $\int_0^\infty \tilde{w}_k(r) r^{n-1} dr = k^{n-3}$.

Posons

$$w_k(x) = \tilde{w}_k(|x|)$$

et

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^i (-1)^k w_k(x) \quad \text{pour } i \geq 1.$$

Alors (f_i) et (Kf_i) convergent uniformément lorsque $i \rightarrow \infty$. Posons

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x).$$

Alors Kf n'a pas de sens ; c'est-à-dire, f n'appartient pas au domaine de K . Donc K n'est pas un opérateur fermé. Mais il existe l'extension fermée de K .

PROPOSITION 1. *L'opérateur K possède l'extension fermée \bar{K} .*

Démonstration. Soit $G(K)$ le graphe de K . Il suffit de montrer que $G(K)$ est le graphe d'un opérateur. Soit $(f_m)_{m=1}^\infty$ une suite dans E telle que $f_m \rightarrow 0$ et $Kf_m \rightarrow g \in E$. Soient ρ_r la mesure uniforme sur la sphère de centre 0 et de rayon r avec

$$\int d\rho_r = 1, \quad \text{et } \varphi \in E_0.$$

Posons

$$h_r(x) = \varphi * (\delta - \rho_r)(x).$$

Alors on a

$$\int g(x)h_r(x)dx = -\lim_{m \rightarrow \infty} \int N * f_m(x)h_r(x)dx = -\lim_{m \rightarrow \infty} \int N * h_r(x)f_m(x)dx = 0 .$$

D'autre part, on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int g(x)\rho_r * \varphi(x)dx = 0 .$$

Donc

$$\int g(x)\varphi(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int g(x)h_r(x)dx + \int g(x)\rho_r * \varphi(x)dx \right) = 0 .$$

Comme φ est quelconque, $g = 0$.

c.q.f.d.

Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante de $\bar{\mathcal{A}}$. Posons

$$K_p = \frac{1}{p} \left[I - \frac{1}{p} N_{1/p} \right]$$

pour $p > 0$. Alors $(K_p)_{p>0}$ est la résolvante de \bar{K} . Donc on voit qu'il existe le semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ des opérateurs de classe C_0 dont le générateur infinitésimal est \bar{K} , car

$$\int N_p dx = \frac{1}{p}$$

(v. le théorème 3.3, chap. 1, [2]).

Ce semi-groupe $(T_t)_{t \geq 0}$ est donné explicitement dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1. Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe des opérateurs dont le générateur infinitésimal est \bar{K} . Alors, pour $t \geq 0$ quelconque, T_t est l'opérateur linéaire de convolution défini par la différence de δ et d'une fonction s_t sphériquement symétrique; c'est-à-dire,

$$T_t f = f - s_t * f \quad \text{pour } f \in E .$$

La fonction s_t est obtenue de $(g_s)_{s \geq 0}$ par la transformation de Bessel suivante:

$$s_t(x) = \int_0^\infty g_s(x) \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}) ds .$$

La fonction s_t possède les propriétés suivantes:

- a) s_t est analytique en dehors de l'origine.
 b) s_t est à décroissance rapide lorsque $|x| \rightarrow \infty$.
 c) $|s_t| \leq tN$ et $(s_t(x)/tN(x)) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow \infty$.
 d) $s_t \in L^1$ et $\int |s_t(x)| dx$ est une constante.

Démonstration. Comme la fonction $\sqrt{(t/s)}J_1(2\sqrt{st})$ de s est bornée sur $(0, \infty)$, on peut définir

$$s_t(x) = \int_0^\infty g_s(x) \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}) ds$$

et on voit facilement que a) a lieu.

En utilisant l'égalité

$$\int_0^s (2\sqrt{ut})^\nu J_{\nu-1}(2\sqrt{ut}) \sqrt{\frac{t}{u}} du = (2\sqrt{st})^\nu J_\nu(2\sqrt{st}),$$

on a, pour tout entier $m \geq 3$,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{e^{-|x|^{2/4s}}}{s^{m/2}} J_\nu(2\sqrt{st}) ds \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-|x|^{2/4s}}}{t^{1/2} s^{m/2+1/2}} \left(\frac{m}{2} + \frac{\nu}{2} - 1 + \frac{|x|^2}{2s} \right) J_{\nu+1}(2\sqrt{st}) ds \\ &= O\left(\frac{1}{|x|^{m-1}}\right). \end{aligned}$$

Par récurrence, pour tout l'entier k

$$|x|^k s_t(x) \longrightarrow 0$$

lorsque $|x| \rightarrow \infty$. De la même manière, on voit que, pour des polynômes p, q quelconques,

$$p(x)q(D_x)s_t(x) \longrightarrow 0$$

lorsque $|x| \rightarrow \infty$, où

$$D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

d'où b).

Comme

$$t \geq \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}) \geq t \left(1 - \frac{st}{2} \right),$$

on a, pour $\eta < 4/t$,

$$\begin{aligned} tN(x) &= t \int_0^\infty g_s(x) ds > \int_0^\infty g_s(x) \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}) ds \\ &= s_t(x) > t \left(1 - \frac{\eta t}{2}\right) \int_0^\infty g_s(x) ds - 2t \int_\eta^\infty g_s(x) ds \\ &> t \left(1 - \frac{\eta t}{2}\right) N(x) - \frac{4t}{(4\pi)^{n/2} (n-2) \eta^{(n/2)-1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$1 > \frac{s_t(x)}{tN(x)} > 1 - \frac{\eta t}{2} - \frac{4}{(4\pi)^{n/2} (n-2) \eta^{(n/2)-1} N(x)}.$$

Par conséquent, c) a lieu.

D'après b) et c), il est clair que $s_t \in L^1$. En posant $u = st$, on a

$$s_t(x) - \int_0^\infty g_s(x) \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}) ds = t^{n/2} \int_0^\infty g_u(xt^{1/2}) \sqrt{\frac{1}{u}} J_1(2\sqrt{u}) du.$$

Donc

$$\int |s_t(x)| dx = t^{n/2} \int \left| \int_0^\infty g_u(xt^{1/2}) \sqrt{\frac{1}{u}} J_1(2\sqrt{u}) du \right| dx = \text{const}.$$

Alors on a d).

Définissons l'opérateur linéaire U_t de convolution sur E par

$$U_t f = f - s_t * f.$$

Montrons que $(U_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe de classe C_0 . Posons

$$j(s, t) = \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}).$$

D'après l'égalité

$$1 - e^{-t/p} = \int_0^\infty e^{-ps} \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}) ds \quad (p > 0, t > 0)$$

(v. vol. 1, p. 245 [1]), on a

$$j(s, t_1 + t_2) = j(s, t_1) + j(s, t_2) - \int_0^s j(s_1, t_1) j(s - s_1, t_2) ds_1.$$

Alors, pour $t_1 > 0$ et $t_2 > 0$ quelconques, on a

$$\begin{aligned}
 s_{t_1+t_2}(x) &= \int_0^\infty g_s(x)j(s, t_1 + t_2)ds \\
 &= s_{t_1}(x) + s_{t_2}(x) - \int_0^\infty \int_0^\infty g_{s_1} * g_{s_2}(x)j(s_1, t_1)j(s_2, t_2)ds_1 ds_2 \\
 &= s_{t_1}(x) + s_{t_2}(x) - s_{t_1} * s_{t_2}(x) .
 \end{aligned}$$

Donc

$$U_{t_1+t_2}f = f - s_{t_1} * f - s_{t_2} * f + s_{t_1} * s_{t_2} * f = U_{t_1}(U_{t_2}f) .$$

La continuité de $t \rightarrow U_t$ résulte de celle de $t \rightarrow j(\cdot, t)$.

Comme $s_t(x)/tN(x) \leq 1$ et $s_t(x)/tN(x) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$, on voit que le générateur infinitésimal de $(U_t)_{t \geq 0}$ coïncide avec K dans E_0 . Donc le semi-groupe $(U_t)_{t \geq 0}$ est égal à $(T_t)_{t \geq 0}$. c.q.f.d.

COROLLAIRE. (I) *La solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases}
 \text{(a)} & \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \bar{K}u(x, t) \\
 \text{(b)} & u_0(x, 0) = u_0(x) \quad u_0 \in D(\bar{K})
 \end{cases}$$

est représentée par

$$u(x, t) = T_t u_0(x) = u_0(x) - s_t * u_0(x) .$$

(II) *Soit $(u_0^{(m)})_{m=1}^\infty$ une suite de $D(K)$ telle que $u_0^{(m)} \rightarrow 0$ fortement dans E lorsque $m \rightarrow \infty$. Alors $\|u^{(m)}(\cdot, t)\| \rightarrow 0$ uniformément sur $[0, \infty)$, où $u^{(m)}$ est la solution du problème du Cauchy pour la valeur initiale $u_0^{(m)}$.*

En effet, on voit facilement que (I) a lieu, d'après le théorème 1. Comme

$$\int |s_t(x)| dx$$

est égale à une constante M ,

$$\|u^{(m)}(\cdot, t)\| \leq (1 + M) \|u_0^{(m)}\|$$

pour tout $t \in [0, \infty)$, d'où (II).

Remarque. D'après (I), la solution u n'est pas toujours analytique dans $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, et donc son allure est différent de celle de la solution du problème de Cauchy usuel pour l'opérateur différentiel.

La fonction $s_t(x)$ de x et de t peut être explicitement représentée

par une série. Le lemme suivant sera utilisé dans sa démonstration de la proposition 2.

LEMME. Soient U et V deux distributions tempérées définies dans \mathbf{R}^n et sphériquement symétriques. Si $U(g_s) = V(g_s)$ pour $s > 0$ quelconque, alors $U = V$.

En effet, soient f et h deux fonctions continues, tempérées et sphériquement symétriques définies dans \mathbf{R}^n . Montrons que si, pour $s > 0$ quelconque,

$$\int f(x)g_s(x)dx = \int h(x)g_s(x)dx, \quad (5)$$

alors $f = h$. Posons $\tilde{f}(|x|) = f(x)$, $\tilde{h}(|x|) = h(x)$ et $\tilde{g}_s(|x|) = g_s(x)$. Alors \tilde{f} et \tilde{h} sont deux fonctions continues et tempérées sur $[0, \infty)$ et l'égalité (5) s'écrit comme

$$\int_0^\infty \tilde{f}(t)\tilde{g}_s(t)t^{n-1}dt = \int_0^\infty \tilde{h}(t)\tilde{g}_s(t)t^{n-1}dt.$$

L'injectivité de la transformation de Laplace donne que $\tilde{f} = \tilde{h}$ sur $[0, \infty)$, d'où $f = h$ sur \mathbf{R}^n .

Soit $s_0 > 0$ quelconque. En posant

$$u = U * g_{s_0} \quad \text{et} \quad v = V * g_{s_0},$$

on voit que u et v sont deux fonctions continues, tempérées et sphériquement symétriques, car g_{s_0} est à décroissance rapide et sphériquement symétrique. Soit $s > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \int u(x)g_s(x)dx &= U(g_{s_0} * g_s) = U(g_{s_0+s}) = V(g_{s_0+s}) \\ &= V(g_{s_0} * g_s) = \int v(x)g_s(x)dx. \end{aligned}$$

Donc on a $u = v$; c'est-à-dire,

$$U * g_{s_0} = V * g_{s_0}.$$

En faisant $s_0 \rightarrow 0$, on a $U = V$.

PROPOSITION 2. La fonction s_t est explicitement représentée de la forme suivante:

i) Pour n impair,

$$s_t(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} t^{n/2}}{\pi^{n/2-1}} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(|x| t^{1/2})^{2i-n}}{2^{2i} \Gamma(i) \Gamma(i+1) \Gamma(-n/2 + i + 1)} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(|x| t^{1/2})^{2i}}{2^{2i+n} \Gamma(i + n/2) \Gamma(i + n/2 + 1) \Gamma(i + 1)} \right]. \quad (6)$$

ii) Pour n pair,

$$s_t(x) = \left(\frac{t}{\pi}\right)^{n/2} \left[\sum_{i=1}^{n/2-1} \frac{(-1)^{i+1} (n/2 - i - 1)!}{2^{2i} \Gamma(i) \Gamma(i+1)} (|x| t^{1/2})^{2i-n} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2+1} (|x| t^{1/2})^{2i}}{2^{2i+n} \Gamma(i+1) \Gamma(i + n/2) \Gamma(i + n/2 + 1)} \right. \\ \left. \times \left(\sum_{k=1}^i \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2} \frac{1}{k} - 3C - \log \frac{|x|^2 t}{4} \right) \right], \quad (6a)$$

où C est la constante d'Euler.

Démonstration. En utilisant la formule dans [1] (vol. 1, p. 245), on a

$$\int_0^{\infty} e^{-4\pi^2 s |x|^2} \sqrt{\frac{t}{s}} J_1(2\sqrt{st}) dt = 1 - e^{-t/4\pi^2 |x|^2}.$$

Donc

$$\mathcal{F} s_t(x) = 1 - e^{-t/4\pi^2 |x|^2}.$$

En utilisant cette égalité et la formule de Parseval, on a

$$\Omega_n \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2 r^2} - 4\pi^2 s r^2\right) r^{n-1} dr = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} - \int s_t(x) g_s(x) dx \quad (7)$$

Soit n un entier impair. En utilisant (1), (3) et (4), on a

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2 r^2} - 4\pi^2 s r^2\right) r^{n-1} dr \\ = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{(2\pi)^n} \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{s}\right)^{n/4} \left[(st)^{-n/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(st)^i}{i! \Gamma(-n/2 + i + 1)} - (st)^{n/4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(st)^i}{i! \Gamma(n/2 + i + 1)} \right]. \quad (8)$$

Posons

$$\alpha_i = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2^{2i} \pi^{n/2-1} \Gamma(i) \Gamma(i+1) \Gamma(-n/2 + i + 1)} \quad \text{pour } i \geq 1,$$

et

$$b_i = \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{2^{2i+n}\pi^{n/2-1}\Gamma(i+n/2)\Gamma(i+n/2+1)\Gamma(i+1)} \quad \text{pour } i \geq 0 .$$

En regardant les ordres de (a_i) et de (b_i) , on voit que

$$s_i^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{n/2} (|x| t^{1/2})^{2i-n}$$

et

$$s_i^{(2)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{n/2} (|x| t^{1/2})^{2i}$$

convergent absolument en dehors de l'origine. Posons $s'_i(x) = s_i^{(1)}(x) - s_i^{(2)}(x)$. Alors la fonction s'_i est localement sommable, car la singularité de $s_i^{(1)}$ est d'ordre $(2 - n)$ à l'origine. En utilisant (8) et l'égalité

$$\int_0^{\infty} r^{2k-1} e^{-r^{2/4s}} dr = 2^{2k-1} s^k \Gamma(k) \quad \text{pour } k > 0 \text{ et } s > 0 , \tag{9}$$

on a

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2|x|^2} - 4\pi^2s|x|^2\right) dx = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} - \int s'_i(x) g_s(x) dx . \tag{10}$$

En comparant (7) avec (10), on a

$$\int s_i(x) g_s(x) dx = \int s'_i(x) g_s(x) dx \tag{11}$$

Soit n un entier pair. En utilisant (2), (3) et (4), on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{4\pi^2r^2} - 4\pi^2sr^2\right) r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left(\frac{t}{s}\right)^{n/4} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n/2-1} \frac{(-1)^i (n/2 - i - 1)}{i!} (st)^{i-n/4} \right. \\ & \quad + \frac{(-1)^{n/2}}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(st)^{n/4+i}}{i! \Gamma(n/2 + i + 1)} \\ & \quad \left. \times \left(\sum_{k=1}^i \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2} \frac{1}{k} - 2C - \log st \right) \right] . \end{aligned}$$

Posons

$$c_i = \frac{(-1)^{i+1} (n/2 - i - 1)}{2^i \pi^{n/2} \Gamma(i) \Gamma(i + 1)} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1 ,$$

$$d_i = \frac{(-1)^{n/2+1}}{2^{2i+n} \Gamma(i + n/2) \Gamma(i + n/2 + 1) \Gamma(i + 1)}$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^i \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{i+n/2} \frac{1}{k} - 3C + 2 \log 2 \right) \quad \text{pour } i \geq 0,$$

et

$$e_i = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{2i+n-1} \pi^{n/2} \Gamma(i+n/2) \Gamma(i+n/2+1) \Gamma(i+1)} \quad \text{pour } i \geq 0.$$

De la même façon, les deux séries

$$s_i^{(3)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i (|x| t^{1/2})^{2i}$$

et

$$s_i^{(4)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i (|x| t^{1/2})^{2i} \log |x| t^{1/2}$$

convergent absolument en dehors de l'origine. Posons

$$s'_i(x) = \sum_{i=1}^{n/2-1} c_i (|x| t^{1/2})^{2i-n} + s_i^{(3)}(x) + s_i^{(4)}(x).$$

Alors $s'_i(x)$ est localement sommable dans R^n , car la sigualité de $s'_i(x)$ est d'ordre $(2-n)$ à l'origine. En utilisant (9), (12) et l'égalité

$$\int_0^{\infty} r^{2k-1} e^{-r^2/4s} \log r dr = 2^{2k-2} s^k [\log 4s \cdot \Gamma(k) + \Gamma'(k)] \quad \text{pour } k > 0 \text{ et } s > 0,$$

on voit que

$$\int \exp \left(-\frac{t}{4\pi^2 |x|^2} - 4\pi^2 s |x|^2 \right) dx = \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} - \int s'_i(x) g_s(x) dx. \quad (10a)$$

En comparant (7) avec (10a), on a

$$\int s_i(x) g_s(x) dx = \int s'_i(x) g_s(x) dx. \quad (11a)$$

En utilisant le lemme, (11) et (11a), on obtient $s_i = s'_i$. Donc on a (8) et (8a).

Remarque. On a

$$\int s_i(x) dx = 1.$$

Pour un polynôme $p(x)$ s'annulant à l'origine quelconque,

$$\int p(x) s_i(x) dx = 0.$$

Lorsque $|x| \rightarrow \infty$, s_t oscille infiniment en prenant des valeurs positives et négatives alternativement.

En effet, soit $p_1(x)$ un polynôme quelconque. Alors on a

$$\int p_1(x)s_t(x)dx = \lim_{x \rightarrow 0} p_1\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}D_x\right)(1 - e^{-t/4\pi^2|x|^2}) = p_1(0).$$

Donc on a deux l'égalités dans la remarque. Si s_t n'oscille pas infiniment en prenant des valeurs positives et négatives alternativement, il est impossible que

$$\int p(x)s_t(x)dx = 0.$$

4. Comparaison de $(T_t)_{t \geq 0}$ et du semi-groupe associé au noyau newtonien. Définissons l'opérateur G_t par

$$G_t f(x) = g_t * f(x) = \int \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|y|^2/4t} f(x - y) dy$$

dès que l'intégrale a un sens. Alors $(G_t)_{t \geq 0}$ est le semi-groupe associé au noyau newtonien. Il est bien connu que

$$\int_0^\infty G_t f dt = N f,$$

où le noyau newtonien N et l'opérateur dans E défini par N sont identifiés. Montrons que l'opérateur $-\bar{\Delta}$ peut être aussi considéré comme le noyau de potentiel engendré par $(T_t)_{t \geq 0}$. En effet, soit \mathcal{S} l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide sur R^n . Si $\varphi \in \mathcal{S}$, il est clair que $T_t \varphi$ est continue comme une fonction de t . Considérons la fonction

$$\int_0^M T_t \varphi(x) dt$$

de x , alors

$$\mathcal{F}\left(\int_0^M T_t \varphi dt\right) = \int_0^M e^{-t/4\pi^2|x|^2} (\mathcal{F}\varphi) dt.$$

En faisant $M \uparrow \infty$, on a

$$\int_0^\infty T_t \varphi dt = -\Delta \varphi$$

au sens des distributions.

Les semi-groupes $(G_t)_{t \geq 0}$ et $(T_t)_{t \geq 0}$ sont de classe C_0 . Le générateur infinitésimal de $(G_t)_{t \geq 0}$ est \bar{A} et celui de $(T_t)_{t \geq 0}$ est \bar{K} . Donc la relation entre $(G_t)_{t \geq 0}$, N et Δ est analogue à celle entre $(T_t)_{t \geq 0}$, $-\Delta$ et $-N$. De plus, lorsque $t \rightarrow \infty$, G_t dilate et T_t se contracte, mais pour $f \in E$ quelconque $G_t f$ et $T_t f \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$). Lorsque $t \rightarrow 0$, G_t et T_t convergent à l'opérateur d'identité.

Pour un nombre $0 < \alpha \leq 1$, la relation suivante est bien connue :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} G_t dt = \frac{\Gamma(n/2 - \alpha)}{4^\alpha \pi^{n/2} \Gamma(\alpha) |x|^{n-2\alpha}} = N^\alpha .$$

De même, on a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_t dt = (-\Delta)^\alpha$$

sur le domaine de $(-\Delta)^\alpha$. En effet, pour $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \int (-\Delta)^\alpha \psi dx &= \int (4\pi^2 |x|^2) \mathcal{F}^{-1} \psi dx = \int \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} (\mathcal{F}(\delta - s_t)) \mathcal{F}^{-1} \psi dt dx \\ &= \int \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_t \psi dt dx = \int \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_t dt \right) \psi dx . \end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_t dt = (-\Delta)^\alpha$$

sur \mathcal{S} . Comme \mathcal{S} est dense dans l'espace de Banach $D((-\Delta)^\alpha)$, on a l'égalité sur le domaine de $(-\Delta)^\alpha$.

Finalement on remarque le semi-groupe associé à l'opérateur inverse du

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

est obtenu de la même manière dès que

$$\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

est elliptique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Erdélyi, A.; Table of integral transforms, McGraw-Hill book company, INC. New York, 1954.
- [2] Крейн, С. Г.; Линейные дифференциальные уравнения в Банаховом пространстве, Москва, 1963.
- [3] Watson, G. N.; A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge, at the university press, 1966.
- [4] Békésy, G.; Neural funneling along the skin and between the inner and outer hair cells of the cochlea, *J. Accoust. Soc. Am.*, **13** (1959), 1236–1249.
- [5] Hartline, H. K. and F. Ratliff; Inhibitory interaction of receptor units in the eye of *Limulus*, *J. Gen. Physiol.*, **40** (1957), 357–376.
- [6] Ratliff, F.; *Mach Bands: Quantitative Studies on Neural Networks in the Retina*, Holden-Day, San Francisco, 1965.

Université de Nagoya
Département de Physiologie