

NON-STABLE MAGNETO-HYDRODYNAMICAL PROCESSES IN STARS

A. J. KIPPER

Tartu Observatory, Tartu, Estonia, U.S.S.R.

ABSTRACT

1. The behaviour of the magnetic field of a star was investigated by Cowling, Lamb and Wrubel on the assumption of the star as a solid body and on the assumption that the field variations caused by the extinction do not create any motions of the stellar matter. The important results obtained make possible the interpretation of magneto-hydrodynamical processes in stars only quite roughly. When motions of stellar matter caused by the electromagnetic forces are taken into account new properties may be revealed and the non-stability of the magneto-hydrodynamical processes in stars established. Entangled magnetic fields are the general expression of non-stability.

2. The mathematical criterion of a confused stellar magnetic field is given in the preceding paper from the magneto-hydrodynamical equations for an ideal incompressible fluid. The conception of a confused field as a superposition of various fields of different scales is introduced.

3. It is known that the presence of a magnetic field causes an increase of the stability of hydrodynamical processes, as compared with processes in the absence of a magnetic field. It may most probably be concluded that the extent of confusion of a magnetic field is not the same, as it happens as a result of ordinary turbulent motions in a liquid. However, owing to magneto-hydrodynamical formulae, it may be stated in the present paper that if the field confusion is considered as a superposition of fields of different dimensions and not as a field of entangled magnetic lines, no stability of the above kind can be expected.

4. The theory of a totally entangled magnetic field, as a field in a state of maximum confusion is examined. A very close similarity between a totally entangled magnetic field and the turbulent motion in a viscous liquid is established. The question of the time of extinction of a magnetic field of a star is discussed.

NOTE. Sections 1, 2, 4 of the paper are based upon the results obtained by the author, reported by him at the 4th Cosmological Conference. Section 3 contains unpublished results.

I. EINLEITUNG

Nach der im Jahre 1942 veröffentlichten bekannten Untersuchung von H. Alfvén über magneto-hydrodynamische Wellen begann sich das neue

Gebiet der Astrophysik—die kosmische Elektrodynamik—schnell zu entwickeln. Heutzutage kann man nicht mehr daran zweifeln, dass elektromagnetische Erscheinungen eine entscheidende Rolle in vielen Erscheinungen der kosmischen Physik spielen. Insbesondere können sich Fragen über den inneren Aufbau der Sterne wie auch über ihre Atmosphären nicht weiter entwickeln, ohne die Gesetzmässigkeiten zu berücksichtigen, die sich aus den Gleichungen Maxwells für ein gasartiges und durch hohe Leitfähigkeit gekennzeichnetes Medium kosmischer Dimensionen ergeben.

Die weitere Entwicklung der auf Sterne angewandten kosmischen Elektrodynamik ist mit den Namen von Cowling[1], Lamb[2], Wrubel[3], Chandrasekhar[4], Syrowatskij[5] u. a. verbunden. Es ist erwiesen worden, dass das ausschliesslich durch Selbstinduktion aufrechterhaltene Magnetfeld äusserst stabil ist und erst nach Verlauf von 10^{10} Jahren erlischt. In vielen theoretischen und experimentellen Arbeiten ist auch die erhöhte Stabilität der magneto-hydrodynamischen Prozesse in Vergleich zu den gewöhnlichen hydrodynamischen, ohne Magnetfeld verlaufenden Prozessen festgestellt worden. Hieraus ergibt sich die in der wissenschaftlichen Literatur vertretene Ansicht, dass das Vorhandensein des Magnetfeldes die Entwicklung der Instabilität der hydrodynamischen Bewegung hindert und die turbulenten Strömungen in laminare umwandelt.

Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Frage der Stabilität der magneto-hydrodynamischen Prozesse kosmischer Dimensionen noch nicht als endgültig geklärt betrachtet werden kann. In einem flüssigen Medium ruft die Dämpfung des langlebigen Magnetfeldes immer Wirbel hervor, die ihrerseits die Kraftlinien verwirren. Die Gesetzmässigkeiten des verwirrten Feldes unterscheiden sich wesentlich von denjenigen der ordnungsmässigen Felder. In Erwägung auch des Umstandes, dass im Laboratorium mit dem Magnetfeld angestellte Experimente keine vollständige Vorstellung vom Wesen des Magnetfeldes von Sternendimension geben können, ergibt sich die Notwendigkeit einer weiteren und allseitigen Erforschung der Frage der Stabilität der magneto-hydrodynamischen Prozesse kosmischer Dimensionen.

Zu Beginn dieses Vortrags wird der Versuch gemacht, zu beweisen, dass das Magnetfeld eines Sternes nur in verwirrtem Zustand existieren kann. Sodann wird die anschauliche Darstellung des verwirrten Feldes mit Hilfe von Bildern der Kraftlinien behandelt und werden einige die Gesetzmässigkeiten dieses Feldes ausdrückende Formeln gegeben. Zum Schluss wird die Frage der Zeit der Dämpfung des Magnetfeldes berührt. In bezug auf einige Einzelheiten der Berechnung ist der Verfasser dieses

Vortrages genötigt, auf seine früheren, in den Veröffentlichungen der vierten Konferenz über Fragen der Kosmogonie, Moskau, 1955, erschienenen Forschungen zu verweisen[6].

2. ÜBER DIE VERWIRRUNG DES MAGNETFELDES IN FLÜSSIGEM LEITFÄHIGEM MEDIUM

Betrachten wir die Veränderungen eines Magnetfeldes in einem aus reibungsfreier inkompressibler Flüssigkeit bestehenden Medium. Diese Veränderungen sind in den wohlbekannten Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik niedergelegt. Als gesuchte Grössen figurieren in den erwähnten Gleichungen die Stärke des Magnetfeldes und die Geschwindigkeit des Mediums v . Die Stärke des Magnetfeldes kann im allgemeinen als unendliche Reihe dargestellt werden:

$$H = \sum_{\lambda} b_{\lambda}(t) \exp[-t/(4\pi\sigma\lambda^2)] h_{\lambda}(x), \quad (2.1)$$

wo die Vektoren $h_{\lambda}(x)$ nicht von der Zeit t abhängig sind und die folgende Gleichung befriedigen:

$$\nabla^2 h_{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} h_{\lambda} = 0. \quad (2.2)$$

In (2.1) bezeichnen: σ —die Leitfähigkeit in elektromagnetischen Einheiten, $b_{\lambda}(t)$ —die skalare Funktion der Zeit t . Bei der Lösung der Gleichung (2.2) müssen die Randbedingungen der Aufgabe berücksichtigt werden. Folglich bilden die Vektoren $h_{\lambda}(x)$ ein vollständiges Orthogonalsystem der Eigenvektoren mit den entsprechenden Eigenwerten λ [2].

Die Entwicklung (2.1) ist eine Entwicklung des Vektors der Stärke des Magnetfeldes H nach den Eigenvektoren der Gleichung (2.2).

Es ist leicht festzustellen, dass (2.1) die folgende Gleichung befriedigt:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{4\pi\sigma} \nabla^2 H = 0, \quad (2.3)$$

wenn b_{λ} nicht von der Zeit abhängig sind, d. h. wenn $\dot{b} = 0$. Andererseits nehmen die Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik bei einem Medium vom Charakter eines starren Körpers ($v = 0$) gerade die Form (2.3) an. Folglich, mit konstanten b_{λ} , ergibt die Formel (2.1) die Stärke des Feldes in einem strömungsunfähigen Medium.

Um die Stärke des Magnetfeldes H in einem flüssigen Medium auszudrücken, ist es zweckmässig, sich derselben Entwicklung (2.1) zu

bedienen. Doch müssen dann b_λ als gewisse Funktionen der Zeit betrachtet werden. Diese werden aus dem System

$$\dot{b}_\lambda = \sum_{\lambda'} A_{\lambda'\lambda} b_{\lambda'} \quad (2.4)$$

bestimmt, wobei die von der Zeit t abhängigen $A_{\lambda'\lambda}$ vom Verfasser dieses Vortrags auf Grund der magneto-hydrodynamischen Gleichungen in der oben angeführten Arbeit berechnet worden sind.

Schreiben wir (2.1) auf folgende Weise um:

$$H = \sum_{\lambda} H_{\lambda}, \quad (2.5)$$

$$H_{\lambda} = b_{\lambda} \exp^{-t/T_{\lambda}} \cdot h_{\lambda}(x), \quad T_{\lambda} = 4\pi\sigma\lambda^2 \quad (2.6)$$

und bezeichnen wir mit H_{λ} die Teilfelder des allgemeinen Feldes H . Die Grösse λ mit einer Dimension von cm^{+1} nennen wir den Maszstab des Teilfeldes H_{λ} und die Grösse T_{λ} mit einer Dimension von sek^{+1} —die Zeit der exponentiellen Dämpfung dieses Teilfeldes. Die Formel 2.5 weist darauf hin, dass im allgemeinen das Magnetfeld eines Sternes als Superposition von Feldern verschiedenen Maszstabes dargestellt werden kann. Ferner muss erwähnt werden, dass der Maszstab λ eines gewissen Teilfeldes H_{λ} eine solche Entfernung bedeutet, auf welche hin sich H_{λ} wesentlich verändert. Wir werden das Magnetfeld H als verwirrt bezeichnen, wenn es aus Teilfeldern aller möglichen Maszstabe besteht, vom grössten $\lambda=l$ bis zum kleinsten $\lambda=\lambda_0$. l werden wir den Hauptmaszstab und λ_0 den inneren Maszstab des allgemeinen Feldes nennen. In einem verwirrten Felde sind alle b_{λ} aus der Formel (2.1) von Null verschieden, in einem ordnungsmässigen Feld dagegen verschwinden fast alle b_{λ} , und nur einzelne von ihnen haben einen endlichen Wert.

Nehmen wir an, dass in einem gewissen Zeitpunkt $t=0$ das Feld ein ordnungsmässiges war, d. h.

$$b_l \neq 0, \quad b_{\lambda} = 0, \quad \lambda \neq l.$$

Dann kann man auf Grund von (2.4) ohne jegliche Schwierigkeiten schliessen, dass in den folgenden Zeitpunkten $t > 0$ alle b_{λ} von Null abweichen werden. Mit anderen Worten—das Feld verwirrt sich.

Präziser lässt sich die Aufgabe von der Verwirrung des Feldes auf folgende Weise formulieren. Es gilt, die Bedingungen zu finden, unter denen in einem Zeitraum, der klein ist im Vergleich zu der Zeit T_l der exponentiellen Dämpfung des Teilfeldes H_l mit dem Hauptmaszstab l , das Verhältnis

$$b_{\lambda}/b_l$$

sich bei allen bis zur Grösse der Grössenordnung Eins vergrössert. Die Lösung dieser Aufgabe ist vom Verfasser in der oben angeführten Arbeit gegeben. Wenn die dimensionslose Grösse

$$K = \frac{\bar{H} \cdot \sigma \cdot l}{\rho^{1/2}} \quad (2.7)$$

viel grösser ist als eins, verwirrt sich das Magnetfeld immer; wenn dagegen $K < 1$, findet keine Verwirrung statt; das Feld erlischt nach dem exponentiellen Gesetz und bleibt dabei ordnungsmässig. In der Formel (2.7) bezeichnen: \bar{H} —den Mittelwert der Stärke des allgemeinen Magnetfeldes, σ —die Leitfähigkeit in elektromagnetischen Einheiten, l —den Hauptmaszstab des Feldes, der nach der Grössenordnung dem Radius des Sternes gleich ist, ρ —die Dichte des Mediums. Für Sterne, die ein Magnetfeld von mehr als 0.1 Oerstedt besitzen, mit $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $\sigma = 10^{-5} \text{ sec/cm}^2$, $l = 10^{11} \text{ cm}$ ergibt sich

$$K > 10^5 \gg 1.$$

Folglich, in allen Fällen, in denen das Magnetfeld eines Sternes beobachtet werden kann, muss es verwirrt sein, und dem Verfasser scheint es, dass sich ein solcher Schluss aus Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik ohne irgendwelche ergänzende Hypothesen ziehen lässt.

3. ÜBER DIE ANSCHAULICHE DARSTELLUNG DES VERWIRRTEN MAGNETFELDES

Zu Beginn der vorliegenden Abhandlung wurde erwähnt, dass in der wissenschaftlichen Literatur die Ansicht über die erhöhte Stabilität der magneto-hydrodynamischen Prozesse im Vergleich zu den gewöhnlichen hydrodynamischen ohne Magnetfeld verlaufenden Prozessen vertreten wird. Andererseits haben wir den Versuch gemacht, zu beweisen, dass das Magnetfeld eines Sternes immer verwirrt ist. In der Verwirrung äussert sich aber gerade die Instabilität der entsprechenden Prozesse. Somit ergibt sich ein Widerspruch zwischen den Angaben der einschlägigen Literatur und den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung. Es ist jedoch möglich, diesen Widerspruch durch ein anschauliches Bild des verwirrtten Feldes mit graphischer Darstellung der Kraftlinien aufzuklären.

In der Literatur wird das verwirrtte Feld als ein aus unregelmässig gekrümmten Kraftlinien bestehendes betrachtet. Die letzteren schliessen sich in überwältigender Mehrzahl ausserhalb des Sternes, da der Stern ein allgemeines Feld besitzt (Abbildung 1). Auf Grund eines solchen Bildes

wird die beruhigende Wirkung des Magnetfeldes auf die Bewegung des Mediums folgendermassen dargestellt.

In einem Medium von hoher Leitfähigkeit kleben die Kraftlinien des Magnetfeldes an der sich bewegenden Flüssigkeit. Die quer über die Kraftlinien verlaufende Bewegung verlängert die Linien und vergrössert das Feld. Jedoch bringt die Vergrösserung des Feldes endlich die Wirbel und das Entstehen von Feldern kleineren Maszstabes zum Stehen. In Anbetracht dessen, dass auch die Dämpfung der Felder kleineren Masz-

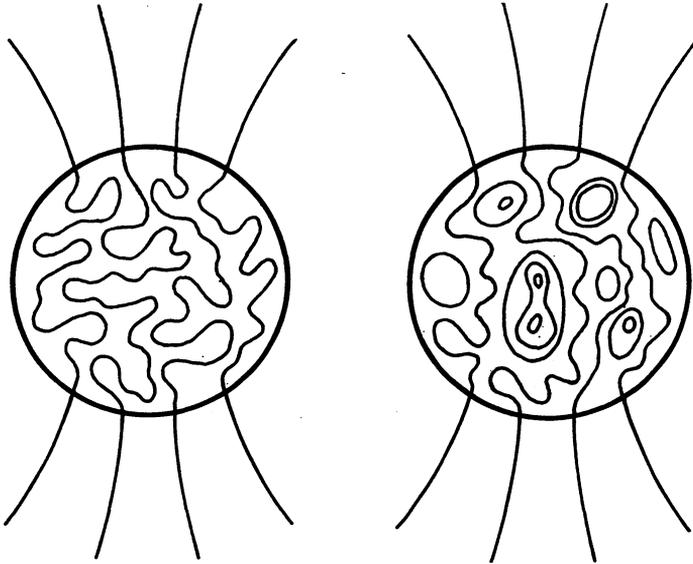


Abb. 1

Abb. 2

stabes sich schnell vollzieht, wenn sie nicht fortwährend erneuert werden, scheint es, dass die Verwirrung sich nicht entwickeln kann (Batchelor^[7]).

Andererseits würde die beschriebene Erscheinung die Verwandlung der ursprünglichen Unordnung in Ordnung bedeuten, was einem Grundsatz der Natur widerspricht (Heisenberg^[8]). Um die mit der Verwandlung der Unordnung in Ordnung verbundenen Schwierigkeiten zu überwinden, hat eine Reihe von Forschern die Ansicht geäussert, dass die gesamte Energie des Magnetfeldes in Teilfeldern kleineren Maszstabes konzentriert ist. Jedoch widerspricht auch diese Hypothese den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung. Wenn in irgendeinem Zeitpunkt die Teilfelder grossen Maszstabes fehlen, so könnte man auf Grund der Gleichung (2.4) folgern, dass sie in den folgenden Augenblicken erscheinen. Ausserdem würde die Konzentration der Magnetenergie in

Feldern ausschliesslich kleinen Maszstabes bedeuten, dass der Stern als Ganzes kein messbares Magnetfeld besitzt.

In der vorliegenden Abhandlung wird das verwirrte Feld als eine Superposition von Feldern verschiedenen Maszstabes dargestellt. Eine solche Darstellung ist formell und dem Wesen nach gehaltvoller. Sie umfasst die unregelmässig gekrümmten Kraftlinien, die sich ausserhalb des Sternes schliessen, aber auch die Mehrzahl der sich innerhalb des Sternes schliessenden Linien. Die durch die Entwicklung des Feldes hervorgerufene Verkürzung der Kraftlinien bewirkt die Ausglättung derselben, wobei aber die Geschlossenheit der Linien nicht zerstört und ihre Zahl nicht vermindert wird. Eine Darstellung des verwirrten Sternfeldes ist auf der Abbildung 2 gegeben. Das allgemeine System der Kraftlinien eines Sternes besteht aus einer Menge von abgeschlossenen Systemen, zwischen denen sich die sich ausserhalb des Sternes schliessenden Linien hinziehen (Abbildung 2). Jedes abgeschlossene System der Kraftlinien ist in gewissem Sinne selbstständig. Bewegungen kleineren Maszstabes als die Grösse des betrachteten Subsystems bilden die inneren Bewegungen dieses Systems. Strömungen jedoch, die ihrem Maszstab nach grösser als die geschlossenen Kraftlinien sind, tragen das System als Ganzes von einem Ort zum andern.

Die beschriebene Darstellung des verwirrten Magnetfeldes eines Sternes dürfte nicht die zu Beginn des Abschnitts angeführten Widersprüche hervorrufen. Die geäusserten Grundgedanken weiter verfolgend, kann man voraussetzen, dass die einzelnen Systeme der geschlossenen Kraftlinien durch Flächen von den übrigen Teilen abgetrennt sind, die fast Unstetigkeitsflächen darstellen. Syrobatskij hat daraufhingewiesen, dass tangential Unstetigkeiten im Magnetfeld stabil sind, wobei betont werden muss, dass in der gewöhnlichen Hydrodynamik gerade die umgekehrte Sachlage festgestellt worden ist, d. h. dass die tangentialen Unstetigkeiten absolut instabil sind. Nach der aufgestellten Hypothese besteht die beruhigende Wirkung des Magnetfeldes nicht im Zerstören der Verwirrung der Bewegung, sondern im Erhalten der Unstetigkeitsflächen, die als das Hauptmerkmal des verwirrten Magnetfeldes zu betrachten sind. Die Materie des Sternes nimmt unter dem Einfluss des Magnetfeldes eine gewissermassen tropfenartige Struktur an. Bei der Entwicklung des Magnetfeldes versetzt sich ein Teil dieser Tropfen oder Granulae, aber an ihrer Stelle entstehen neue. Weitere Untersuchungen müssen den Beweis für die Glaubwürdigkeit dieser aufgestellten Hypothese erbringen.

4. DAS VOLLSTÄNDIG VERWIRRTE MAGNETFELD

Aus den Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik geht hervor, dass Veränderungen des Magnetfeldes stets Veränderungen in der Bewegung der Flüssigkeit hervorrufen und umgekehrt. Die Verwirrung des Magnetfeldes ist von einer Verwirrung der Bewegung des Mediums begleitet, die von einem wirbelartigen Charakter ist. Auf diese Weise besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Problemen des verwirrten Magnetfeldes und der turbulenten Bewegung der Flüssigkeit. Daher ist es möglich, bei der Untersuchung des verwirrten Feldes sich der schon ausgearbeiteten Methoden der Turbulenztheorie zu bedienen.

Chandrasekhar, Kaplan u. a. sind diesen Weg gegangen, doch hat es sich alsbald herausgestellt, dass die Lösung dieser Aufgabe auf viele Schwierigkeiten stösst, da in der Magneto-Hydrodynamik die Zahl der die Prozesse bestimmenden Parameter viel grösser ist als in der gewöhnlichen Hydrodynamik. Um trotz alledem einige einfache Gesetze für das verwirrte Magnetfeld zu erhalten, ist es notwendig, das Problem durch einige ergänzende Hypothesen zu vereinfachen. Nehmen wir an, es gebe einen gewissen Grenzzustand des verwirrten Magnetfeldes, dem die Felder im Prozesse der Verwirrung zustreben, und dass dieser Zustand von den Anfangsbedingungen und der Vorgeschichte des Systems nicht abhängig ist. Indem wir diesen Zustand mit 'vollständig verwirrt' bezeichnen, nehmen wir an, dass das Feld eines Sternes im Lauf seiner Entwicklung diesen Zustand während eines bedeutend kürzeren Zeitraumes erreicht, als zur Dämpfung des Feldes notwendig ist, unter der Bedingung, dass die dimensionslose Grösse K genügend gross ist.

Die Hypothese von dem Vorhandensein des vollständig verwirrten Magnetfeldes eines Sternes ist eine Übernahme der Ideen Kolmogorows, Onsagers, Weizsäckers und Obuchows aus der Theorie der Turbulenz in die Magneto-Hydrodynamik. Die von besagten Forschern ausgearbeitete Theorie des universalen Gleichgewichts stützt sich auf die Voraussetzung von der Existenz eines gewissen statistischen Gleichgewichts, dem alle Komponenten kleineren Maszstabs der turbulenten Bewegung im Laufe ihrer Entwicklung zustreben. Je grösser die Reynolds'sche Zahl ist, einen desto grösseren Intervall der Maszstabe umfasst das Gleichgewicht und erstreckt sich im Grenzfall auf das ganze Spektrum. In analogem Sinn wird auch in der vorliegenden Abhandlung das vollständig verwirrte Magnetfeld eines Sternes betrachtet.

Sich auf die Hypothese des statistischen Gleichgewichts stützend, ist es dem Verfasser dieser Abhandlung gelungen, in der oben ausgeführten

Arbeit einige Wechselbeziehungen für das vollständig verwirrte Magnetfeld zu ermitteln, die für eine weitere Untersuchung des Problems von Wichtigkeit sein dürften. Wegen Platzmangels können in der vorliegenden Arbeit nur einige davon angeführt werden.

(a) In dem vollständig verwirrten Magnetfeld bis zu einer Genauigkeit der dimensionslosen Koeffizienten der Grössenordnung Eins ist die magnetische Energie des Feldes gleich der kinetischen Energie der Wirbel

$$E^M \approx E^K. \quad (3.1)$$

Die Beziehung (3.1) ist eine der wesentlichsten Beziehungen der Magnetfelder galaktischen Ursprungs, die zuallererst von Batchelor ermittelt wurde. Doch gelangte Batchelor zu (3.1) auf anderen Wegen und von anderen Voraussetzungen ausgehend. Der entscheidende Prozess, der zu einer Gleichwerdung der magnetischen und der kinetischen Energie führt, ist nach Batchelor das Unterbrechen der Bewegung des Mediums durch das sich vergrössernde Magnetfeld. In der vorliegenden Abhandlung ergibt sich die Gleichheit beider Energieformen als Folge der Hypothese vom Vorhandensein eines Grenzzustandes, des Zustandes der völligen Verwirrung des Magnetfeldes. Falls die Theorie des vollständig verwirrten Magnetfeldes eine statistische ist, muss sich die Beziehung (3.1) schon aus allgemeinen Vorstellungen von der Gleichheit der Energie der verschiedenen Freiheitsgrade ergeben.

(b) Unter der Voraussetzung, dass das Magnetfeld durch die Ausströmung der Jouleschen Wärme sich quasistationär verändert, kann die Abnahme der gesamten Energie E mit der Zeit t mittels der Differentialgleichung

$$\frac{dE}{dt} = -AE^{3/2}t^{-5/2}\rho^{-1/2}, \quad (3.2)$$

erfasst werden, wo A die dimensionslose Konstante von der Grössenordnung Eins darstellt und die übrigen Benennungen die oben angegebenen Bedeutungen haben. Die Lösung der Gleichung ist

$$E = \frac{E_0}{\left(1 + \frac{t}{T'}\right)^2}, \quad (3.3)$$

wobei

$$T' = \frac{Tl}{K}. \quad (3.4)$$

In den zuletzt gegebenen Formeln (3.3) und (3.4) bezeichnen: E_0 – die Energie des Systems im Anfangszeitpunkt $t=0$, T' – die Zeit der exponentiellen Dämpfung des Feldes vom Typ Cowling-Wrabel.

Die Formel (3.3) gibt das Gesetz der Dämpfung eines vollständig verwirrten Magnetfeldes wieder, wobei T' als Zeit der Dämpfung dieses Feldes gedeutet werden kann. Falls bei den Sternen $K < 10^5$ ist, ist nach (3.4) die Zeit der Dämpfung T' um 10^5 oder mehr Male kleiner als im Falle von ordnungsmässigen Feldern, als deren Beispiel ein Feld vom Typ Cowling-Wrabel dienen mag. Eine grosse Stabilität des Feldes kommt bei realen Sternen anscheinend nicht vor.

(c) Da die Gesetze des vollständig verwirrten Magnetfeldes die allbekannten Gesetze der im Gleichgewicht bleibenden Turbulenz in Formeln der Magnetodynamik wiederholen, liegt kein Grund vor, alle aufzuzählen. Es sollen hier nur einige von ihnen angeführt werden.

Das bekannte Gesetz Kolmogorow-Obuchows in der Magneto-Dynamik des flüssigen Mediums lautet: Der Mittelwert der Differenz der Feldstärken an zwei verschiedenen Punkten von der Entfernung λ ist der Kubikwurzel dieser Entfernung proportional, unter der Bedingung dass

$$l \gg \lambda \gg \lambda_0$$

ist.

Der innere Maszstab nach der Grössenordnung wird aus der Formel

$$\lambda_0 \approx \frac{1}{K^{3/4}} \quad (3.5)$$

berechnet.

Die Feldstärke der Komponente des Feldes mit innerem Maszstab ergibt sich aus der Formel

$$\bar{H}_{\lambda_0} \frac{\bar{H}}{K^{1/4}} \quad (3.6)$$

usw. Es sei noch bemerkt, dass das Gesetz Kolmogorow-Obuchows wie auch die Formeln (3.4) und (3.5) die Möglichkeit offen lassen, die Hypothese von dem völligen verwirrten Magnetfeld auf ihre Richtigkeit zu prüfen, wenn z. B. ausführliche Messungen des Magnetfeldes der Sonne vorliegen sollten.

5. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die Theorie des Magnetfeldes in einem gasartigen Medium von hoher Leitungsfähigkeit hat, auf kosmische Nebel angewandt, eine besondere Entwicklung durchgemacht. Es ist darauf hingewiesen worden, dass die Kraftlinien des galaktischen Magnetfeldes sich in Gaswolken kosmischer Dimensionen verwirren. Die Theorie des Magnetfeldes von Nebeln ist die Theorie des verwirrten Feldes.

Die Erforschung der Magnetfelder von Sternen ist einen etwas anderen Weg gegangen. Ausser verschiedenen Fragen über die Stabilität eines

Sternes mit einem Magnetfeld wurden Probleme über die Struktur des durch Selbstinduktion aufrechterhaltenen Feldes in einem Medium vom Charakter eines starren Körpers gelöst. Die Möglichkeiten der Verwirrung des Magnetfeldes eines Sternes sind fast gar nicht untersucht worden.

Die Darlegungen der vorliegenden Untersuchung machen den Versuch zu beweisen, dass die Verwirrung des Magnetfeldes eines durch Selbstinduktion aufrechterhaltenen Sternes seine Grundeigenschaft bildet. Die Verwirrung des Feldes ergibt sich aus den Gleichungen der Magneto-Hydrodynamik ohne irgendwelche ergänzende Hypothesen. Letztere erweisen sich nur bei der Erforschung der Eigenschaften des verwirrten Feldes als notwendig.

Die Grundhypothese der vorliegenden Untersuchung besteht in der Voraussetzung des Vorhandenseins eines gewissen Grenzzustandes des Feldes, der einen Zustand der maximalen Unordnung darstellt, und dem die realen Felder im Prozess ihrer Entwicklung zustreben. Die Entwicklung des Feldes ist vor allem durch seine Dämpfung gekennzeichnet. Diese Darstellung der Veränderung der Felder ist in der ersten Näherung den Sternen angemessen, doch kann sie anscheinend bei kosmischen Nebeln, wo das Feld durch das allgemeine Feld der Milchstrasse aufrechterhalten wird, nicht angewandt werden. Der Prozess der Verwirrung verläuft anscheinend in beiden betrachteten Fällen auf verschiedene Weise. Somit sind die Schlussfolgerungen der vorliegenden Untersuchung als erste Näherung den magneto-hydrodynamischen Prozessen eines Sternes bei deren langsamem, quasistationärem Verlauf anwendbar.

Fragen über die Entwicklung der Sterne sind mit Fragen über ihren Aufbau verbunden. Beim gegenwärtigen Stand der Wissenschaft ist es unmöglich, beim Erforschen des Aufbaus der Sterne, die Rolle der Elektrodynamik unbeachtet zu lassen. Zu einer erfolgreichen Anwendung der Gesetzmässigkeiten der magneto-hydrodynamischen Prozesse in einem Medium von hoher Leitfähigkeit beim Lösen astrophysischer Probleme muss jedoch die statistische Theorie des Feldes weiter entwickelt werden. Die Errungenschaften der Theorie der turbulenten Bewegung der Flüssigkeit können dabei von grossem Nutzen sein.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Cowling, T. G. *M.N.* **105**, 166, 1945.
- [2] Lamb, H. *Phil. Trans.* **174**, 519, 1883.
- [3] Wrubel, M. N. *Astrophys. J.* **116**, 291, 1952.
- [4] Chandrasekhar, S. *Proc. Roy. Soc. A*, **204**, 435, 1951; **207**, 301, 1951; **216**, 293, 1953.
- [5] Syrovatskij, S. I. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **24**, 622, 1953. (*Journal der Theor. und Exp. Physik*, **24**, 622, 1953.)
- [6] Kipper, A. *Труды четвертого совещания по вопросам космогонии* (М. 1955). (Veröffentlichungen der vierten Konferenz über Fragen der Kosmogonie, Moskau, 1955.)
- [7] Batchelor, G. K. *Problems of Cosmical Aerodynamics* (I.A.U. Symposium, Paris), Central Air Documents Office, Dayton, Ohio, 1951.
- [8] Heisenberg, W. *Problems of Cosmical Aerodynamics* (I.A.U. Symposium, Paris), Central Air Documents Office, Dayton, Ohio, 1951.

Discussion

Lehnert: In Ihrem Modell in Abb. 2 enthält das Gebiet des Sternes abgeschlossene Systeme, die nicht mit dem äusseren Magnetfeld verbunden sind. Die Grenzflächen dieser abgeschlossenen Systeme können dann als Unstetigkeitsflächen auftreten. Ist es möglich, dass Instabilitäten an diesen Flächen entstehen können? Ich denke dann besonders an einen gewöhnlichen Prozess in der Hydrodynamik, das heisst, an eine Prandtl'sche Trennungsschicht. Bei genügend hohem Geschwindigkeitsgradienten entsteht hier eine Instabilität. Im magneto-hydrodynamischen Falle hat man andererseits auch die stabilisierende Einwirkung eines Magnetfeldes zu beachten. Es entsteht dann die Frage, ob die destabilisierende Einwirkung des Geschwindigkeitsgradienten, oder ob die stabilisierende Einwirkung des Magnetfeldes an so einer Grenzfläche eine dominierende Rolle spielen wird.

Kipper: Ich kann in diesem kurzen Vortrag leider keine vollständige Beschreibung der Resultate der vorliegenden Arbeit geben. Es kann aber bewiesen werden, dass das Magnetfeld die Unstetigkeitsflächen stabil macht.

Lehnert: Ich bin nicht ganz überzeugt, dass eine solche Unstetigkeitsfläche unter allen Umständen stabil ist. Bei einem magneto-hydrodynamischen Experiment mit Quecksilber (*Proc. Roy. Soc. A.* **233**, 299, 1955) ist nämlich in einem Spezialfall gezeigt worden, dass das Magnetfeld den Geschwindigkeitsgradienten derartig vergrössern kann, dass eine Instabilität entsteht. Man könnte hier natürlich den Einwand machen, dass die Bedingungen des Experiments nicht denjenigen der Astrophysik entsprechen. Es ist deshalb nicht sicher, dass das Experiment als ein Argument gegen die Stabilität im astrophysikalischen Falle von stark 'eingefrorenen' magnetischen Feldlinien verwendet werden kann.

Dann habe ich noch eine andere Frage. Falls der Parameter K in Ihrer Gleichung (2.7) viel grösser als eins ist, verwirrt sich das Magnetfeld. Andererseits findet bei $K > 1$ keine Verwirrung statt. Die Bedingung $K > 1$ ist identisch mit der Bedingung, dass magneto-hydrodynamische Wellen auftreten können (siehe Lehnert, Gleichung (19)) dieses Bandes). Wenn $K > 1$, entstehen andererseits keine Wellen, sondern aperiodische Bewegungen, die nach einem exponentiellen Gesetz abklingen. Kann man aus Ihrer Bedingung $K > 1$ und aus meiner entsprechenden Bedingung schliessen, dass die zunehmende Verwirrung des Magnetfeldes von magneto-hydrodynamischen Wellen verursacht wird, die fortlaufend das Innere des Sternes in allen Richtungen durchqueren?

Kipper: Diese Gleichung ist eine Differentialgleichung nach der Zeit und enthält in sich auch die periodischen Lösungen; aber in dieser Arbeit habe ich diese Lösungen nicht speziell betrachtet. Ich habe nur ein Kriterium gefunden, das ermöglicht, die Bedingung zu stellen, dass diese b_λ ungefähr gleich werden, also dass alle Komponenten vorhanden sind.