

Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes et variétés de Griffiths–Schmid: le cas du groupe $U(2, 1)$

HENRI CARAYOL

I.R.M.A., 7, Rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Received 10 December 1996; accepted in final form 13 December 1996

Abstract. Let G be an inner anisotropic form of an unitary group of 3 variables over \mathbf{Q} , such that $G_{\mathbf{R}} \simeq U(2, 1)$, and π be an automorphic representation of $G(\mathbf{A})$ whose archimedean component π_{∞} is a degenerate limit of discrete series; such a π never occurs in the cohomology (coherent or étale) of a Shimura variety. We show that however it does ‘appear’ in the coherent cohomology of some line bundle over an associated Griffiths–Schmid variety. Moreover we study cup products between such cohomology classes and some other automorphic cohomology classes and we prove some non-vanishing results.

Mathematics Subject Classifications (1991). 14G35, 22E55, 32N99.

Key words: automorphic form, compact analytic variety, limit of discrete series, modular variety.

Introduction

L’un des mystères de la théorie de Langlands tient dans le fait que certaines formes (ou représentations) automorphes, auxquelles devraient pourtant correspondre des représentations galoisiennes très naturelles du point de vue arithmétique, échappent cependant à toute interprétation algèbro-géométrique et demeurent donc pour l’instant des objets d’une nature purement analytique dont on ne sait pas faire grand chose. On connaît bien de ce point de vue le cas des formes de Maass associées à la valeur propre $1/4$ du laplacien, auxquelles correspondent conjecturalement des représentations d’Artin paires de degré 2 du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Les représentations automorphes dont la composante archimédienne est une *limite dégénérée de série discrète* constituent un autre exemple fondamental de ce fait: plus précisément, si G est un groupe réductif sur \mathbf{Q} permettant de définir une variété de Shimura, on sait que les représentations automorphes de G dont le type à l’infini est une série discrète interviennent dans la cohomologie (rationnelle ou étale) de certains faisceaux localement constants sur la variété en question; cela permet de prouver des résultats d’algébricité pour les valeurs propres des opérateurs de Hecke, et aussi dans certains cas (et probablement tous lorsque la théorie sera parfaitement au point) d’associer à ces représentations des représentations galoisiennes l -adiques. Si l’on part maintenant

d'une représentation automorphe de type une limite *non dégénérée* de série discrète, alors elle intervient dans la cohomologie de certains faisceaux cohérents sur la variété de Shimura, ce qui permet également de prouver des résultats d'algébricité; on peut même espérer (bien que cela n'ait été fait que dans de rares cas) construire des représentations de groupes de Galois, par des arguments faisant intervenir des congruences entre formes automorphes. Le cas des limites dégénérées au contraire échappe à la théorie, car les formes de ce type n'interviennent jamais, d'après un résultat de Mirković, dans la cohomologie (cohérente ou étale) des variétés de Shimura.

Comme exemple intéressant, on peut considérer les groupes unitaires réels quasi-déployés (c'est à dire de signature (n, n) ou $(n, n - 1)$) et une limite de série discrète qui correspond au paramètre de Harish-Chandra *nul* et à une chambre de Weyl pour laquelle aucune racine simple n'est compacte (voir le début du Paragraphe 1 pour un rappel concernant la paramétrisation de ces représentations). Les limites ainsi définies sont dégénérées sauf dans le cas de la signature $(1, 1)$. Les représentations automorphes d'un tel type devraient correspondre à certaines représentations galoisiennes d'image finie. On sait tout faire dans le cas non dégénéré, i.e. pour les groupes de type $(1, 1)$: c'est la théorie de Deligne–Serre, qui associe des représentations d'Artin impaires de degré 2 aux formes de poids 1. On ne sait rien au contraire dans les autres cas, même pas que les valeurs propres de Hecke sont algébriques. Ce problème n'est d'ailleurs pas sans rapport avec celui des formes de Maass mentionné plus haut, car il correspond par fonctorialité à ces dernières, ainsi que Clozel me l'a fait remarquer, des formes automorphes sur $U(2, 1)$ du type ci-dessus.

L'objet du présent article est de suggérer une possible voie d'attaque sur l'exemple d'une forme tordue (supposée anisotrope pour simplifier) d'un groupe unitaire à trois variables de type à l'infini $U(2, 1)$. Plus précisément, on y montre que nos formes mystérieuses interviennent dans la cohomologie (en degrés 1 et 2) d'un faisceau cohérent sur la *variété de Griffiths–Schmid* associée. Ce faisceau est en fait une 'racine carrée' du faisceau dualisant, et notre résultat fait ainsi apparaître une généralisation assez naturelle du cas des formes classiques de poids 1. Toutefois les résultats arithmétiques souhaités ne découlent pas de cette interprétation, car notre variété de Griffiths–Schmid n'est pas (contrairement aux variétés de Shimura) une variété algébrique. On peut espérer quand même, du fait que la variété en question est en quelque sorte 'de nature algébrique' (i.e. un espace de modules pour certains types de structures de Hodge), qu'il soit possible de donner une définition raisonnable de ce qu'est une classe de cohomologie 'rationnelle': dans le cas du H^1 et d'un vrai groupe unitaire (et non pas d'une forme tordue), on peut sans doute faire cela en considérant la restriction d'une telle classe aux courbes modulaires (au sens usuel) qui sont naturellement incluses dans la variété de Griffiths–Schmid, et exiger que cette restriction soit rationnelle. On aurait besoin d'avoir une notion de rationalité de ce genre aussi pour le H^2 , de sorte que le cup-produit de classes rationnelles le soit également. J'espère pouvoir revenir sur ces questions dans un

prochain travail, ainsi que sur une correspondance explicite entre certaines formes automorphes au sens classique pour les groupes unitaires et certaines des classes de ‘cohomologie automorphe’ qui interviennent ici (cela résulte d’une variante, due à Gindikin, de la transformation de Penrose). Pour en revenir au présent article, j’y vérifie que les classes de cohomologie associées aux limites dégénérées de séries discrètes interagissent par cup-produit de façon non triviale avec d’autres qui sont associées à des séries discrètes, et pour lesquelles on sait donc que les valeurs propres des opérateurs de Hecke sont algébriques. De façon duale, cela revient à dire que nos classes mystérieuses, vues dans le H^2 , sont des combinaisons linéaires de cup-produits de classes de 1-cohomologie associées à des représentations automorphes d’un type connu, et en particulier rationnelles. Si l’on parvient à donner une définition géométrique de rationalité pour les classes de cohomologie sur notre variété de Griffiths–Schmid, ce résultat impliquera des résultats de rationalité pour les formes associées aux limites dégénérées de séries discrètes et peut-être aussi des congruences entre ces dernières et des formes associées à des séries discrètes non-holomorphes.

Dans le cas des variétés de Shimura, il est connu que le calcul de la cohomologie cohérente revient au calcul de la (\mathfrak{p}, K) -cohomologie d’espaces de formes automorphes, avec \mathfrak{p} l’algèbre de Lie du sous-groupe parabolique (complexe) qui stabilise un point du domaine hermitien symétrique associé ; cela se ramène aussi si l’on préfère au calcul de la n -cohomologie, où n est le radical unipotent de la sous-algèbre de Borel correspondant à une chambre de Weyl ‘holomorphe’ (ou ‘antiholomorphe’, suivant les normalisations choisies) : le résultat de Mirković auquel il a été fait allusion plus haut affirme en fait que cette n -cohomologie s’annule pour les limites dégénérées de séries discrètes. Le calcul de la cohomologie cohérente d’une variété de Griffiths–Schmid est complètement analogue et on montre, dans le cas particulier considéré ici, qu’il revient à un calcul de n -cohomologie d’espaces de formes automorphes, où n désigne maintenant une algèbre unipotente *non holomorphe*. L’apparition ici des limites dégénérées correspond donc au fait que, pour un tel n , leur cohomologie ne s’annule plus.

Le calcul de la n -cohomologie des limites dégénérées s’avère intrinsèquement beaucoup plus ardu que dans le cas non dégénéré. Nous effectuons ce calcul ici (dans le cas de $SU(2, 1)$ ou $U(2, 1)$) d’une façon très piétonnière, c’est à dire par des calculs totalement explicites : au Paragraphe 1 nous extrayons d’articles de Wallach et Johnson–Wallach une description ‘matricielle’ très précise de nos limites dégénérées (il n’y en a d’ailleurs qu’une à torsion près par un caractère), et au Paragraphe 2 nous utilisons cette description pour calculer ‘manuellement’ la cohomologie en écrivant explicitement les cocycles qui apparaissent. Ce genre de méthode ne saurait bien sûr se généraliser au cas d’un groupe quelconque. L’idée plus habile consiste bien entendu à faire appel à la localisation, mais dans le cas difficile d’un caractère infinitésimal singulier : j’explique à la fin du Paragraphe 2, d’un point de vue assez naïf, à quoi cela revient dans le cas d’un groupe unitaire à trois variables. Wolfgang Soergel, à qui j’avais expliqué le problème et montré

mes balbutiements localisateurs, vient dans un travail récent ([So]) de ramener ce calcul à un problème (sans doute d'ailleurs très difficile) relatif à la combinatoire du groupe de Weyl. Je me suis toutefois tenu ici à la méthode calculatoire, parce qu'on a besoin dans la suite de résultats plus fins que le simple calcul de la cohomologie (on veut exprimer des projections de cup-produits sur des facteurs directs de produits tensoriels de représentations), ce qui ne semble pas découler de la localisation.

J'ai fait quelques calculs 'expérimentaux', en partant du travail de Soergel, portant sur les représentations des groupes unitaires quasi-déployés (i.e. $SU(m, m)$ et $SU(m, m-1)$) et les limites dégénérées de séries discrètes analogues à celles considérées ici (i.e. pour un paramètre de Harish-Chandra nul), avec n correspondant à une chambre pour laquelle aucune racine simple n'est compacte. Cela conduit à des problèmes combinatoires difficiles, de comparaison entre l'ordre de Bruhat sur le groupe de Weyl compact W_c et celui induit par l'ordre de Bruhat sur le groupe de Weyl W tout entier. Pour de petites valeurs de m , on peut alors voir que la cohomologie est non nulle, mais les résultats obtenus sont assez compliqués. Le résultat de Soergel fournit une sorte d'algorithme pour la calculer, mais il ne semble pas possible de prédire une expression de cette cohomologie valable pour m quelconque. Tout cela semble toutefois indiquer que les idées du présent article admettent sans doute des extensions à un cadre beaucoup plus général.

Le Paragraphe 3 est consacré à traduire les résultats des deux précédents en termes de la cohomologie cohérente de notre variété de Griffiths–Schmid et les deux suivants à établir les résultats relatifs aux cup-produits. Dans le cas des variétés de Shimura, Clozel, Harris et Li ont ramené des problèmes de non-annulation 'virtuelle' de cup-produits (ou de restrictions) à des problèmes purement archimédiens; on montre qu'il en est de même ici. Le Paragraphe 4 est consacré à ces questions archimédiennes: il s'agit de faire apparaître certaines représentations de la série discrète comme facteurs directs dans des produits tensoriels et de vérifier la non annulation de la projection sur ces facteurs de cup-produits de classes de n -cohomologie. On montre enfin au dernier paragraphe comment cela entraîne différents résultats relatifs à des cup-produits sur la variété étudiée.

Ce travail a été entrepris lors d'un séjour au Research Institute for Mathematical Sciences de Kyoto. Je remercie mes collègues japonais (en particulier Y. Ihara, T. Oda et M. Kashiwara) pour cette invitation, les discussions intéressantes que j'ai eues avec eux et leur chaleureuse hospitalité.

1. Une limite dégénérée de série discrète

(1.1) Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'unique limite dégénérée de série discrète pour le groupe $SU(2, 1)$ et nous la notons π_0 . Rappelons que, d'une façon générale, les *limites de séries discrètes* pour un groupe semi-simple sont définies à partir des séries discrètes, notées $\pi(\lambda)$ dans la paramétrisation de Harish-Chandra, par un procédé de continuation qui permet de 'pousser' le paramètre λ sur les murs (cf. par exemple le Paragraphe 1 de [Kn–Zu]). Plus précisément, ce paramètre qui

pour les séries discrètes doit être non singulier, est maintenant autorisé à appartenir à la frontière d'une chambre de Weyl C . On obtient alors une représentation notée $\pi(\lambda, C)$ – dépendant effectivement de C – qui est non nulle si et seulement si λ n'est orthogonale à aucune racine compacte *simple* relativement à C (ou plutôt à l'ordre correspondant sur les racines).

Les *limites de séries discrètes* ainsi obtenues sont des représentations irréductibles; elles sont paramétrées par les couples (λ, C) vérifiant la condition ci-dessus, modulo l'action du groupe de Weyl compact. Enfin, on dit que $\pi(\lambda, C)$ est *non dégénérée* si la condition plus forte suivante est satisfaite: λ n'est orthogonale à aucune racine compacte. Sinon elle est *dégénérée*. La représentation que nous considérons ici est celle qui correspond au paramètre $\lambda = 0$ et à la chambre de Weyl 'non holomorphe', pour laquelle les racines compactes ne sont pas simples.

(1.2) Notre représentation π_0 admet en réalité une description beaucoup plus terre à terre que la théorie que nous venons de rappeler brièvement: il s'agit en fait d'une représentation de la série principale sphérique, étudiée en détail dans l'article [Wa] – où elle est définie au Paragraphe 7 sous l'appellation de $\pi_{-1, -1}$ ou bien de $\pi_{-\rho}$ – ainsi que dans l'article [Jo-Wa], où l'on étudie plus généralement les trois groupes $\mathrm{SO}(n, 1)$, $\mathrm{SU}(n, 1)$ et $\mathrm{Sp}(n, 1)$ et où la représentation qui nous intéresse est dénotée π_2 . Nous allons extraire de ces deux articles une description très précise de π_0 qui nous servira ensuite à calculer explicitement sa cohomologie.

Le groupe unitaire que nous considérons est celui relatif à la forme hermitienne sur \mathbf{C}^3 de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Un élément g de $G = \mathrm{SU}(2, 1)$ sera en général écrit sous la forme d'une matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} A & b \\ c^* & d \end{pmatrix}$$

avec A une matrice (2×2) , b et c deux matrices colonnes, c^* la transposée conjuguée de c , et enfin d un élément de \mathbf{C} . Le sous-groupe compact maximal, constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & \\ & (\det A)^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $A \in U(2)$, sera noté K et il s'identifie ainsi à $U(2)$. Nous désignerons par T le sous-groupe de Cartan compact constitué des matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont des nombres complexes de module 1 dont le produit vaut 1.

Le groupe G opère sur la sphère

$$S^3 = \left\{ Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2; \quad |Z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\},$$

un élément

$$g = \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & d \end{pmatrix}$$

agissant par

$$g.Z = (\langle Z, c \rangle + d)^{-1} . (AZ + b),$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la forme sesquilinéaire sur \mathbf{C}^2 :

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \bar{c}_1 z_1 + \bar{c}_2 z_2.$$

Notre représentation π_0 se réalise alors sur l'espace des fonctions (L^2 , ou C^∞ , ou analytiques, etc. . . – suivant la réalisation que l'on choisit de considérer: nous discuterons de ce point ultérieurement) sur la sphère, un élément $g \in G$ transformant une telle fonction f en

$$(\pi_0(g).f)(Z) = |\bar{d} - \langle Z, b \rangle|^{-2} f(g^{-1}.Z).$$

(1.3) Désignons par \mathcal{H} le module de Harish-Chandra associé à π_0 , constitué des vecteurs K -finis. Les deux articles sus-mentionnés contiennent une description précise de l'ensemble des K -types qui interviennent dans \mathcal{H} : tout d'abord, ce module se décompose comme une somme directe $\mathcal{H} = \bigoplus_{p,q \geq 0} \mathcal{H}^{p,q}$, où pour chaque couple p, q d'entiers ≥ 0 , $\mathcal{H}^{p,q}$ désigne l'ensemble des restrictions à S^3 des fonctions polynômiales harmoniques en Z, \bar{Z} qui sont homogènes de degré p en Z et q en \bar{Z} (cf. [Wa] Paragraphe 7, ou [Jo–Wa] Théorème 3.1 – le cas qui nous intéresse ici, avec les notations de [Jo–Wa], est celui où $F = \mathbf{C}$, $n = 2$, $d = 2$, $\nu = 2$, tandis que pour [Wa] c'est le cas $k_1 = k_2 = -1$).

Chaque espace $\mathcal{H}^{p,q}$ est une représentation irréductible de K que l'on peut identifier plus précisément via l'isomorphisme entre K et $U(2)$. On vérifie (cf. [Wa], Lemma 7.9) que $\mathcal{H}^{p,q}$ est de dimension $p + q + 1$, et isomorphe à la représentation suivante, que nous désignerons par $\tau_{p,q}$, du groupe $U(2)$: son espace est l'ensemble des fonctions polynômiales P sur \mathbf{C}^2 homogènes de degré $p + q$, l'action d'un élément $k \in U(2)$ étant donnée par:

$$\tau_{p,q}(k).P \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = \det(k)^{2q-p} P \left(k^{-1} . \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right),$$

où $k^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dénote l'opération naturelle (linéaire) de $U(2)$ sur \mathbf{C}^2 . Tout ceci détermine complètement l'action de K sur \mathcal{H} , mais nous avons besoin de renseignements supplémentaires; pour cela nous utiliserons l'élément, noté $e_{p+q,p-q}$, exhibé au Paragraphe 3 de [Jo–Wa], à cette différence près que nous le noterons ici $e_{p,q}$ pour alléger les notations. Il s'agit d'un élément explicite de $\mathcal{H}^{p,q}$ (expressible à partir de fonctions hypergéométriques) que l'on peut caractériser à homothétie près par le fait qu'il est fixé par le sous-groupe (noté M dans loc.cit.) de K constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \alpha^{-2} & \\ & & \alpha \end{pmatrix},$$

où α est un nombre complexe de module 1. Or on voit aussitôt que les éléments fixés par les

$$\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \alpha^{-2} \end{pmatrix}$$

dans l'espace de la représentation $\tau_{p,q}$ sont exactement ceux proportionnels au polynôme $z_1^p z_2^q$. Ce fait va nous permettre de définir une base de $\mathcal{H}^{p,q}$ par transfert de la base naturelle de l'espace de la représentation $\tau_{p,q}$. Plus précisément

DÉFINITION. L'isomorphisme entre $\tau_{p,q}$ et $\mathcal{H}^{p,q}$ étant normalisé de telle sorte que l'image de $z_1^p z_2^q$ soit $e_{p,q}$, nous notons, pour chaque entier $-q \leq j \leq p$, $e_{p,q}(j)$ l'image de $z_1^{p-j} z_2^{q+j}$.

(1.4) On obtient ainsi une base dans chacun des $\mathcal{H}^{p,q}$, avec $e_{p,q}(0) = e_{p,q}$ et l'ensemble de tous ces éléments constitue une base de \mathcal{H} . Notre but est maintenant d'expliciter l'action sur cette base de certains éléments de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ de G ; en particulier nous nous intéresserons à l'action de la sous-algèbre unipotente \mathfrak{n} constituée des matrices de la forme:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Les trois matrices suivantes constituent une base de \mathfrak{n}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous voulons calculer explicitement l'action de ces trois matrices de \mathfrak{g} , ainsi que celle des matrices diagonales de G , pour lesquelles nous adopterons la notation

$$t(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & (\alpha\beta)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le plus facile bien sûr est de calculer l'action des éléments de K ou de son algèbre de Lie complexifiée – que nous noterons \mathfrak{k} – car il suffit de faire ce calcul pour la représentation $\tau_{p,q}$ rapportée à sa base naturelle. On trouve aussitôt comment agit le tore diagonal

$$t(\alpha, \beta).e_{p,q}(j) = \alpha^{2(q-p)+j} \beta^{q-p-j}.e_{p,q}(j).$$

De même, il n'est pas difficile d'exprimer l'action de $A \in \mathfrak{k}$ ou de sa conjuguée $A^* \in \mathfrak{k}$ et l'on obtient après un calcul évident

$$A.e_{p,q}(j) = -(p-j).e_{p,q}(j+1); \quad (0 \text{ si } j = p),$$

$$A^*.e_{p,q}(j) = -(q+j).e_{p,q}(j-1); \quad (0 \text{ si } j = -q).$$

(1.5) Pour aller plus loin, nous utilisons maintenant le Théorème (4.1.(2)) de [Jo–Wa], où est explicitée l'action sur $e_{p,q} = e_{p,q}(0)$ de l'élément suivant (qu'ils notent H)

$$B + B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas considéré ici, $F = \mathbf{C}$, $n = 2$, $d = 2$, $\nu = 2$ et l'on obtient, en prenant garde aux différences de notations (l'élément que nous notons $e_{p,q}$ coïncide avec celui noté $e_{m,l}$ dans loc.cit. pour $m = p + q$, $l = p - q$), la formule

$$(B + B^*).e_{p,q} = \frac{1}{p+q+1} ((p+1)^2 e_{p+1,q} - q^2 e_{p,q-1} \\ + (q+1)^2 e_{p,q+1} - p^2 e_{p-1,q}),$$

où lorsque $p = 0$ ou $q = 0$, on donne une valeur arbitraire à $e_{-1,q}$ ou $e_{p,-1}$, le terme correspondant apparaissant avec un coefficient nul. On utilise ensuite le fait que l'élément $t(i, i)$, qui opère par homothétie de rapport i^{p-q} sur $\mathcal{H}^{p,q}$, conjugue la somme $B + B^*$ en $t(i, i).(B + B^*).t(-i, -i) = -i.B + iB^*$. De ce qui précède on déduit alors aussitôt comment opère $B - B^*$

$$(B - B^*).e_{p,q} = \frac{1}{p + q + 1} (-(p + 1)^2 e_{p+1,q} + q^2 e_{p,q-1} + (q + 1)^2 e_{p,q+1} - p^2 e_{p-1,q}),$$

et l'on voit que ces deux formules nous permettent de séparer les contributions respectives de B et B^*

$$B.e_{p,q} = \frac{1}{p + q + 1} ((q + 1)^2 e_{p,q+1} - p^2 e_{p-1,q}),$$

$$B^*.e_{p,q} = \frac{1}{p + q + 1} ((p + 1)^2 e_{p+1,q} - q^2 e_{p,q-1}).$$

(1.6) Pour déterminer maintenant l'image par B des $e_{p,q}(j)$, on utilise le fait que B commute à A , laquelle envoie $e_{p,q}(j)$ sur un multiple de $e_{p,q}(j + 1)$ explicité plus haut. Un rapide calcul nous fournit le résultat pour $j \geq 0$

$$B.e_{p,q}(j) = \frac{1}{p + q + 1} ((q + 1)^2 e_{p,q+1}(j) - p(p - j) e_{p-1,q}(j)),$$

ainsi qu'on le vérifie par récurrence sur $j \geq 0$. Montrons que cette formule demeure également valable pour les $j \leq 0$: si on la suppose vraie pour un j , $-q < j \leq 0$, alors la commutation de B et A entraîne que la différence

$$B.e_{p,q}(j - 1) - \frac{1}{p + q + 1} ((q + 1)^2 e_{p,q+1}(j - 1) - p(p - j + 1) e_{p-1,q}(j - 1))$$

appartient au noyau de A . Pour voir que cette expression est nulle, on remarque qu'elle est vecteur propre pour les matrices $t(\alpha, \alpha^{-2})$ et la valeur propre $\alpha^{3(j-1)}$, ainsi qu'il résulte des formules donnant l'action des $t(\alpha, \beta)$ (d'une façon générale, $t(\alpha, \alpha^{-2})$ agit sur $e_{p,q}(j)$ par multiplication par α^{3j}), ainsi que du fait que $t(\alpha, \alpha^{-2})$ et B commutent. Or $\text{Ker}(A)$ est engendré par les $e_{p',q'}(p')$ et il est donc contenu dans la somme des espaces propres associés aux valeurs propres $\alpha^{3p'}$, avec $p' \geq 0$. Il en résulte donc bien (car $j - 1 < 0$) que la différence ci-dessus est nulle, et la formule est donc établie pour toute valeur $-q \leq j \leq p$.

D'une façon tout à fait analogue, on utilise la commutation de B^* et A^* pour déterminer l'action de B^* sur les $e_{p,q}(j)$. On obtient par un calcul direct, dans le cas où $j \leq 0$, et par un argument identique au précédent, faisant intervenir le noyau de A^* , dans le cas $j > 0$, la formule

$$B^*.e_{p,q}(j) = \frac{1}{p+q+1} ((p+1)^2 e_{p+1,q}(j) - q(q+j) e_{p,q-1}(j)).$$

Finalement, on exprime l'action de C en remarquant que $C = [B^*, A]$. Nous rassemblons dans un formulaire le résultat que l'on obtient de la sorte, ainsi que ceux trouvés précédemment, donnant les actions de $t(\alpha, \beta)$, A et B

(1.7) Formulaire:

$$t(\alpha, \beta).e_{p,q}(j) = \alpha^{2(q-p)+j} \beta^{q-p-j}.e_{p,q}(j),$$

$$A.e_{p,q}(j) = -(p-j).e_{p,q}(j+1),$$

$$B.e_{p,q}(j) = \frac{1}{p+q+1} ((q+1)^2 e_{p,q+1}(j) - p(p-j) e_{p-1,q}(j)),$$

$$C.e_{p,q}(j) = \frac{1}{p+q+1} ((p+1)^2 e_{p+1,q}(j+1) + q(p-j) e_{p,q-1}(j+1)).$$

(1.8) Variante: cas des groupes $U(2, 1)$ et $CU(2, 1)$.

Nous considérerons en général, plutôt que le groupe $SU(2, 1)$, le groupe unitaire $U(2, 1)$, ou même $CU(2, 1)$ (groupe des similitudes unitaires). La représentation que nous avons jusqu'ici étudiée est triviale sur le centre de $SU(2, 1)$ et elle se prolonge en des représentations, toujours triviales sur leurs centres, de chacun des deux groupes $U(2, 1)$ et $CU(2, 1)$. Nous noterons encore π_0 l'un ou l'autre de ces prolongements, qui se réalisent également sur l'espace des fonctions sur la sphère, l'action étant décrite par la formule

$$(\pi_0(g).f)(Z) = |\det(g)|^{2/3} |\bar{d} - \langle Z, b \rangle|^{-2} f(g^{-1}.Z).$$

Les formules que nous avons trouvées ci-dessus demeurent bien sûr valables pour ces actions étendues. Il convient toutefois, dans le cas du groupe $U(2, 1)$ (resp. $CU(2, 1)$), de désigner maintenant par T l'ensemble des matrices diagonales

$$t(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix},$$

où α, β , et γ sont des nombres complexes de module 1 (resp. trois nombres complexes de même module). L'action d'une telle matrice sur $e_{p,q}(j)$ est alors donnée par

$$t(\alpha, \beta, \gamma).e_{p,q}(j) = \alpha^{(q-p)+j} \beta^{-j} \gamma^{p-q}.e_{p,q}(j).$$

2. Cohomologie de π_0 .

(2.1) L'algèbre de Lie \mathfrak{n} est engendrée comme espace vectoriel par les trois matrices A , B , et C . La première est centrale dans \mathfrak{n} , tandis que le crochet $[B, C]$ est égal à A . Nous allons calculer directement la \mathfrak{n} -cohomologie du module \mathcal{H} en utilisant les formules ci-dessus et le complexe standard. Pour $0 \leq q \leq 3$, on considère donc le groupe de cochaînes

$$\mathcal{C}^q = \mathcal{C}^q(\mathfrak{n}, \mathcal{H}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}} \left(\bigwedge^q \mathfrak{n}, \mathcal{H} \right).$$

Fixons des isomorphismes $\mathcal{C}^0 \simeq \mathcal{H}$, $\mathcal{C}^1 \simeq \mathcal{H}^3$, $\mathcal{C}^2 \simeq \mathcal{H}^3$, $\mathcal{C}^3 \simeq \mathcal{H}$ de la façon suivante: le premier est évident, le second est défini en associant à tout élément de \mathcal{C}^1 le triple (u, v, w) des images respectives de A , B , et C ; le troisième s'obtient de même en considérant les images, notées (x, y, z) , des éléments respectifs $B \wedge C$, $C \wedge A$, $A \wedge B$, et enfin le dernier correspond à l'image de $A \wedge B \wedge C$. Via ces isomorphismes, on peut exprimer l'opérateur cobord ∂ comme suit

$$\begin{aligned} \text{pour } h \in \mathcal{H} \simeq \mathcal{C}^0, & \quad \partial(h) = (A.h, B.h, C.h); \\ \text{pour } (u, v, w) \in \mathcal{H}^3 \simeq \mathcal{C}^1, & \quad \partial(u, v, w) = (B.w - C.v - u, C.u \\ & \quad \quad \quad - A.w, A.v - B.u); \\ \text{pour } (x, y, z) \in \mathcal{H}^3 \simeq \mathcal{C}^2, & \quad \partial(x, y, z) = A.x + B.y + C.z. \end{aligned}$$

Des formules exprimant l'action de \mathfrak{n} , on déduit qu'aucun vecteur non nul de \mathcal{H} ne peut être invariant: les h vérifiant $A.h = 0$ sont combinaisons linéaires de $e_{p,q}(p)$, et on voit alors que B opère de façon injective sur $\text{Ker}(A)$. Le groupe $H^0(\mathfrak{n}, \mathcal{H})$ est donc nul.

Le groupe des 1-cocycles \mathcal{Z}^1 s'identifie à

$$\mathcal{Z}^1 = \{(u, v, w) \in \mathcal{H}^3; \quad B.w - C.v = u, \quad C.u = A.w, \quad A.v = B.u\},$$

et nous devons le quotienter par le sous-groupe constitué des triples de la forme: $(A.h, B.h, C.h)$. Or tous les $e_{p,q}(j)$, pour $-q < j \leq p$ appartiennent à l'image de A , et nous pouvons donc supposer que nous partons d'un 1-cocycle (u, v, w) avec u de la forme:

$$u = \sum_{p,q \geq 0} \lambda_{p,q} e_{p,q}(-q).$$

Alors

$$B.u = \sum_{p,q \geq 0} \frac{1}{p+q+1} (q+1)^2 \lambda_{p,q} e_{p,q+1}(-q) \\ - \sum_{p>0, q \geq 0} \frac{1}{p+q+1} p(p+q) \lambda_{p,q} e_{p-1,q}(-q),$$

où la première somme est dans l'image de A ; la seconde doit y être aussi (car $B.u = A.v$), ce qui entraîne que $\lambda_{p,q}$ doit être nul pour $p > 0$. Considérons maintenant:

$$C.u = \sum_{q \geq 0} \frac{1}{q+1} \lambda_{0,q} e_{1,q}(-q+1) + \sum_{q>0} \frac{1}{q+1} q^2 \lambda_{0,q} e_{0,q-1}(-q+1);$$

cet élément doit également appartenir à l'image de A , ainsi qu'il résulte de l'égalité $C.u = A.w$. Cela force tous les $\lambda_{0,q}$ pour $q > 0$ à être nuls.

Nous sommes donc ramenés au cas d'un cocycle (u, v, w) avec u de la forme: $u = \lambda e_{0,0}$. Alors $B.u = \lambda e_{0,1}$, $C.u = \lambda e_{1,0}(1)$ et les relations $A.v = B.u$, $A.w = C.u$ sont équivalentes aux suivantes

$$v \in -\lambda e_{0,1}(-1) + \text{Ker}(A); \quad w \in -\lambda e_{1,0} + \text{Ker}(A);$$

d'autre part, on constate aussitôt que le triple $(e_{0,0}, -e_{0,1}(-1), -e_{1,0})$ est bien un cocycle, c'est à dire que la condition non encore considérée $B.w - C.v = u$ est aussi satisfaite. Comme $e_{0,0}$ n'appartient pas à l'image de A , ce cocycle n'est pas un cobord, et il définit donc une classe de cohomologie non triviale.

Nous allons montrer maintenant que cette classe engendre $H^1(n, \mathcal{H})$; en vertu de ce qui précède, il nous suffit pour cela de prouver que tout cocycle de la forme $(0, v, w)$ est un cobord. Le fait que ce triple soit un cocycle signifie que v et w appartiennent à $\text{Ker}(A)$, c'est à dire à l'espace engendré par les $e_{p,q}(p)$, et que $B.w = C.v$.

Nous pouvons donc poser

$$v = \sum_{p,q \geq 0} \beta_{p,q} e_{p,q}(p); \quad w = \sum_{p,q \geq 0} \gamma_{p,q} e_{p,q}(p),$$

d'où

$$B.w = \sum_{p,q \geq 0} \frac{1}{p+q+1} (q+1)^2 \gamma_{p,q} e_{p,q+1}(p), \\ C.v = \sum_{p,q \geq 0} \frac{1}{p+q+1} (p+1)^2 \beta_{p,q} e_{p+1,q}(p+1).$$

L'égalité de ces deux expressions revient aux égalités

$$\beta_{p,0} = 0, \quad \gamma_{0,q} = 0, \quad \text{pour } p, q \geq 1 : \quad p^2 \beta_{p-1,q} = q^2 \gamma_{p,q-1}.$$

On voit alors que $(0, v, w)$ est le cobord associé à l'élément

$$h = \sum_{p,q \geq 0} h_{p,q} e_{p,q}(p),$$

avec

$$h_{p,q} = \frac{p+q+1}{(q+1)^2} \beta_{p,q+1} = \frac{p+q+1}{(p+1)^2} \gamma_{p+1,q}.$$

(2.2) On peut prouver par des arguments analogues que le second groupe de cohomologie $H^2(n, \mathcal{H})$ est lui aussi de dimension 1. Afin de ne pas lasser le lecteur, contentons nous de remarquer que le 2-cocycle suivant

$$(x, y, z) = (e_{0,0}, 0, 0)$$

n'est pas un cobord. En effet, si c'était le cobord d'une 1-cochaîne (u, v, w) , quitte à modifier cette dernière par un cobord $\partial(h)$, nous pourrions supposer que u est comme ci-dessus une combinaison linéaire de $e_{p,q}(-q)$; alors l'argument déjà utilisé plus haut, partant des égalités $C.u = A.w$, $A.v = B.u$, entraînerait que u devrait être en fait un multiple de $e_{0,0}$. Modifiant alors (u, v, w) par un multiple du 1-cocycle étudié précédemment, nous serions finalement ramenés à la situation où $u = 0$, avec v et w deux éléments de $\text{Ker}(A)$ tels que $B.w - C.v = e_{0,0}$, et on constate aussitôt (cf. les formules de la fin du n^o précédent exprimant $B.w$ et $C.v$) que cela n'est pas possible.

Plutôt que de montrer directement que la classe du 2-cocycle précédent engendre $H^2(n, \mathcal{H})$, invoquons ici la dualité de Poincaré: le dual de $H^2(n, \mathcal{H})$ est isomorphe à $H^1(n, \mathcal{H}^*)$ (cf. par exemple [Kn] Chap. VI Paragraphe 3; noter que $\wedge^3(n)$ est trivial comme n -module). Or le dual de $\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}^{p,q}$ est le produit des duaux, également isomorphe au produit $\prod \mathcal{H}^{p,q}$: cela résulte de ce que la représentation que nous considérons est à la fois unitarisable et réalisable sur \mathbf{R} : plus précisément il existe sur \mathcal{H} un produit scalaire hermitien invariant pour lequel la décomposition en $\mathcal{H}^{p,q}$ est orthogonale; or le conjugué d'un polynôme de $\mathcal{H}^{p,q}$ est dans $\mathcal{H}^{q,p}$, et l'on obtient ainsi une dualité équivariante sur \mathcal{H} qui identifie $\mathcal{H}^{q,p}$ au dual de $\mathcal{H}^{p,q}$. Ceci dit, le calcul que nous avons fait pour calculer la 1-cohomologie de $\bigoplus \mathcal{H}^{p,q}$ s'applique également, en donnant le même résultat, au produit $\prod \mathcal{H}^{p,q}$. Nous en déduisons que $H^2(n, \mathcal{H})$ est donc bien de dimension 1.

Finalement, le groupe $H^3(n, \mathcal{H})$ est *nul*, ainsi qu'on peut le voir en invoquant de nouveau la dualité de Poincaré, ou bien plus simplement en constatant directement que la réunion des images des trois opérateurs A , B , et C , engendre \mathcal{H} .

(2.3) Si G désigne l'un des trois groupes $SU(2, 1)$, $U(2, 1)$ ou $CU(2, 1)$, notre algèbre de Lie \mathfrak{n} est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie complexifiée \mathfrak{g} de G . Son normalisateur dans $G_{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe de Borel, contenant le tore T constitué des matrices diagonales de G . Nous noterons \mathfrak{b} la sous-algèbre de Borel correspondante, qui est donc la somme de \mathfrak{n} et de l'algèbre de Lie complexifiée, notée \mathfrak{t} , de T .

Le tore T , agissant à la fois sur \mathfrak{n} et sur \mathcal{H} , agit sur la \mathfrak{n} -cohomologie, ainsi qu'il résulte de la compatibilité entre l'action de \mathfrak{g} et de l'action du sous-groupe compact maximal sur \mathcal{H} . Explicitons cette action: une matrice diagonale $t(\alpha, \beta, \gamma)$ conjugue A (resp. B , resp. C) en $\alpha\beta^{-1}.A$ (resp. $\alpha\gamma^{-1}.B$, resp. $\gamma\beta^{-1}.C$), et son action sur \mathcal{H} a été décrite en (1.8). On trouve alors que cette matrice diagonale multiplie le 1-cocycle explicité ci-dessus par le scalaire

$$\alpha^{-1}\beta = (\alpha^{-1}\gamma)(\beta\gamma^{-1}) = (\beta\gamma^{-1})(\alpha^{-1}\gamma).$$

De même, le 2-cocycle que nous avons exhibé est multiplié par $\alpha^{-1}\beta$, car $t(\alpha, \beta, \gamma)$ multiplie $B \wedge C$ par $\alpha\beta^{-1}$ et fixe $e_{0,0}$. On voit donc que T opère par le même caractère sur $H^1(\mathfrak{n}, \mathcal{H})$ et sur $H^2(\mathfrak{n}, \mathcal{H})$. Nous noterons κ ce caractère

$$\kappa(t(\alpha, \beta, \gamma)) = \alpha^{-1}\beta$$

Nos résultats peuvent se formuler de façon équivalente en termes de *cohomologie relative*. En effet les groupes

$$H^*(\mathfrak{b}, \mathfrak{t}, \mathcal{H} \otimes \mu) = H^*(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H} \otimes \mu),$$

où μ désigne un caractère du tore T – qui s'étend de façon évidente en un caractère du sous-groupe de Borel considéré – s'obtiennent comme les T - (ou \mathfrak{t} -) invariants dans $H^*(\mathfrak{n}, \mathcal{H} \otimes \mu)$, ainsi qu'on le voit directement en comparant les 'complexes standard'. Nous avons donc obtenu la

(2.4) Proposition : *Les groupes de cohomologie*

$$H^*(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H} \otimes \mu),$$

sont nuls, sauf les deux suivants

$$H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H} \otimes \kappa^{-1}), \quad H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H} \otimes \kappa^{-1}),$$

qui sont de dimension 1.

(2.5) Commentaires:

Le calcul de la \mathfrak{n} -cohomologie des limites *non dégénérées* de séries discrètes, pour tout groupe semi-simple G , a été effectué par Williams [Wi2], à la suite de

travaux de Schmid consacrés au cas des séries discrètes. Ici \mathfrak{n} désigne le radical unipotent d'une sous-algèbre de Borel, définie à partir d'un ordre sur le système des racines relatives à un sous groupe de Cartan compact $T \subset K$. Nous rappellerons et utiliserons plus tard ces résultats de Williams. La méthode qu'il utilise, et qui raffine celle utilisée par Schmid, consiste à montrer, et à utiliser le fait que la suite spectrale de Hochschild–Serre

$$E_1^{r,s} = H^s \left(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \mathcal{H}_\pi \otimes \bigwedge^r (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-) \right) \Rightarrow H^*(\mathfrak{n}, \mathcal{H}_\pi)$$

dégénère, en utilisant exclusivement la structure du système des K -types de la représentation considérée; dans l'expression ci-dessus, \mathfrak{k} désigne l'algèbre de Lie complexifiée de K , \mathcal{H}_π le module de Harish–Chandra d'une limite de série discrète π , \mathfrak{p} l'orthogonal de \mathfrak{k} (qui intervient dans la décomposition de Cartan), et enfin $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}$. Cette méthode ne marche plus du tout dans le cas des limites dégénérées, ainsi qu'on le voit déjà dans le cas que nous avons étudié : en effet notre représentation π_0 a le même système de K -types que toute autre série principale irréductible, et pourtant elle est la seule, ainsi qu'on le voit facilement, à posséder de la n -cohomologie.

Il apparaît donc que ce calcul dans le cas des limites dégénérées doit utiliser des renseignements beaucoup précis que ceux qui suffisent dans le cas non dégénéré. Nous avons ici utilisé une description complètement explicite de la représentation en question (et nous aurons besoin dans la suite d'utiliser les expressions explicites de nos cocycles), mais on ne saurait bien sûr espérer faire de même en général. En fait, l'idée raisonnable pour traiter le cas d'un groupe quelconque consiste à utiliser la localisation, c'est-à-dire dans le cas qui nous intéresse à réaliser nos limites de séries discrètes comme certains groupes de cohomologie à support dans les $K_{\mathbb{C}}$ -orbites fermées de la variété de drapeaux associée à $G_{\mathbb{C}}$; la n -cohomologie est alors l'aboutissement d'une suite spectrale liée à la stratification de l'orbite considérée en $K_{\mathbb{C}} \cap N$ -orbites, où N désigne le sous-groupe correspondant à \mathfrak{n} . Par exemple, dans le cas de $SU(2, 1)$, la variété de drapeaux est l'ensemble des couples (x, L) , où x est un point et L une droite de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, avec $x \in L$; on a dans ce cas trois $K_{\mathbb{C}}$ -orbites fermées: \mathcal{O}_1 , ensemble des drapeaux (O, L) dont le point coïncide avec le point O de coordonnées $(0, 0, 1)$; \mathcal{O}_2 , constitué des couples (x, Δ) , où Δ désigne la 'droite à l'infini' d'équation $T = 0$, avec T la troisième coordonnée; et enfin \mathcal{O}_3 , formée des (x, L) avec $x \in \Delta$ et L la droite joignant x à O . Les deux premières orbites correspondent aux séries discrètes holomorphes et anti-holomorphes et à leurs limites, tandis que la troisième est associée aux séries discrètes non-holomorphes et à leurs limites, dont π_0 fait partie. Pour l'algèbre \mathfrak{n} que nous avons considérée, la stratification de \mathcal{O}_3 consiste en le point (x_0, L_0) , avec x_0 de coordonnées $(1, 0, 0)$ et L_0 la droite correspondante, et en son complémentaire que nous notons \mathcal{O}_3' . A chaque paramètre de Harish–Chandra λ , associé à une série discrète non-holomorphe (ou à une limite) π_λ , correspond un faisceau localement

libre \mathcal{F}_λ sur la variété de drapeaux, tel que le module de Harish–Chandra \mathcal{H}_λ de π_λ se réalise sur $H_{\mathcal{O}_3}^2(\mathcal{F}_\lambda)$. De la stratification de l'orbite \mathcal{O}_3 résulte alors une suite exacte de \mathfrak{n} -modules

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_\lambda \rightarrow \mathcal{H}'_\lambda \rightarrow \mathcal{H}''_\lambda \rightarrow 0,$$

avec:

$$\mathcal{H}'_\lambda = H_{\mathcal{O}'_3}^2(\mathcal{F}_\lambda), \quad \mathcal{H}''_\lambda = H_{\{(x_0, L_0)\}}^3(\mathcal{F}_\lambda).$$

On peut calculer la \mathfrak{n} -cohomologie de \mathcal{H}'_λ et \mathcal{H}''_λ : on trouve comme seuls groupes non nuls (que λ soit régulier ou singulier)

$$H^0(\mathfrak{n}, \mathcal{H}''_\lambda), \quad H^2(\mathfrak{n}, \mathcal{H}'_\lambda),$$

qui sont de dimension 1. La suite spectrale dont il a été question ci-dessus est alors dégénérée, et se réduit aux isomorphismes découlant de la suite exacte longue de cohomologie, i.e.

$$H^1(\mathfrak{n}, \mathcal{H}_\lambda) \simeq H^0(\mathfrak{n}, \mathcal{H}''_\lambda), \quad H^2(\mathfrak{n}, \mathcal{H}_\lambda) \simeq H^2(\mathfrak{n}, \mathcal{H}'_\lambda).$$

On retrouve ainsi (à condition de justifier toutes ces affirmations) les résultats déjà obtenus ci-dessus par le calcul direct.

Examinons maintenant le cas de la sous-algèbre \mathfrak{n}' constituée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas notre orbite se stratifie de la même façon que précédemment. Cela induit une résolution de \mathcal{H}_λ comme ci-dessus, avec deux modules, encore notés \mathcal{H}'_λ et \mathcal{H}''_λ , respectivement associés aux strates \mathcal{O}'_3 et $\{(x_0, L_0)\}$. De nouveau on trouve que la \mathfrak{n}' -cohomologie de ces modules reste la même que λ soit régulier ou devienne singulier dans la chambre 'non-holomorphe', avec deux groupes non nuls qui sont dans ce nouveau cas

$$H^1(\mathfrak{n}', \mathcal{H}'_\lambda), \quad H^1(\mathfrak{n}', \mathcal{H}''_\lambda),$$

tous deux de dimension 1. On en déduit une suite exacte longue qui prend la forme suivante

$$0 \rightarrow H^1(\mathfrak{n}', \mathcal{H}_\lambda) \rightarrow H^1(\mathfrak{n}', \mathcal{H}'_\lambda) \rightarrow H^1(\mathfrak{n}', \mathcal{H}''_\lambda) \rightarrow H^2(\mathfrak{n}', \mathcal{H}_\lambda) \rightarrow 0,$$

et maintenant la situation est très différente suivant que λ est nul ou non: s'il est non nul (i.e. pour une série discrète non holomorphe ou une limite non dégénérée),

la flèche centrale est nulle (car on peut voir que le tore T opère par deux caractères distincts sur $H^1(n', \mathcal{H}')$ et sur $H^1(n', \mathcal{H}'')$). On obtient donc pour $\lambda \neq 0$ deux groupes de cohomologie de dimension 1, $H^1(n', \mathcal{H}_\lambda)$ et $H^2(n', \mathcal{H}_\lambda)$, conformément aux résultats de Williams. Au contraire, pour $\lambda = 0$, on peut montrer que cette flèche médiane est un isomorphisme : notre représentation π_0 n'a donc pas de n' -cohomologie, ainsi que le prédisent les résultats de Mirkovič mentionnés dans l'introduction.

Le preprint [So] traite du cas d'un groupe réductif général, en utilisant la localisation d'un point de vue moins naïf que celui que l'on vient d'exposer. Plus précisément, Soergel montre que le calcul de la n -cohomologie des limites de séries discrètes se ramène au calcul de la cohomologie d'un complexe combinatoire explicite: il s'agit d'espaces vectoriels de bases certains sous-ensembles du groupe de Weyl (dont la définition dépend des paramètres de la limite considérée), et de différentielles définies simplement en termes de l'ordre de Bruhat et de la longueur des éléments de ce groupe. Ce résultat redonne très facilement tous les cas connus (en particulier le cas non dégénéré de Schmid et Williams, pour lequel toutes les différentielles de Soergel sont nulles). Le cas général au contraire conduit à des problèmes combinatoires très difficiles, que j'ai soumis à différents combinaticiens (en particulier, Björner, qui s'était intéressé à des questions en relation avec cette problématique). Il semble peu probable d'obtenir au bout du compte des résultats bien explicites pour les degrés et les dimensions des groupes de cohomologie qui apparaissent (même dans des cas aussi concrets que celui, mentionné dans l'introduction, d'un groupe unitaire quasi-déployé et d'une limite de série discrète associée à un paramètre nul).

3. Variétés de Griffiths–Schmid pour des groupes unitaires de type (2,1). Faisceaux et cohomologie.

3.1. Le domaine de périodes Ω

Pour fixer les notations, $G_{\mathbf{R}}$ désigne désormais le groupe $U(2, 1)$. Il opère sur l'ensemble des drapeaux du plan projectif $P^2(\mathbf{C})$, lequel contient le plan affine \mathbf{C}^2 via l'injection

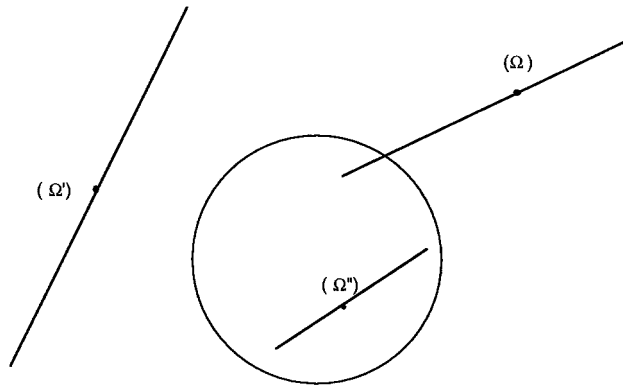
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons Δ la *boule unité* de \mathbf{C}^2 , constituée des

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

tels que $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$ et $\overline{\Delta}$ la boule fermée; c'est un exercice facile de vérifier que pour l'action considérée on a trois *orbites ouvertes* qui sont:

- (i) Ω , ensemble des drapeaux (x, L) tels que $x \notin \overline{\Delta}$ et que $L \cap \Delta \neq \emptyset$;
- (ii) Ω' , ensemble des (x, L) tels que $L \cap \overline{\Delta} = \emptyset$;
- (iii) Ω'' , ensemble des (x, L) tels que $x \in \Delta$.



Considérons les drapeaux particuliers suivants (où $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ désignent les coordonnées sur $P^2(\mathbf{C})$):

- (i) (x_1, L_1) , avec x_1 de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et L_1 la droite d'équation $Y = 0$;
- (ii) (x_2, L_2) , avec $x_2 = x_1$ et L_2 la droite d'équation $Z = 0$;
- (iii) (x_3, L_3) , avec $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et L_3 la droite d'équation $X = 0$;

on voit qu'ils appartiennent respectivement à Ω , Ω' et Ω'' . Le stabilisateur de chacun d'eux dans $G_{\mathbf{R}}$ coïncide avec le tore diagonal T , tandis que leurs stabilisateurs respectifs dans $G_{\mathbf{C}} \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ sont les sous-groupes de Borel B (resp. B' , resp. B'') constitués des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que chacune des orbites Ω , Ω' , Ω'' est difféomorphe (en tant que variété C^∞) au quotient $G_{\mathbf{R}}/T$, mais les structures complexes sont différentes et correspondent aux plongements respectifs évidents de $G_{\mathbf{R}}/T$ dans $G_{\mathbf{C}}/B$ (resp. $G_{\mathbf{C}}/B'$, resp. $G_{\mathbf{C}}/B''$). Cela peut se formuler d'une autre manière: notons \mathfrak{b} (comme dans le paragraphe précédent), \mathfrak{b}' , \mathfrak{b}'' les algèbres de Lie complexifiées de B, B', B'' et \mathfrak{b}^- , \mathfrak{b}'^- , \mathfrak{b}''^- les sous-algèbres de Borel contenant \mathfrak{t} opposées aux précédentes, et enfin \mathfrak{n} , \mathfrak{n}' , \mathfrak{n}'' , \mathfrak{n}^- , \mathfrak{n}'^- , \mathfrak{n}''^- les algèbres unipotentes correspondantes. L'espace tangent complexifié à $G_{\mathbf{R}}/T$ en la classe de l'élément neutre

s'identifie à $\mathfrak{g}/\mathfrak{t} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{n}^- = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{n}'^- = \mathfrak{n}'' \oplus \mathfrak{n}''^-$, et les trois structures complexes (évidemment $G_{\mathbf{R}}$ -invariantes) considérées sont alors caractérisées par le fait que l'espace tangent *holomorphe* correspond à \mathfrak{n}^- (resp. \mathfrak{n}'^- , resp. \mathfrak{n}''^-), tandis que l'espace tangent *anti-holomorphe* s'identifie à \mathfrak{n} (resp. \mathfrak{n}' , resp. \mathfrak{n}'').

La dualité relativement à la forme hermitienne considérée induit une bijection *anti-holomorphe* $G_{\mathbf{R}}$ -équivariante entre les domaines Ω' et Ω'' ; on remarquera aussi que le troisième est fibré en droites projectives au-dessus de la boule Δ . Dans la suite nous nous intéresserons exclusivement au premier domaine Ω .

3.2. Variétés de Griffiths–Schmid. Faisceaux

Nous fixons désormais une forme sur \mathbf{Q} de notre groupe $G_{\mathbf{R}}$, et nous notons cette forme G : on obtient un tel groupe à partir d'un corps quadratique imaginaire, d'une algèbre centrale simple de dimension 9 sur ce corps, et enfin d'une involution de seconde espèce sur cette dernière, d'un type convenable à l'infini (voir [Cl1] pour une discussion plus précise). Les *variétés de Griffiths–Schmid connexes* associées, considérées dans [Gr–Sc] (voir aussi [De] et les nombreux articles de Griffiths sur le sujet) sont alors les quotients $\Gamma \backslash \Omega$ pour Γ un sous-groupe de congruence assez petit (i.e. agissant librement) dans G . Ce sont des variétés analytiques complexes de dimension 3, *non algébriques*. Comme dans le cas de variétés de Shimura, on a aussi une version adélique: pour U un sous-groupe compact ouvert (assez petit) du groupe $G(\mathbf{A}_f)$ des points à valeurs dans les adèles finies, nous noterons:

$$X_U = G(\mathbf{Q}) \backslash [\Omega \times (G(\mathbf{A}_f)/U)]$$

et on vérifie comme d'habitude que c'est une réunion finie de quotients $\Gamma \backslash \Omega$. Si nous remplaçons dans les définitions précédentes Ω par Ω' ou Ω'' , nous obtiendrons des variétés difféomorphes mais munies de structures complexes différentes, alors algébriques et fibrées en droites projectives sur des surfaces de Shimura associées au groupe G .

Soit μ un caractère algébrique du tore $T_{\mathbf{C}}$. On l'étend de façon habituelle en un caractère, noté encore μ , du sous-groupe de Borel B , et cela définit un faisceau localement libre \mathcal{F}_{μ} (si on préfère, un fibré en droites) équivariant sur la variété de drapeaux. Par restriction, on obtient un faisceau $G_{\mathbf{R}}$ -équivariant sur Ω , d'où finalement, par passage au quotient, un faisceau localement libre en \mathcal{O}_X -modules sur X_U ou sur $\Gamma \backslash \Omega$, que nous notons encore \mathcal{F}_{μ} .

Nous allons nous intéresser dans ce qui suit aux groupes de cohomologie cohérente $H^*(X_U, \mathcal{F}_{\mu})$ et à leurs relations avec les formes automorphes sur G . Pour cela nous supposons désormais que le groupe adjoint G^{ad} est *anisotrope sur \mathbf{Q}* (autrement dit, l'algèbre de dimension 9 d'où il provient est un corps gauche), ce qui fait que les variétés de Griffiths–Schmid considérées sont *compactes* (de même que les surfaces de Shimura correspondantes). Alors la relation est simple et bien connue: voir par exemple [Wi1], [Sc1], [Sc2], ainsi que [Ha1], [Ha2] où est exposé le résultat analogue pour les variétés de Shimura, dans le cas beaucoup

plus épineux d'une variété non nécessairement compacte. Nous allons énoncer le résultat avant d'en donner une esquisse de démonstration.

Soit $\mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/U)$ l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ sur le quotient $G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/U$, lequel n'est autre qu'une réunion finie de quotients de la forme $\Gamma\backslash G(\mathbf{R})$. Cet espace est de façon évidente une représentation différentiable du groupe $G(\mathbf{R})$. Nous noterons \mathcal{A}_U le sous-espace constitué des vecteurs qui sont à la fois K -finis et $Z(\mathfrak{g})$ -finis (avec $Z(\mathfrak{g})$ le centre de l'algèbre enveloppante), et \mathcal{A} la réunion des \mathcal{A}_U . Ce dernier espace, vu comme $(\mathfrak{g}, K) \times G(\mathbf{A}_f)$ -module, se décompose en la somme directe (dénombrable) des *représentations automorphes* irréductibles du groupe $G(\mathbf{A})$. Nous noterons $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ une telle représentation, décomposée en ses parties finie et infinie, respectivement réalisées sur les espaces \mathcal{H}_{π_f} et \mathcal{H}_{π_∞} (module de Harish–Chandra); elle intervient dans \mathcal{A} avec une multiplicité finie $m(\pi)$. Enfin on retrouve \mathcal{A}_U à partir de \mathcal{A} en prenant les U -invariants.

Le théorème suivant (ou plutôt son analogue pour les variétés connexes) est énoncé par exemple dans [Wi1]. Nous notons $\chi_{\delta-\mu}$ le caractère du centre de l'algèbre enveloppante qui correspond à $\delta - \mu$ (où δ est la demi-somme des racines correspondant à la sous-algèbre \mathfrak{n}) par l'homomorphisme d'Harish–Chandra.

(3.3) THÉORÈME: *On a des isomorphismes canoniques (i.e. équivariants pour l'action des opérateurs de Hecke) :*

$$\begin{aligned} H^*(X_U, \mathcal{F}_\mu) &\simeq H^*(\mathfrak{b}, T, \mathcal{A}_U \otimes \mu) \\ &\simeq \bigoplus m(\pi) \mathcal{H}_{\pi_f}^U \otimes H^*(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_\infty} \otimes \mu), \end{aligned}$$

où la somme, à priori étendue à toutes les représentations automorphes π de $G(\mathbf{A})$, est en fait limitée à celles pour lesquelles le caractère infinitésimal de π_∞ est égal à $\chi_{\delta-\mu}$, la contribution des autres étant nulle.

(3.4) Esquisse de preuve: L'idée consiste à calculer la cohomologie cohérente en écrivant le complexe de Dolbeault, et à montrer que ce dernier s'identifie au 'complexe standard' qui calcule la (\mathfrak{b}, T) -cohomologie.

Plus précisément, le q -ième groupe du complexe de Dolbeault, noté $\mathcal{C}^{0,q}$, est constitué des sections \mathcal{C}^∞ du faisceau $\mathcal{F}_\mu \otimes \Omega^{0,q}$ sur X_U , autrement dit des 'formes différentielles de type $(0, q)$ à valeurs dans \mathcal{F}_μ '. Par la projection naturelle (de fibre T) de

$$G(\mathbf{Q})\backslash [G_{\mathbf{R}} \times (G(\mathbf{A}_f)/U)] = G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A})/U$$

sur X_U , une telle forme se relève en une section sur ce dernier espace du fibré image réciproque de $\mathcal{F}_\mu \otimes \Omega^{0,q}$. Or l'image réciproque de $\Omega^{0,q}$ sur $G_{\mathbf{R}}$ peut s'identifier au fibré constant de fibre le dual de $\wedge^q \mathfrak{n} \simeq \wedge^q(\mathfrak{b}/\mathfrak{t})$, où T opère de façon naturelle. L'application de relèvement identifie donc $\mathcal{C}^{0,q}$ aux fonctions \mathcal{C}^∞

sur $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U$, à valeurs dans $\wedge^q(\mathfrak{b}/\mathfrak{t})^* \otimes \mu$, et qui sont T -équivariantes. On obtient ainsi un isomorphisme entre $\mathcal{C}^{0,q}$ et les groupes

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}^q(\mathfrak{b}, T, \mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U) \otimes \mu) \\ &= \text{Hom}_T\left(\wedge^q(\mathfrak{b}/\mathfrak{t}), \mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U) \otimes \mu\right). \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que l’opérateur cobord du côté du complexe standard correspond à la différentielle $\bar{\partial}$, d’où un isomorphisme

$$H^*(X_U, \mathcal{F}_\mu) \simeq H^*(\mathfrak{b}, T, \mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U) \otimes \mu).$$

On est alors confronté à une difficulté technique: montrer que l’on peut remplacer dans l’expression ci-dessus $\mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U) \otimes \mu$ par son sous-module $\mathcal{A}_U \otimes \mu$, autrement dit que cette inclusion induit un isomorphisme en cohomologie. Une fois cela prouvé, le théorème découle finalement d’un théorème de Casselman et Osborne ([Ca–Os]) affirmant que seules les π_∞ de caractère infinitesimal χ_δ (celui de la représentation triviale) peuvent avoir une (\mathfrak{b}, T) -cohomologie non triviale.

Cette difficulté est résolue dans les articles [Sc1] et [Sc2], ainsi qu’il est expliqué dans [Wi1]. Plus précisément, l’article [Sc1] contient une variante L^2 de notre résultat ci-dessus, avec la (\mathfrak{b}, T) -cohomologie des modules de Harish–Chandra remplacée par une variante unitaire, les ‘espaces harmoniques formels’ associés aux représentations unitaires sur des espaces de Hilbert. Dans [Sc2], Schmid prouve que ces espaces harmoniques coïncident bien, pour toute représentation unitaire irréductible, avec les espaces de n - ou (\mathfrak{b}, T) -cohomologie des modules de Harish–Chandra associés (ou plus généralement de n’importe quelle réalisation différentiable de la représentation, ainsi qu’il résulte facilement d’un argument reposant sur la suite spectrale de Hochschild–Serre (cf. (2.5))).

On peut paraphraser l’argument utilisé par Schmid dans [Sc1], dans l’esprit de la méthode esquissée ci-dessus, de la façon suivante: l’espace $\mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U) \otimes \mu$ contient $\mathcal{A}_U \otimes \mu$, lequel, vu comme (\mathfrak{g}, K) -module, est une somme discrète de modules de Harish–Chandra irréductibles \mathcal{H}_{π_∞} ; d’autre part, $\mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U) \otimes \mu$ est contenu dans le produit des espaces $\mathcal{V}_{\pi_\infty}^w$ de vecteurs différentiables correspondants aux diverses représentations π_∞ (alors vues comme représentations unitaires dans des espaces de Hilbert). Utilisant les résultats sus-mentionnés de [Ca–Os] et [Sc2], on voit que l’inclusion de la somme des \mathcal{H}_{π_∞} dans le produit des $\mathcal{V}_{\pi_\infty}^w$ induit un isomorphisme sur la (\mathfrak{b}, T) -cohomologie (laquelle se réduit à une somme finie d’un certain nombre de facteurs correspondant à certains des π_∞). Finalement, $\mathcal{C}^\infty(G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A})/U) \otimes \mu$ étant pris ‘en sandwich’ entre les deux, il en est de même de la cohomologie: cela résulte de ce que l’on peut décrire ces groupes de cohomologie comme sous-groupes de chaînes harmoniques, i.e. annulées à la fois par l’opérateur cobord et par son adjoint.

(3.5) Classification

Pour une classification des représentations de $U(2, 1)$, on renvoie par exemple à ([Ro] 12.3), ou bien à ([Bo-Wa] VII Paragraphe 4) et [Wa], ces deux derniers articles traitant plutôt de $SU(2, 1)$ (mais la théorie est essentiellement la même, car $U(2, 1)$ est engendré par son centre et par $SU(2, 1)$). Il résulte de ces travaux que les seules représentations unitaires irréductibles de caractère infinitésimal entier (i.e. de la forme $\chi_{\delta-\mu}$ pour μ associé à un caractère de T) sont : les séries discrètes et leurs limites, les caractères (factorisés à travers le déterminant), et enfin certaines représentations non tempérées, qui sont notées J_{ϕ}^{\pm} dans [Ro]. D'autre part, le Théorème (14.6.3) de loc.cit. affirme que ces dernières ne peuvent intervenir comme composantes archimédiennes d'une représentation automorphe d'un groupe tel que nous avons considéré, c'est à dire anisotrope modulo le centre (elles interviendraient par contre dans le cas quasi-déployé).

Considérons les formes linéaires suivantes sur l'algèbre de Lie complexifiée du tore T , constituée des matrices diagonales $\text{diag}(x, y, z)$

$$e_1(\text{diag}(x, y, z)) = x - y,$$

$$e_2(\text{diag}(x, y, z)) = y - z,$$

$$e_3(\text{diag}(x, y, z)) = z - x,$$

ainsi que

$$f(\text{diag}(x, y, z)) = \frac{1}{3}(x + y + z).$$

e_1 est une racine compacte, tandis que e_2 et e_3 sont des racines non compactes, et la somme des trois est nulle. On peut décrire le réseau, noté \mathcal{L} , des différentielles des caractères de T comme l'ensemble des combinaisons linéaires :

$$\frac{1}{3}m.e_1 + \frac{1}{3}n.e_2 + l.f,$$

avec m, n , et l trois entiers vérifiant les congruences

$$-m \equiv n \equiv l \pmod{3}.$$

A chaque donnée (λ, C) d'un élément $\lambda \in \mathcal{L}$ et d'une chambre de Weyl C dans le plan engendré par les racines, contenant la projection de λ , et telle qu'aucune racine compacte simple relativement à C ne soit orthogonale à cette projection, correspond une (limite de) série discrète $\pi(\lambda, C)$. C'est une représentation pour laquelle une matrice centrale $t(\alpha, \alpha, \alpha)$ agit par α^l (avec l comme ci-dessus) et dont la restriction à $SU(2, 1)$ est donnée par la projection de λ . Pour λ de projection 0, le calcul de la cohomologie a été effectué au Paragraphe 2, tandis que dans les autres

cas (non dégénérés) cela résulte de [Wi2]. Il ne nous reste plus qu'à expliciter les choses.

Les racines positives pour l'ordre correspondant à \mathfrak{n} sont $e_1, -e_2, -e_3$, et δ est égal à e_1 (on prendra garde au fait que les conventions de Williams sont opposées: avec ses notations, $\Delta^+ = \{-e_1, e_2, e_3\}$ et son δ est l'opposé du nôtre). D'après [Wi2], les représentations $\pi(\lambda, C)$ telles que la cohomologie

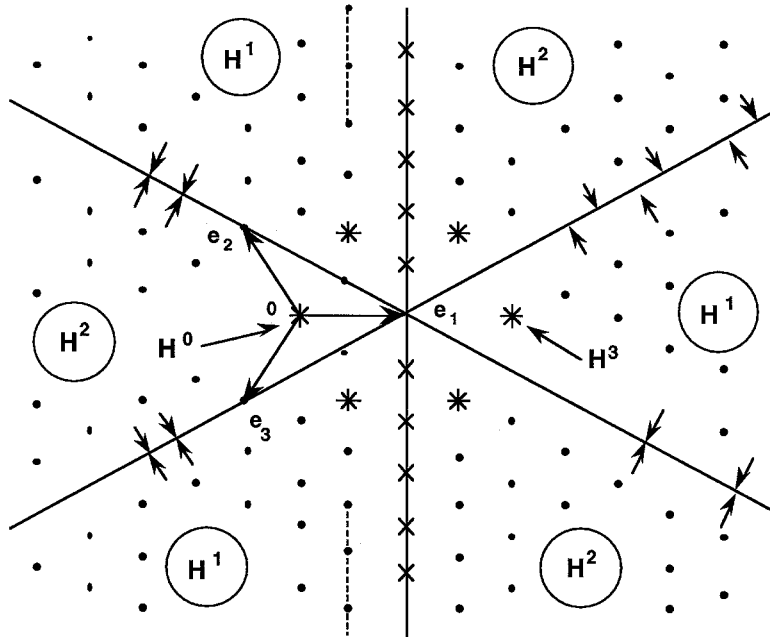
$$H^*(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi(\lambda, C)} \otimes \mu) \simeq H^*(\mathfrak{n}, \mathcal{H}_{\pi(\lambda, C)})_{\mu^{-1}}$$

soit non nulle sont celles correspondant à $\lambda = \delta - \mu$ (modulo l'action du groupe de Weyl compact, lequel se réduit à l'identité et à la symétrie par rapport au mur compact). Il y en a donc une lorsque la projection de $\delta - \mu$ sur le plan des racines est non singulière, deux lorsque cette projection est non nulle appartient à un mur non compact, aucune si elle est non nulle et située sur le mur compact. Dans tous les cas, une telle $\pi(\lambda, C)$ intervient en exactement un degré de cohomologie, égal à 1 ou 2 et le groupe correspondant est de dimension 1. Appliquant la recette donnée dans [Wi2], on trouve que, lorsque la projection de $\delta - \mu$ appartient au demi-plan limité par le mur compact et contenant e_1 , ce degré vaut 1 pour les séries holomorphes et anti-holomorphes et leurs limites, et 2 pour les séries non-holomorphes et leurs limites. Dans l'autre demi-plan, c'est au contraire 1 dans le cas non-holomorphe, et 2 dans les cas holomorphe et anti-holomorphe.

D'après le Paragraphe 2, les séries dégénérées $\pi(\lambda, C)$, avec λ de projection nulle (c'est à dire de la forme $l.f$) et C non-holomorphe (avec les notations du Paragraphe 1, $\pi(\lambda, C)$ est la tordue de π_0 par $|\det|^l$) contribuent à la cohomologie en degrés 1 et 2 correspondant au caractère $\mu = \delta - \lambda$ (en effet δ coïncide avec la différentielle du caractère que nous avons noté κ^{-1}), avec un groupe de cohomologie qui est encore de dimension 1.

Finalement, on vérifie aussitôt qu'une représentation de dimension 1, $|\det|^l$, possède de la cohomologie en les degrés 0 et 3, avec des espaces de dimension 1 correspondant respectivement aux caractères $\mu = -l.f$ et $\mu = 2.\delta - l.f$. Elle en possède aussi en degré 1, avec deux espaces de dimension 1, respectivement associés à $\mu = -e_3 - l.f$ et $\mu = -e_2 - l.f$, ainsi qu'en degré 2, avec de nouveau des contributions de dimension 1 pour $\mu = e_1 - e_2 - l.f$ et $\mu = e_1 - e_3 - l.f$.

(3.6) Nous avons explicité sur la figure qui suit les degrés de cohomologie qui apparaissent, en fonction de la projection de μ sur le plan des racines. La dualité de Serre s'y reflète par le rôle central que joue le point $\mu = \delta$: en effet le faisceau associé à δ^2 n'est autre, comme on le voit immédiatement, que le faisceau 'dualisant' $\wedge^3 \Omega_{X_U}^1$. Pour cette raison, et par analogie avec le cas des formes modulaires usuelles (relatives à des sous-groupes de $SL(2, \mathbf{Z})$), nous noterons dans la suite ω le faisceau \mathcal{F}_δ associé à $\mu = \delta$.



La suite de ce travail est consacrée à prouver que les formes modulaires associées aux espaces $H^1(X_U, \mathcal{F}_\mu)$, pour μ de projection $\delta = e_1$ (qui correspondent donc à des représentations automorphes admettant pour composante archimédienne une limite dégénérée de série discrète), ‘interagissent’ de façon non triviale, par cup-produit, avec d’autres, correspondant à des séries discrètes. Pour des raisons évidentes de degré que l’on voit sur le dessin ci-dessus, cela ne peut être qu’avec des formes associées aux fibrés \mathcal{F}_μ , où la projection de μ sur le plan des racines se situe sur la droite verticale que nous avons dessinée, constituée des poids tels que leur produit scalaire avec e_1 soit égal à $\frac{1}{2}$; plus précisément, sur la partie de cette droite constituée des poids tels que $\delta - \mu$ soit un paramètre de série discrète (holomorphe ou anti-holomorphe): cela revient encore à dire que la projection de μ est à une distance $\geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$, de la droite horizontale engendrée par e_1 . Nous ferons en fait l’hypothèse légèrement plus forte que **cette distance est** $\geq \frac{7}{6}\sqrt{3}$ (partie figurée en pointillé). Nous allons alors vérifier que, dans cette situation, l’interaction est bien non triviale.

4. Cup-produits: préliminaires archimédiens

(4.1) Soit λ_1 le paramètre de Harish–Chandra d’une limite dégénérée de série discrète $\pi_1 = \pi_{\lambda_1}$ (autrement dit, la projection de λ_1 sur le plan des racines est nulle). Soit d’autre part λ_2 un paramètre de série discrète *holomorphe* (resp. *anti-holomorphe*) $\pi_2 = \pi_{\lambda_2}$, de projection la plus proche possible du mur compact.

Modulo l'action du groupe de Weyl compact, on peut supposer que le produit scalaire $\langle pr(\lambda_2), e_1 \rangle$ est positif, donc égal à $\frac{1}{2}$. La projection $pr(\lambda_2)$ est alors égale à $-e_3 + \frac{1}{3}k(e_3 - e_2)$ (resp. $-e_2 + \frac{1}{3}k(e_2 - e_3)$), avec k un entier ≥ 3 , dans le cas d'une série holomorphe (resp. anti-holomorphe). **Nous ferons en fait l'hypothèse plus restrictive que k est ≥ 5** (pour une raison qui apparaîtra plus tard).

Les *paramètres de Blattner* correspondants (rappelons qu'on les obtient en ajoutant au paramètre de Harish–Chandra $\delta_G - 2\delta_K$, où δ_G et δ_K désignent les demi-sommes des racines positives et des racines positives compactes correspondant à la chambre considérée) sont donnés par

$$\Lambda_1 = \lambda_1,$$

$$\Lambda_2 = \lambda_2 + e_3 \quad (\text{cas holomorphe}),$$

$$\Lambda_2 = \lambda_2 + e_2 \quad (\text{cas anti-holomorphe}).$$

On voit qu'ils appartiennent au mur compact. Cela signifie que les représentations de K qui leur sont associées (autrement dit les K -types minimaux des représentations π_1 et π_2) sont des caractères. Nous désignerons ces derniers, dans la mesure où cela ne crée pas de confusion, par la même notation Λ_1, Λ_2 .

Nous allons également considérer la série discrète π_3 (du même type que π_2) associée au paramètre $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$. Son K -type minimal est encore un caractère, associé à $\Lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2$ (autrement dit, le produit des deux précédents).

Nous poserons, pour $i = 1, 2$: $\mu_i = \delta - \lambda_i = e_1 - \lambda_i$, et: $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2 = \delta - (\lambda_3 - \delta)$, conformément aux notations du Paragraphe 3; on voit que les hypothèses que nous avons faites ci-dessus sur λ_2 correspondent exactement au fait (cf. (3.6)) que la projection de μ_2 se trouve sur la droite verticale passant par $\frac{1}{2}e_1$, et à une distance $\geq \frac{7}{6}\sqrt{3}$ de la droite engendrée par e_1 . Nous désignerons également par la même notation μ_i le caractère correspondant du tore T ; en particulier, μ_3 s'identifie alors au produit $\mu_1\mu_2$.

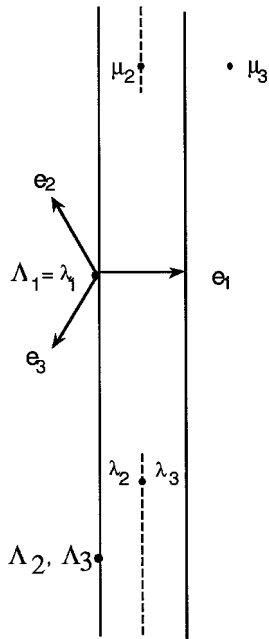
D'après les résultats rappelés au paragraphe précédent, les groupes de cohomologie

$$H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1), \quad H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2),$$

ainsi que

$$H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_3} \otimes \mu_3),$$

sont de dimension 1.



L'objet du présent paragraphe est de prouver le résultat suivant.

(4.2) THÉORÈME

(i) La représentation π_3 apparaît comme un facteur direct (fermé), de multiplicité 1, dans le produit tensoriel (complété) $\pi_1 \widehat{\otimes} \pi_2$ (nous regardons ici nos représentations comme représentations unitaires dans des espaces de Hilbert).

(ii) Considérons la projection correspondante (bien définie à un scalaire non nul près), restreinte aux modules de Harish–Chandra

$$\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mathcal{H}_{\pi_2} \rightarrow \mathcal{H}_{\pi_3}.$$

Cette projection envoie bijectivement le produit tensoriel des K -types minimaux de π_1 et π_2 sur le K -type minimal de π_3 .

(iii) L'application qu'induit cette projection, via le cup-produit, sur la cohomologie

$$H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1) \otimes H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2) \rightarrow H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_3} \otimes \mu_3)$$

est alors non nulle (i.e. bijective).

(4.3) Les articles [Li] et [Ha–Li] contiennent un critère commode permettant d'affirmer que, sous certaines hypothèses, la restriction d'une représentation d'un groupe réductif à un sous-groupe réductif contient une série discrète donnée. Adoptant pour un moment les notations de [Li], Théorème (4.1), soit donc M réductif

réel connexe à centre compact et $G \subset M$ un sous-groupe également réductif connexe à centre compact; notons $K \subset L$ des sous-groupes compacts maximaux de G et M . On part d'une représentation unitaire irréductible ρ de M , dont on suppose qu'elle admet un unique L -type minimal noté τ . Soit enfin π une représentation de la série discrète de G , dont nous notons σ le K -type minimal; on se demande si π est équivalente à une sous-représentation de la restriction $\rho|_G$. On montre dans loc. cit. que c'est vrai si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

- (a) Les coefficients matriciels de ρ , associés à un sous-ensemble dense de vecteurs, se restreignent en des fonctions L^2 sur G .
- (b) La fonction sphérique sur M associée à ρ :

$$\psi_\rho^M(m) = \frac{1}{\dim(\tau)} \text{Trace}(P_\tau \pi(m) P_\tau),$$

où P_τ désigne la projection sur le L -type minimal, est une fonction sphérique ψ_λ associée par la théorie de Flensted–Jensen ([Fl–J.]) à un poids λ tel que $\lambda + \delta_M - 2\delta_L$ soit le plus haut poids de τ .

- (c) σ apparaît dans la restriction de τ à K .

A vrai dire, ce résultat n'est énoncé dans [Li] que pour ρ une représentation 'de plus haut poids', mais le lecteur vérifiera que cela n'intervient dans la démonstration que pour pouvoir utiliser la formule de Flensted–Jensen (b). Au contraire, on trouve dans [Ha–Li] (Proposition 1.4) un énoncé de ce résultat avec une hypothèse affaiblie (on demande seulement que la restriction des coefficients matriciels soit L^p pour tout $p > 2$). La preuve consiste à étudier l'intégrale sur G du produit des fonctions sphériques associées à ρ et π

$$\int_G \psi_\rho^M(g) \overline{\psi_\pi^G(g)} dg.$$

Exprimant cette intégrale au moyen de la formule de Flensted–Jensen (b), et faisant usage de l'hypothèse (c), on montre qu'elle est > 0 ; cela entraîne que les coefficients de π ne peuvent être tous orthogonaux à ceux de $\rho|_G$. On en conclut alors, en utilisant une version du lemme de Schur (valable sous l'hypothèse (a) ou sa version affaiblie), que π apparaît bien comme une sous-représentation de $\rho|_G$.

Revenons à notre problème. On peut voir la représentation produit tensoriel $\pi_1 \widehat{\otimes} \pi_2$ comme restriction à la diagonale

$$G \subset G \times G = M$$

du produit tensoriel (complété) *externe*, noté ρ . Cette dernière représentation est irréductible, c'est en fait une limite (dégénérée) de série discrète pour M . En tant que telle, elle vérifie l'hypothèse (b): voir [Fl–J.] où il faut fouiller pour découvrir

une telle affirmation. Plus précisément, le résultat qui nous intéresse y est énoncé (formule (7.11)) dans le cas des séries discrètes; il y est démontré au cours de la preuve du théorème (7.10), en utilisant le Théorème (7.7) (iv), lequel est aussi valide pour les limites de séries discrètes d'après la remarque (7.11).

Restreignant à la diagonale un des coefficients de ρ (pour des vecteurs appartenant à $\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mathcal{H}_{\pi_2}$), on obtient une somme de produits constitués d'un coefficient de π_1 et d'un coefficient de π_2 . Comme π_1 est tempérée et π_2 de carré intégrable, le premier coefficient est $L^{2+\varepsilon}$ (pour tout $\varepsilon > 0$) et le second L^2 , d'où un produit L^r , avec $1/r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+\varepsilon}$, c'est-à-dire pour $1 < r < 2$. Comme d'autre part nos représentations sont unitaires, les coefficients considérés sont bornés, d'où il résulte que leur produit est en fait aussi L^2 , et l'hypothèse (a) est donc satisfaite. Finalement, le L -type minimal de ρ , qui s'identifie au produit tensoriel externe des caractères Λ_1 et Λ_2 , se restreint à la diagonale en le K -type minimal $\Lambda_3 = \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ de π_3 . Le critère précédent nous permet donc de conclure que π_3 s'identifie donc bien à une sous-représentation de $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$.

(4.4) Pour prouver que π_3 apparaît avec une multiplicité égale à 1, ainsi que la seconde assertion du théorème, nous allons effectuer une analyse plus fine portant sur les K -types qui interviennent dans nos diverses représentations. Il suffit évidemment de prouver ces assertions après restriction au groupe $SU(2, 1)$, ce qui simplifiera quelque peu nos notations, en faisant disparaître le paramètre l introduit au Paragraphe 3. La restriction de π_1 est la représentation du Paragraphe 1, notée π_0 , tandis que les restrictions de π_2 et π_3 coïncident avec une même représentation, notée simplement π . On suppose dans ce qui suit que cette dernière est une série discrète *holomorphe*, le cas anti-holomorphe se traitant de façon tout à fait analogue (les modifications nécessaires sont laissées au lecteur).

Nous avons décrit de façon précise au Paragraphe 1 la structure du système des K -types $\mathcal{H}^{p,q}$ de π_0 . Celle correspondant à π est plus simple ; on peut encore l'extraire des articles de Wallach et Johnson-Wallach déjà utilisés, ou bien plus simplement à partir de la réalisation de π sur un espace de fonctions holomorphes sur la boule, l'action étant donnée par la formule (avec les notations du Paragraphe 1)

$$(\pi(g).f)(Z) = (\bar{d} - \langle Z, b \rangle)^{-k} f(g^{-1}.Z).$$

Le module de Harish-Chandra de π est une somme de K -types $\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{E}^n$, où \mathcal{E}^n correspond à l'ensemble des polynômes homogènes de degré n en Z . Nous désignerons, de façon similaire aux notations du Paragraphe 1.3, par $\varepsilon_n(j)$, pour $0 \leq j \leq n$, le polynôme $z_1^{n-j} z_2^j$. Un rapide calcul nous donne les formules suivantes, qui expriment les actions de $t(\alpha, \beta)$, A , A^* , et B (cf. (1.7):

$$t(\alpha, \beta).\varepsilon_n(j) = \alpha^{j-2n-k} \beta^{-k-j-n}.\varepsilon_n(j),$$

$$A.\varepsilon_n(j) = -(n-j).\varepsilon_n(j+1),$$

$$A^* \cdot \varepsilon_n(j) = -j \cdot \varepsilon_n(j - 1),$$

$$B \cdot \varepsilon_n(j) = -(n - j) \cdot \varepsilon_{n-1}(j),$$

$$C \cdot \varepsilon_n(j) = (n + k) \cdot \varepsilon_{n+1}(j + 1).$$

On remarquera que le K -type minimal \mathcal{E}^0 est annulé par B . Pour prouver que π intervient avec une multiplicité égale à 1 dans le produit tensoriel $\pi_0 \widehat{\otimes} \pi$, ainsi que la seconde assertion du théorème, on voit donc qu'il nous suffit de démontrer le lemme suivant.

(4.5) LEMME *Soit $V \subset \pi_0 \widehat{\otimes} \pi$ un sous-espace invariant constitué de vecteurs différentiables annulés par B ; on suppose que K opère sur V par le même caractère que sur \mathcal{E}^0 . Alors V est de dimension ≤ 1 ; plus précisément, la projection orthogonale de V sur $\mathcal{H}^{0,0} \otimes \mathcal{E}^0$ est injective.*

Preuve du lemme: Commençons par examiner le sous-espace du produit tensoriel constitué des vecteurs sur lesquels K agit par le même caractère que sur \mathcal{E}^0 . Rappelons tout d'abord (cf. 1.3) que la représentation $\tau_{p,q}$ de $K \simeq U(2)$ sur $\mathcal{H}^{p,q}$ est isomorphe à la représentation standard de degré $p + q + 1$ (sur l'espace des polynômes homogènes de degré $p + q$) tordue par le caractère \det^{2q-p} . D'autre part, \mathcal{E}^n est isomorphe à la représentation standard de degré $n + 1$ tordue par \det^{-k-n} . Or il est bien connu, et facile de vérifier, que le produit des représentations standard de degrés $m + 1$ et $n + 1$ contient une composante de dimension 1 si et seulement si $m = n$, auquel cas cette composante (unique) correspond au caractère \det^{-n} . Il en résulte que le produit tensoriel $\mathcal{H}^{p,q} \otimes \mathcal{E}^n$ ne peut contenir des composantes sur lesquelles K opère via \det^{-k} que dans le cas où $p = 0$ et $n = q$.

Soit $v \in V$. Pour chaque $n \geq 0$, désignons par v_n sa projection sur le sous-espace $\mathcal{H}^{0,n} \otimes \mathcal{E}^n$, ses autres composantes étant nulles d'après ce que l'on vient de voir. Notons b et b' les applications suivantes (cf. (1.7) et les formules ci-dessus (4.4))

$$b = B \otimes 1 : \quad \mathcal{H}^{0,n} \otimes \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{H}^{0,n+1} \otimes \mathcal{E}^n \quad (n \geq 0),$$

$$b' = 1 \otimes B : \quad \mathcal{H}^{0,n+1} \otimes \mathcal{E}^{n+1} \rightarrow \mathcal{H}^{0,n+1} \otimes \mathcal{E}^n \quad (n \geq 0).$$

Le fait que v est annulé par B se traduit par les égalités, pour tout $n \geq 0$

$$b(v_n) = b'(v_{n+1}).$$

Prouver le lemme revient à montrer que, si v_0 est nul, alors il en est de même de tous les v_n . Mais on constate sur les formules ci-dessus que le noyau de b' est égal à $\mathcal{H}^{0,n+1} \otimes \mathbf{C} \cdot \varepsilon_{n+1}(n + 1)$, et il est immédiat de vérifier que ce noyau ne contient aucun vecteur non nul où K opère par un caractère. On voit donc que, si v_n est nul, il en est de même de v_{n+1} , et le lemme est donc établi par récurrence.

(4.6) Il ne nous reste plus qu'à établir l'assertion relative à la cohomologie. On voit que l'espace (de dimension 1)

$$H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2) \simeq H^1(\mathfrak{n}, \mathcal{H}_{\pi_2})_{\mu_2^{-1}}$$

est engendré par la classe du 1-cocycle (u_2, v_2, w_2) suivant (avec les notations de (2.1)):

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad w_2 = \varepsilon_0(0),$$

lequel n'est pas un cobord parce que $\varepsilon_0(0)$ n'est pas dans l'image de C . Nous devons calculer son cup-produit avec un générateur de

$$H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1) \simeq H^1(\mathfrak{n}, \mathcal{H}_{\pi_1})_{\mu_1^{-1}},$$

et on a vu au Paragraphe 2 (rappelons que notre représentation π_1 est une tordue de π_0 , et nous pouvons donc la supposer réalisée sur le même espace) qu'un générateur possible est la classe du cocycle

$$(u_1, v_1, w_1) = (e_{0,0}, -e_{0,1}(-1), -e_{1,0}).$$

Le cup-produit est donné par le 2-cocycle (x, y, z) (toujours avec les notations de (2.1))

$$x = -e_{0,1}(-1) \otimes \varepsilon_0(0), \quad y = -e_{0,0} \otimes \varepsilon_0(0), \quad z = 0.$$

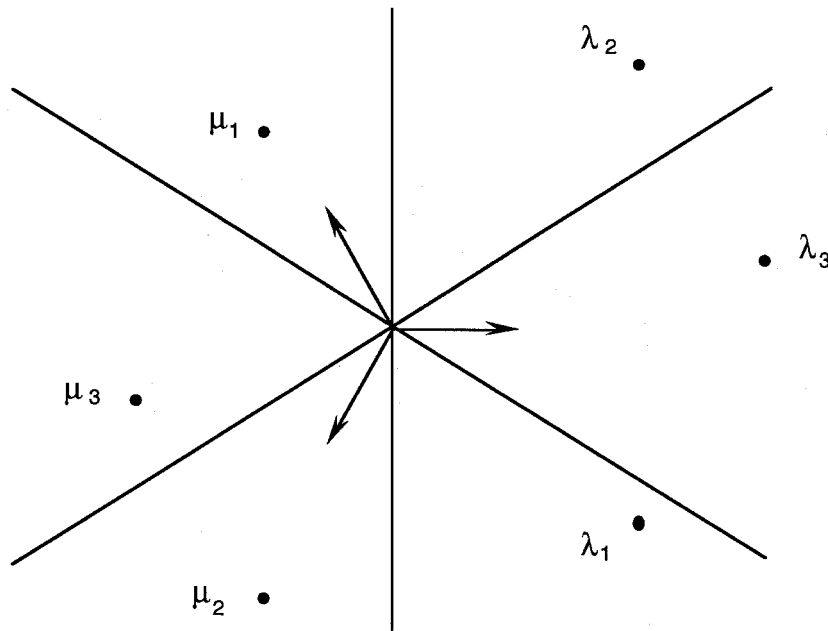
Ce dernier se projette sur un 2-cocycle (x', y', z') à valeurs dans \mathcal{H}_{π_3} . D'après l'assertion (ii) du théorème, y' est un multiple non nul de $\varepsilon_0(0)$. Or $\varepsilon_0(0)$ n'appartient pas à la somme des images des opérateurs A et C . La projection de notre 2-cocycle ne peut donc être un cobord, ce qui achève de prouver le théorème.

(4.7) On peut établir par un procédé plus économique une version moins précise (mais insuffisante pour nos besoins) du théorème ci-dessus: il suffit simplement pour cela d'appliquer le critère de [Ha–Li] en remarquant qu'il fait apparaître un facteur direct isomorphe à π dans la sous-représentation de $\rho|_G$ engendrée par τ : en effet, la restriction de ψ_ρ^M à G est une fonction sphérique associée à cette sous-représentation. On peut ainsi obtenir, en se dispensant d'utiliser les renseignements plus précis fournis par le Lemme (4.5), les mêmes assertions que dans le théorème, mais pour un certain facteur direct dont on ignore a priori s'il apparaît avec multiplicité 1.

Suivant la même idée, on peut également étudier le produit tensoriel d'une série discrète holomorphe et d'une anti-holomorphe: notons maintenant λ_1 (supposé situé à droite du mur compact) le paramètre d'une quelconque série discrète holomorphe (ou même d'une limite) π_1 , et soit $\mu_1 = \delta - \lambda_1$. Alors le groupe

$H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1)$ est de dimension 1, et l'on peut décrire un cocycle non trivial de la façon suivante: Le K -type minimal τ_1 de π_1 est donné par $\Lambda_1 = \lambda_1 + e_3$, et il est annulé par l'action de B (cela résulte de ce que les paramètres des K -types sont contenus dans un cône dont le sommet correspond au minimal, et ouvert vers 'le bas' suivant deux demi-droites de directions $-e_2$ et e_3 , tandis que B envoie un vecteur d'un K -type sur un élément de la somme des deux K -types obtenus en ajoutant e_2 (resp. $-e_3$). D'autre part, un vecteur de plus haut poids noté w (bien défini à un scalaire près) de ce K -type minimal est annulé par A ; on voit alors, avec les notations du Paragraphe 2, que le triple $(0, 0, w)$ est un 1-cocycle, non trivial (car l'opérateur C envoie un K -type sur la somme des deux K -types obtenus en ajoutant $-e_2$ (resp. e_3), et w ne peut donc appartenir à son image.)

Notons de même λ_2 (toujours situé dans le demi-plan de droite) le paramètre d'une série discrète anti-holomorphe π_2 , voire d'une limite, et $\mu_2 = \delta - \lambda_2$. Alors l'espace (de dimension 1) : $H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2)$ est engendré par la classe du 1-cocycle $(0, v, 0)$ où v est un vecteur de plus haut poids du K -type minimal τ_2 de π_2 (donné par $\Lambda_2 = \lambda_2 + e_2$).



Posons alors $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - e_1$, $\mu_3 = \delta - \lambda_3 = \mu_1 + \mu_2$ et faisons l'hypothèse que λ_3 appartient au cône (ouvert) des paramètres de séries discrètes non-holomorphes. Le K -type minimal τ_3 de la représentation de carré intégrable π_3 associée à λ_3 correspond dans ce cas au paramètre de Blattner $\Lambda_3 = \lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2$. On voit alors que le produit tensoriel $\tau_1 \otimes \tau_2$ contient un facteur F isomorphe à τ_3 ,

les autres constituants correspondant à des paramètres situés sur une demi-droite horizontale limitée à droite par Λ_3 . Le critère précédent prouve alors que π_3 apparaît comme un facteur direct du produit tensoriel $\pi_1 \otimes \pi_2$, plus précisément de la sous-représentation qu'engendre $\tau_1 \otimes \tau_2$ et il est alors clair que la projection sur ce facteur envoie isomorphiquement $F \subset \tau_1 \otimes \tau_2$ sur τ_3 : en effet, F n'est pas orthogonal à π_3 (car $\tau_1 \otimes \tau_2$ ne l'est pas, et F est le seul constituant de ce produit tensoriel qui intervient dans π_3); donc F ne saurait être orthogonal à τ_3 (qui est l'unique K -type de π_3 isomorphe à F).

Finalement, le cup-produit externe est donné par le 2-cocycle $(-w \otimes v, 0, 0)$, lequel se projette sur un cocycle à valeurs dans π_3 de la forme $(x, 0, 0)$, où $x \neq 0$ est un vecteur de plus haut poids de τ_3 . On prouve que cette projection ne saurait être un cobord par un argument en tout point semblable à celui utilisé en (2.2): si $(x, 0, 0)$ était le cobord d'une cochaîne (u', v', w') , quitte à la modifier par un cobord, on se ramène à supposer que u' est une combinaison de vecteurs de plus bas poids dans chacun des K -types. En fait, on peut utiliser des notations semblables à celles du Paragraphe 1, extraites de [Wa] et [Jo–Wa]: les K -types sont les $\mathcal{H}^{p,q}$ avec p et q deux entiers respectivement supérieurs ou égaux à $p_0 = -k_2 - 1$ et $q_0 = -k_1 - 1$ (k_1 et k_2 sont deux entiers < -1). On définit les $e_{p,q}(j)$, pour $-q \leq j \leq p$ comme en (1.3). Notre élément u' est une combinaison linéaire des $e_{p,q}(-q)$, et on vérifie comme dans (2.1) et (2.2) que les égalités $C.u' = A.w'$ et $B.u' = A.v'$ entraînent que u' est en fait multiple de $e_{p_0,q_0}(-q_0)$. D'autre part, on voit, généralisant ce qui a été fait au Paragraphe 2, que le triple

$$\begin{aligned} &((p_0 + q_0 + 1)e_{p_0,q_0}(-q_0), \\ &-(q_0 + 1)e_{p_0,q_0+1}(-q_0 - 1), -(p_0 + 1)e_{p_0+1,q_0}(-q_0)) \end{aligned}$$

est un 1-cocycle pour π_3 ; modifiant (u', v', w') par un multiple de ce dernier, on se ramène à supposer finalement que $u' = 0$. Les éléments v' et w' devraient appartenir à $\text{Ker } A$ et vérifier $B.w' - C.v' = x$. Cela ne se peut pas car B (resp. C) envoie $e_{p,q}(p)$ sur un multiple de $e_{p,q+1}(p)$ (resp. $e_{p+1,q}(p+1)$), tandis que x est un multiple non nul de $e_{p_0,q_0}(p_0)$.

Nous avons ainsi obtenu la:

(4.8) PROPOSITION. *Sous les hypothèses précédentes:*

(i) *La représentation π_3 apparaît comme un facteur direct (fermé), dans le produit tensoriel (complété) $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$.*

(ii) *La projection correspondante, restreinte aux modules de Harish–Chandra, induit sur la cohomologie une application*

$$H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1) \otimes H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2) \rightarrow H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_3} \otimes \mu_3)$$

qui est non nulle (i.e. bijective).

(4.9) Remarque. J'ignore ce que l'on peut dire de la multiplicité avec laquelle π_3 apparaît dans $\pi_1 \otimes \pi_2$. Par contre il est clair qu'elle n'intervient *qu'une seule fois dans la sous-représentation engendrée par $\tau_1 \otimes \tau_2$* . Cela résulte du fait noté ci-dessus qu'un tel facteur isomorphe à π_3 doit se projeter isomorphiquement sur F . Si on en avait un second, on construirait par combinaison linéaire une troisième sous-représentation, isomorphe à π_3 et orthogonale à F .

(4.10) Terminons ce paragraphe en faisant remarquer, ainsi que me l'a rappelé la referee, que plusieurs auteurs ont, dans un passé plus ou moins récent, étudié des produits tensoriels de différents types de séries discrètes ; on peut citer les noms d'Adams, Li, Gutkin, Repka... Voir en particulier l'article [Li], dont la problématique est proche de ce qui nous préoccupe ici.

5. Cup-produits: suite

(5.1) Soient μ_1, μ_2 , et μ_3 comme en (4.1), et \mathcal{F}_{μ_i} les faisceaux correspondants sur les variétés X_U . Notre but est maintenant de prouver que le cup-produit de deux classes non nulles appartenant respectivement aux espaces $H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$ et $H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_2})$ est 'virtuellement' non nul. Plus précisément, nous allons démontrer le théorème suivant:

(5.1) THÉORÈME. *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux éléments non nuls appartenant respectivement à $H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$ et $H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_2})$, pour U un sous-groupe compact ouvert (assez petit) du groupe $G(\mathbf{A}_f)$. Il existe alors un sous-groupe $U' \subset U$, encore compact et ouvert dans $G(\mathbf{A}_f)$, et des correspondances de Hecke C_1 et C_2 sur $X_{U'}$ telles que, si p désigne la projection de $X_{U'}$ sur X_U , le cup-produit $(C_1)_* p^* \phi_1 \cap (C_2)_* p^* \phi_2$ soit un élément non nul de $H^2(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_3})$.*

(Une 'correspondance de Hecke' est la correspondance sur $X_{U'}$ induite de façon habituelle par une double classe $U' \gamma U'$ ($\gamma \in G(\mathbf{A}_f)$)).

Remarque. Dans l'article [Cl2] sont démontrés des résultats semblables pour le cas de la cohomologie holomorphe des variétés de Shimura, avec la terminologie de 'stable' au lieu de 'virtuel'; mais Clozel m'a fait part de ses regrets à ce sujet, et de sa préférence pour le terme 'virtuel' dans ce genre de questions.

Le résultat précédent peut aussi s'énoncer sous quelques variantes équivalentes. Indiquons en une: parce que le cup-produit commute aux images réciproques, on peut parler du cup-produit de deux éléments des limites inductives $\lim_{\rightarrow U} (X_U, \mathcal{F}_{\mu_i})$ (pour $i = 1, 2$). Notre théorème est alors visiblement équivalent au suivant.

(5.1)' THÉORÈME. *Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux éléments non nuls appartenant respectivement aux limites inductives $\lim_{\rightarrow U} H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$ et $\lim_{\rightarrow U} H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_2})$. Il existe*

alors des éléments γ_1 et γ_2 de $G(\mathbf{A}_f)$ tels que le cup produit $\gamma_1 \cdot \phi_1 \cap \gamma_2 \cdot \phi_2$ soit un élément non nul de $\varinjlim_U H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu_3})$.

(Bien sûr, le cup-produit étant $G(\mathbf{A}_f)$ -équivariant, on peut, si on le désire, imposer une valeur à γ_1 ou γ_2 , demander par exemple que l'un ou l'autre soit l'identité.)

(5.2) La dualité de Serre permet de déduire une version duale du résultat précédent: notons $\mu'_2 = \mu_1 - \mu_2$. Le faisceau $\mathcal{F}_{\mu'_2}$ possède (lorsque U est assez petit) de la cohomologie en degré 1, associée à des représentations de type opposé à celles qui interviennent dans la cohomologie de \mathcal{F}_{μ_2} (c'est-à-dire anti-holomorphes si celles qui interviennent dans ce dernier sont holomorphes, et vice-versa). Le cup-produit induit une application

$$H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_2}) \times H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu'_2}) \rightarrow H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1}).$$

Le résultat qui suit affirme que $H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$ est 'virtuellement' engendré par l'image de cette application.

(5.2) THÉORÈME. *Soit $c \in H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$. Il existe alors un sous-groupe compact ouvert $U' \subset U$ tel que l'image réciproque de c dans $H^2(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_1})$ soit une combinaison linéaire de cup-produits de la forme $\phi_2 \cap \phi'_2$, avec $\phi_2 \in H^1(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_2})$ et $\phi'_2 \in H^1(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu'_2})$.*

Expliquons comment déduire cela des théorèmes énoncés ci dessus : Posons $\mu'_1 = 2\delta - \mu_1$, $\mu'_2 = \mu_1 - \mu_2$ et enfin $\mu'_3 = \mu'_1 + \mu'_2 = 2\delta - \mu_2$. Le faisceau $\mathcal{F}_{\mu'_1}$ est de même type que \mathcal{F}_{μ_1} : sa cohomologie intervient en degrés 1 et 2, et correspond à une limite dégénérée de séries discrètes; d'autre part on a la dualité de Serre entre $H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu'_1})$ et $H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$; de même entre $H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_2})$ et $H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu'_3})$. Enfin, les théorèmes ci-dessus s'appliquent avec μ'_1, μ'_2, μ'_3 en places respectives de μ_1, μ_2, μ_3 .

Notons $P \subset H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$ le sous-ensemble constitué des c qui vérifient la conclusion du théorème, c'est-à-dire tels que leur image réciproque correspondant à un U' assez petit soit une combinaison de cup-produits. P est un sous-espace vectoriel. Il nous faut voir que son orthogonal $P^0 \subset H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu'_1})$ est nul.

Si $\phi'_1 \in P^0$, il est en particulier orthogonal à $p_*(\phi_2 \cap \phi'_2)$, pour tout sous-groupe compact ouvert $U' \subset U$, p désignant la projection de $X_{U'}$ sur X_U , et ϕ_2 et ϕ'_2 deux éléments arbitraires de $H^1(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_2})$ et $H^1(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu'_2})$ respectivement: en effet, un tel élément appartient bien à P car, si $U'' \subset U'$ est un sous-groupe (toujours compact et ouvert) distingué dans U , l'image réciproque de $p_*(\phi_2 \cap \phi'_2)$ dans $H^2(X_{U''}, \mathcal{F}_{\mu_1})$ est une combinaison linéaire de translatés de $\phi_2 \cap \phi'_2$ par des éléments du groupe quotient U/U'' .

Nous en déduisons que $p^*(\phi_1')$ est orthogonal à $\phi_2 \cap \phi_2'$ (pour la dualité de Serre sur $X_{U'}$). Mais, si ϕ_1' n'était pas nul, il existerait d'après les théorèmes précédents un sous-groupe U' et $\phi_2' \in H^1(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_2'})$ tel que le cup-produit $p^*(\phi_1') \cap \phi_2' \in H^2(X_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_3'})$ soit non nul ; puis, invoquant une nouvelle fois la dualité de Serre, un élément $\phi_2 \in H^1(X_U, \mathcal{F}_{\mu_2})$ tel que $p^*(\phi_1') \cap \phi_2' \cap \phi_2$ soit non nul. Cette contradiction prouve donc bien la nullité de P^0 et donc le théorème (5.2).

(5.3) Nous allons maintenant prouver le Théorème (5.1), ou plutôt sa variante (5.1)'. En réalité, cette preuve consiste simplement à adapter les résultats du Paragraphe 7 de [Ha2], et à utiliser ceux que nous avons démontrés au paragraphe précédent. Les résultats de Harris sont énoncés pour la restriction à une sous-variété plutôt que pour le produit tensoriel, mais on s'y ramène évidemment en considérant (de façon analogue à ce que nous avons fait au paragraphe 4) ce produit tensoriel comme restriction à la diagonale du produit tensoriel *externe*.

Rappelons pour commencer un critère, dû à Hecht et Schmid ([He–Sc]), et caractérisant les séries discrètes *intégrables*, c'est-à-dire telles que le coefficient matriciel associé à tout couple de vecteurs K -finis soit intégrable (et non pas seulement L^2). Leur résultat est énoncé dans le cadre des groupes semi-simples, mais son extension aux groupes réductifs à centre compact est évidente: une série discrète π_λ est intégrable si et seulement si son paramètre de Harish–Chandra λ est 'assez loin des murs non compacts', c'est-à-dire plus précisément, vérifie, pour chaque racine non compacte β , les inégalités (où \mathcal{R} désigne l'ensemble des racines)

$$|(\lambda, \beta)| > \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}, (\alpha, \beta) > 0} (\alpha, \beta).$$

Pour le groupe que nous étudions, on voit que cela revient aux deux inégalités

$$|(\lambda, e_2)| > 1, \quad |(\lambda, e_3)| > 1,$$

lesquelles sont satisfaites pour les représentations π_2 et π_3 étudiées au Paragraphe 4 en vertu de l'hypothèse $k \geq 5$; ces dernières sont donc intégrables.

(5.4) Utilisons maintenant la comparaison, rappelée au Paragraphe 3, entre la cohomologie de X_U et la (\mathfrak{b}, T) -cohomologie des espaces de formes automorphes, ainsi que la classification des représentations qui admettent de la (\mathfrak{b}, T) -cohomologie: on voit alors que des classes ϕ_1 et ϕ_2 comme dans l'énoncé du Théorème (5.1) s'obtiennent à partir de plongements équivariants unitaires (bien définis à une homothétie près)

$$j_1 : \mathcal{H}_{\pi_1} \hookrightarrow \mathcal{A}_U, \quad j_2 : \mathcal{H}_{\pi_2} \hookrightarrow \mathcal{A}_U,$$

pour un certain sous-groupe compact ouvert U , de telle sorte que ϕ_i ($i = 1, 2$) soit dans la droite image de

$$(j_i)_* : H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_i} \otimes \mu_i) \hookrightarrow H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{A}_U \otimes \mu_i).$$

Le cup-produit ‘externe’ $\phi_1 \cap \phi_2$ est un élément de $H^2(X_U \times X_U, \mathcal{F}_{\mu_1} \otimes \mathcal{F}_{\mu_2})$ associé au plongement $j_1 \otimes j_2$ de $\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mathcal{H}_{\pi_2}$ dans l’espace $\mathcal{A}_{U \times U}^{G \times G}$ des formes automorphes $U \times U$ -invariantes sur le groupe produit $G \times G$: c’est un élément non nul correspondant à l’image de

$$\begin{aligned} &H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1) \otimes H^1(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2) \\ &\simeq H^2(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, T \times T, (\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1) \otimes (\mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2)) \end{aligned}$$

dans

$$H^2(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, T \times T, \mathcal{A}_{U \times U}^{G \times G} \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2)).$$

Enfin, la restriction à la diagonale définit une application ($G_{\mathbf{R}}$ -équivariante) $r : \mathcal{A}_{U \times U}^{G \times G} \rightarrow \mathcal{A}_U$, et la composée

$$\begin{aligned} &H^2(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, T \times T, \mathcal{A}_{U \times U}^{G \times G} \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2)) \\ &\xrightarrow{\text{res}} H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{A}_{U \times U}^{G \times G} \otimes \mu_3) \xrightarrow{r_*} H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{A}_U \otimes \mu_3) \end{aligned}$$

nous donne finalement l’élément associé au cup-produit ‘interne’ $\phi_1 \cap \phi_2 \in H^2(X_U, \mathcal{F}_{\mu_3})$.

Nous pouvons maintenant, parce que π_3 est une représentation intégrable, utiliser certains résultats prouvés, sous cette hypothèse, dans le Paragraphe 7 de [Ha2]: le Lemme (7.2) de loc. cit. étudie la projection d’un élément de $(j_1 \otimes j_2)(\mathcal{H}_{\mu_1} \otimes \mathcal{H}_{\mu_2})$ sur le facteur direct correspondant à π_3 dans l’image de $\pi_1 \otimes \pi_2 \subset \mathcal{A}_{(2)}^{G \times G}$; cette projection définit une fonction C^∞ sur le quotient $(G \times G)(\mathbf{Q}) \backslash (G \times G)(\mathbf{A})$, dont la restriction à la diagonale est une forme automorphe (K -finie). Cette construction associe au couple des plongements j_1 et j_2 un homomorphisme $j_3: \mathcal{H}_{\pi_3} \rightarrow \mathcal{A}_U$, vérifiant la propriété suivante: pour $v \in \mathcal{H}_{\mu_1} \otimes \mathcal{H}_{\mu_2}$, la restriction diagonale de la projection de $(j_1 \otimes j_2)(v)$ sur la partie π_3 -isotypique est égale à $j_3(p(v))$, où p désigne la projection de $\mathcal{H}_{\mu_1} \otimes \mathcal{H}_{\mu_2}$ sur \mathcal{H}_{μ_3} .

On voit alors, en utilisant le fait que π_3 est la seule représentation telle que $H^2(\mathfrak{b}, T, \pi_3 \otimes \mu_3) \neq 0$, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, T \times T, (\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1) \otimes (\mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2)) & \xrightarrow{(j_1 \otimes j_2)_*} & H^2(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, T \times T, \mathcal{A}_{U \times U}^{G \times G} \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2)) \\ \text{res} \downarrow \wr & & \text{res} \downarrow \\ H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_3) & \xrightarrow{(j_1 \otimes j_2)_*} & H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{A}_{U \times U}^{G \times G} \otimes \mu_3) \\ p_* \downarrow \wr & & r_* \downarrow \\ H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_3} \otimes \mu_3) & \xrightarrow{(j_3)_*} & H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{A}_U \otimes \mu_3) \end{array}$$

est commutatif. Le cup-produit que nous étudions est donc défini par l'image via $(j_3)_*$ d'un élément non nul de $H^2(\mathfrak{b}, T, \mathcal{H}_{\pi_3} \otimes \mu_3)$. Finalement, un argument évident de densité (voir la preuve du Théorème (7.4) de loc. cit.) prouve que, quitte à modifier j_1 et j_2 par des éléments de $G(\mathbf{A}_f)$, le morphisme j_3 est non nul, et cela achève de prouver notre résultat.

(5.5) En utilisant une méthode analogue et les résultats de (4.7), on peut obtenir des propriétés semblables de non-annulation de cup-produits d'éléments du H^1 provenant de séries discrètes holomorphe et anti-holomorphe : soient donc μ_1 et μ_2 comme en (4.7), c'est à dire que la projection du premier est situé dans le cône adjacent à la partie supérieure et à gauche du translaté par e_1 du mur compact, tandis que le second correspond au cône inférieur gauche; on suppose de plus que $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$ est dans le cône des poids tels que le faisceau correspondant possède du H^2 (de projection située à gauche du mur compact 'entre' les deux précédents). On fait l'hypothèse légèrement plus forte que la projection de μ_3 est assez loin des translatés des murs non compacts : plus précisément, $\lambda_3 = \delta - \mu_3$ doit satisfaire aux inégalités $|(\lambda, e_2)| > 1$, $|(\lambda, e_3)| > 1$ qui assurent que la série discrète (non-holomorphe) π_{λ_3} est intégrable.

Sous ces hypothèses, on a mot pour mot les mêmes propriétés que celles énoncées dans les théorèmes (5.1) ou (5.1)' – que je me dispense de recopier ici. La démonstration est aussi la même, à cela près qu'on ne sait pas que π_3 apparaît sans multiplicité dans $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$. Toutefois, cette multiplicité est bien égale à 1 si on se limite à la sous-représentation engendrée par le produit tensoriel des K -types minimaux (4.9). On peut par conséquent modifier l'argument exposé ci-dessus en remplaçant le produit tensoriel par cette sous-représentation, compte tenu du fait que la cohomologie de $(\mathcal{H}_{\pi_1} \otimes \mu_1) \otimes (\mathcal{H}_{\pi_2} \otimes \mu_2)$ se factorise par cette sous-représentation (cf. (4.7)).

On peut aussi se demander ce que l'on peut dire des cup-produits de deux classes de 1-cohomologie dont l'une provient comme ci-dessus d'une série holomorphe ou anti-holomorphe, tandis que l'autre est associée à une série non-holomorphe. Il semble difficile dans cette situation de prouver des résultats de non-annulation. Par contre on peut prouver des résultats de 'surjectivité' analogues à notre Théorème (5.2), par une méthode identique, fondée sur la dualité de Serre. Cela encore est laissé au lecteur.

Bibliographie

- [Bo-Wa] Borel, A. et Wallach, N.: Continuous cohomology, Discrete subgroups, and Representations of Reductive groups, *Annals of Math. Studies* 94, Princeton University Press, 1980.
- [Ca-Os] Casselman, W. et Osborne, M. S.: The n -cohomology of representations with an infinitesimal character, *Compositio Math.* 31, (2) (1975) 219–227.

- [Cl1] Clozel, L.: Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes auto-duales de $GL(n)$, *Publications Math. I.H.E.S.* 73 (1991) 97–145.
- [Cl2] Clozel, L.: Produits dans la cohomologie holomorphe des variétés de Shimura, *Journal für die reine und angew. Math.* 430 (1992) 69–83.
- [De] Deligne, P.: Travaux de Griffiths, Séminaire Bourbaki, exp. 376, Mai–Juin 1970, *Springer Lectures Notes* 180 (1971) 213–237.
- [Fl-J.] Flensted–Jensen, M.: Discrete series for semi–simple symmetric spaces, *Annals of Math.* 111 (1980) 253–311.
- [Gr-Sc] Griffiths, P. A. et Schmid, W.: Locally homogeneous complex manifolds, *Acta Mathematica*, 123 (1969) 253–301.
- [Ha1] Harris, M.: Automorphic forms and the cohomology of vector bundles on Shimura varieties, dans: *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-functions*, Vol. II, 41–91, L. Clozel et J. S. Milne eds., Academic Press 1990.
- [Ha2] Harris, M.: Automorphic forms of $\bar{\delta}$ -cohomology type as coherent cohomology classes, *J. Differential Geometry* 32 (1990) 1–63.
- [Ha-Li] Harris, M. et Li, J.-S.: A Lefschetz Property for Subvarieties of Shimura Varieties, preprint.
- [He-Sc] Hecht, H. et Schmid, W.: On integrable representations of a semi-simple Lie group, *Math. Ann.* 220 (1976) 147–149.
- [Jo-Wa] Johnson, K. D. et Wallach, N. R.: Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. I, *Transactions of the A.M.S.*, 229 (1977) 137–173.
- [Kn] Knapp, A. W.: Lie groups, Lie algebras, and cohomology, *Mathematical Notes*, Princeton University Press, 1988.
- [Kn-Zu] Knapp, A. W. et Zuckerman, G.: Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups, part I, *Annals of math.* 116 (1982) 389–455.
- [Li] Li, J.-S.: Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology, *Duke Math. Journal*, 61(3) (1990) 913–937.
- [Ro] Rogawski, J. D.: Automorphic representations of unitary groups in three variables, *Annals of Math. Studies* 123, Princeton University Press, 1990.
- [Sc1] Schmid, W.: On a conjecture of Langlands, *Annals of Math.* 93(1) (1971) 1–42.
- [Sc2] Schmid, W.: L^2 -cohomology and the discrete series, *Annals of Math.* 103(2) (1976) 375–394.
- [So] Soergel, W.: On the n-cohomology of limits of discrete series representations, preprint, 1996.
- [Wa] Wallach, N. R.: On the Selberg trace formula in the case of compact quotient, *Bulletin of the A.M.S.*, 82(2) (1976) 171–195.
- [Wi1] Williams, F. L.: Discrete series multiplicities in $L^2(\Gamma \backslash G)$ (II). Proof of Langlands conjecture, *American Journal of Math.* 107(2) (1985) 367–376.
- [Wi2] Williams, F. L.: The n-Cohomology of Limits of Discrete series, *Journal of Functional Analysis* 80 (1988) 451–461.