BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 34D10, 34D20
VOL. 29 (1984), 243-248.

COMPARAISON RESULTATS POUR LA STABILITÉ PRATIQUE

THOMAS KIVENTIDIS

We develop some comparison theorems that connect the solutions of a differential system and its perturbation in a manner useful in the practical stability.

1. Introduction-Définitions

Considerons le système

(1) $$\dot{x} = f(t,x) \ , \ x(t_0) = x_0 \ , \ t_0 \geq 0, \ x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et son perturbation système

(2) $$\dot{y} = f(t,y) + F(t,y) \ , \quad y(t_0) = x_0$$

où $f,u \in C(R^+ \times D, \mathbb{R}^n)$ et D est une région convexe de $\mathbb{R}^n$.

On utilesera le lemme qui suit (2):

LEMME. *On suppose que le système (1) admet une solution unique* $x(t,t_0,x_0)$. *On assume, aussi, que* $\phi(t,t_0,x_0) \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} x(t,t_0,x_0)$ *existe et il est continue pour* $t \geq t_0$ *et que* $\phi^{-1}(t,t_0,x_0)$ *existe pour* $t \geq t_0$. *Si* $u(t)$ *est une solution du système*

(3) $$\dot{u}(t) = \phi^{-1}(t,t_0,x_0)F(t,x(t,t_0,x_0)) \ , \ \ u(t_0) = x_0$$

alors une solution $y(t,t_0,x_0)$ *du (2) satisfait la relation*

Received 25 October 1983.

$$y(t,t_o,x) = x(t,t_o,u(t))$$

dans l'intervalle d'existence de la solution $u(t)$.

DÉFINITIONS (3). 1. Le système (2) est pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta,t_o,\|\cdot\|)$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, si pour chaque solution $y(t)$, les conditions $\|y(t_o)\| < \varepsilon_1$ et $\|F(t,y)\| \leq \delta$, $\forall t \geq t_o$, $y \in \overline{B}(\varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon_2\}$, entrainent la relation $\|x(t)\| < \varepsilon_2$, $\forall t \geq t_o$.

2. Le système (2) est pratiquement asymptotiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\delta,t_o,\|\cdot\|)$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_3$, si pour chaque solution $y(t)$ les conditions $\|y(t_o)\| < \varepsilon_1$, et $\|F(t,y)\| \leq \delta$, $\forall t \geq t_o, y \in \overline{B}(\varepsilon_3)$, entrainent: (i) la stabilité pratique par rapport $(\varepsilon_1,\varepsilon_3,\delta,t_o,\|\cdot\|)$, (ii) il existe $T > t_o$ tel que $\|y(t)\| < \varepsilon_2$, $\forall t \geq T$.

Si les définitions précédentes sont valables pour chaque $t_1 \in [t_o,\infty)$, au place de t_o nous avons les stabilités pratiques uniformes. On ajoute, encore, que pour $\delta = 0$, nous avons les stabilités pratiques pour le système (1).

2. Comparaison Théorèmes

THÉORÈME 1. *On assume que les conditions du lemme (§1) et l'estimation*

$$\|\phi^{-1}(t,t_o,x_o)\| \leq \delta^{-1} g(t,\|x_o\|)$$

se satisfont, où $g \in C(R^+ \times R^+, R^+)$ *et le système*

$$\dot{u} = g(t,u), \quad u(t_o) = u_o \geq 0$$

est (uniformément) pratiquement stable par rapport aux données $(\alpha_1,\alpha_2,t_o,|\cdot|)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$. *En outre, on suppose que le système (1) est (uniformément) pratiquement stable par rapport aux données* $(\alpha_2,\varepsilon_2,t_o,\|\cdot\|)$, $\alpha_2 \leq \varepsilon_2$. *Alors, le système (2) est (uniformément) pratiquement stable par rapport aux données* $(\alpha_2,\varepsilon_2,\delta,t_o,\|\cdot\|)$, $\alpha_1 \leq \varepsilon_2$.

DÉMONSTRATION. Par le lemme (§1) nous avons la relation

$$y(t,t_o,x_o) = x(t,t_o,U(t))$$

où $y(t,t_o,x_o)$ est une solution du (2) et $U(t)$ est une solution du (3).

Si on a $\|F(t,x)\| \leq \delta$, $\forall t \geq t_o$, $\|y\| \leq \varepsilon_2$, alors

$$\|\phi^{-1}(t,t_o,x_o)F(t,t_o,x_o)\| \leq \|\phi^{-1}(t,t_o,x_o)\| \delta \ .$$

On met $m(t) = \|U(t)\|$, alors l'inégalité

$$D^+m(t) \leq g(t,m(t))$$

donne l'estimation [1, Theorem 1.4.1]

$$\|U(t)\| = m(t) \leq u(t,t_o,\|x_o\|) \ , \ t \geq t_o$$

où $u(t,t_o,u_o)$ est la solution maximale du (4).

Par l'hypothèse, si on a $\|x_o\| < \alpha_2$, alors

$$\|x(t,t_o,x_o)\| < \varepsilon_2 \ , \ \forall t \geq t_o$$

et si $u_o < \alpha_1$ entraine $\|U(t)\| \leq |u(t,t_o,U(t))| < \alpha_2$.

Mais par le lemme résulte que

$$\|y(t,t_o,x_o)\| = \|x(t,t_o,U(t))\| \ ,$$

et par conséquent, si $\|x_o\| < \varepsilon_1$, on a $\|y(t,t_o,x_o)\| < \varepsilon_2$, $\forall t \geq t_o$.

Quand nous avons la stabilité uniforme les relations ci-dessus sont valables pour l'initial temps $t_1 \geq t_o$ (pour tous $t_1 \geq t_o$). □

THÉORÈME 2. *On assume que les hypothèses du théorème 1 se satisfont et que le système (4) est (uniformément) pratiquement stable par rapport aux données* $(\alpha_1,\alpha_2,t_o,|\cdot|)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$. *En outre, on suppose que le système (1) est (uniformément) asymptotiquement pratiquement stable par rapport aux données* $(\alpha_1,\varepsilon_3,\varepsilon_2,t_o,\|\cdot\|)$, $\varepsilon_3 < \alpha_2 \leq \varepsilon_2$, *alors le système (2) est*

https://doi.org/10.1017/S000497270002147X Published online by Cambridge University Press

(uniformément) asymptotiquement pratiquement stable par rapport aux données $(\alpha_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \delta, t_o, \|.\|)$, $\varepsilon_3 < \alpha_1 \leq \varepsilon_2$.

DÉMONSTRATION. La (uniforme) stabilité pratique du système (2) par rapport aux données $(\alpha_1, \varepsilon_2, \delta, t_o, \|.\|)$, $\alpha_1 \leq \varepsilon_2$, résulte par le théorème 1.

Par l'hypothèse pour le système (1) il y a temps $T(\varepsilon_3, t_o)$ (resp. $T(\varepsilon_3)$ quand nous avons la stabilité uniforme) tel que

$$\|x(t,t_o,x_o)\| < \varepsilon_3 \ , \quad \forall t \geq T$$

quand $\|x_o\| < \alpha_2$.

Mais, on a aussi $\|U(t)\| \leq |u(t,t_o,u_o)| < \alpha_2$, si $|u_o| < \alpha_1$.

Par conséquent, nous aurons

$$\|y(t,t_o,x_o)\| = \|x(t,t_o,U(t))\| < \varepsilon_3 \ , \ \forall t \geq T$$

quand $\|x_o\| < \alpha_1$. □

3. Exemple

On considère le système $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_o) = x_o$, (1), alors on a $\phi(t,t_o,x_o) = \phi(t,t_o)$, où $\phi(t,t_o)$ est la résolvante du (1).

Si on a

$$\|\phi^{-1}(t,t_o)\| \leq \|\delta^{-1}\lambda(t)\| \ ,$$

où $\lambda(t)$ est telle que

$$0 \leq \int_{t_o}^{\infty} \lambda(t)dt = \varepsilon < \infty \ , \ \lambda(t) \geq 0 \ ,$$

alors, on prend $g(t,\|x_o\|) = \lambda(t)$.

Le système (4), en ce cas, est $\dot{u} = \lambda(t)$ et il a les solutions

$$u(t) = \int_{t_1}^{t} \lambda(s)ds + u_o \ , \ u(t_1) = u_o \geq 0 \ , \ t_1 \geq t_o \ .$$

Par conséquent, le système (4) est uniformément pratiquement stable par rapport aux données $(\alpha_1, \alpha_2, t_1, |.|)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $t_1 \geq t_o$, où $u_o < \alpha_1$ et $\varepsilon + u_o < \alpha_2$.

Donc, si le système (1) est (uniformément) pratiquement stable (resp.(uniformément) asymptotiquement pratiquement stable) par rapport aux données $(\alpha_2, \varepsilon_2, t_o, \|.\|)$, $\alpha_2 \leq \varepsilon_2$, (resp.$(\alpha_2, \varepsilon_3, \varepsilon_2, t_o, \|.\|)$, $\varepsilon_3 < \alpha_2 \leq \varepsilon_2$), alors par le théorème 1 (resp. par le théorème 2) résulte que le système (2)

$$\dot{y} = A(t)y + F(t,y) \ , \ y(t_o) = x_o$$

est (uniformément) pratiquement stable (resp.(uniformément) asymptotiquement pratiquement stable) par rapport aux données $(\alpha_1, \varepsilon_2, \delta, t_o, \|.\|)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$, (resp. $(\alpha_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \delta, t_o, \|.\|)$, $\varepsilon_3 < \alpha_1 \leq \varepsilon_2$).

En particulier, on considère le système $\dot{x} = A(t)x$, où

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+q(t)) & 0 \end{pmatrix}$$

Evidemment la maximale characteristique valeur de la matrice $\frac{1}{2}(A + A^T)$ (A^T transposée de A) est $\Lambda(t) = \frac{1}{2}|q(t)|$.

Si on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \Lambda(s)ds < \log \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} \ , \ \forall t_2 > t_1 \geq t_o \ , \ \alpha_2 < \varepsilon_2 \ ,$$

alors [3,§3, p.31] le système (1) est uniformément pratiquement stable par rapport aux données $(\alpha_2, \varepsilon_2, t_o, \|.\|)$, $\alpha_2 < \varepsilon_2$.

En outre, si les relations ci-dessus se verifient pour $\phi^{-1}(t,t_o)$ et $g(t,u)$, on peut utiliser les théorèmes 1 et 2 pour prendre les résultats pour la stabilité pratique du système (2).

Références

[1] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Differential and Integral Inequalities Vol. 1* (Academic Press, New York, 1969).

[2] M. Lord and A.R. Mitchell, "A new approach to the method of nonlinear variation of constants", *Appl. Math. Comput.* 4 (1978), 95-105.

[3] T. Kiventidis, *Practical stability under perturbations*, (Ph.D Thesis, Thessaloniki, 1978).

Département de Mathématique,
Université de Thessaloniki,
Thessaloniki,
Grèce.