Canad. J. Math. Vol. **62** (6), 2010 pp. 1340–1386
doi:10.4153/CJM-2010-074-6

Holomorphie des opérateurs d'entrelacement normalisés à l'aide des paramètres d'Arthur

C. Mœglin

Abstract. In this paper we prove holomorphy for certain intertwining operators arising from the theory of Eisenstein series. To do that we need to normalize using the Langlands–Shahidi's normalization arising from the twisted endoscopy and the associated representations of the general linear group.

Introduction

Le but de cet article est de prouver que les opérateurs d'entrelacement qui interviennent dans les séries d'Eisenstein construites avec des formes automorphes de carré intégrable et des paraboliques maximaux sont holomorphes au voisinage de l'axe réel positif. Ici on ne travaille que localement donc on réexprime le résultat différemment; on renvoie le lecteur à [18] pour les rapports locaux/globaux. On fixe donc un gros groupe $\mathcal{G}$ classique est un parabolique maximal de ce groupe donc de la forme $\mathrm{GL}(D) \times G$ où G est un groupe classique de même type que $\mathcal{G}$; c'est G qui intervient dans cet article. On fixe une représentation irréductible π de G; on suppose qu'elle est composante locale d'une forme automorphe de carré intégrable; on oublie le fait que la conjecture de Ramanujan n'est pas connue pour les groupes GL, cela n'a pas d'importance sérieuse pour nos problèmes d'holomorphie et on suppose donc que π est dans un paquet d'Arthur; on rappelle les définitions et constructions ci-dessous. On fixe une représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}(D)$, noté ici σ et on définit une fonction méromorphe $r(\sigma, \psi, s)$ qui dépend de σ et de ψ (ceci est fait en 3.1) mais on peut dire simplement que $r(\sigma, \psi, s)$ est le facteur de normalisation défini au moins théoriquement par Langlands et Shahidi pour l'entrelacement $\sigma|\cdot|^s \times \pi_L \to \sigma^*|\cdot|^{-s} \times \pi_L$ où π_L est une des représentations du paquet de Langlands inclus dans le paquet d'Arthur défini par ψ (σ^* est obtenu en appliquant le bon élément du groupe de Weyl et est la contragrédiente de σ si G est un groupe symplectique ou orthogonal). Donc en général la fonction $r(\sigma, \psi, s)$ n'est pas le facteur de normalisation de Langlands–Shahidi pour l'entrelacement précédent quand on remplace π_L par π sauf si ψ est tempéré c'est-à-dire trivial sur la 2e copie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$; c'est le seul cas où paquet de Langlands et paquet d'Arthur coïncident. On note $M(\sigma, \pi, s)$ l'opérateur d'entrelacement standard associé comme précédemment à l'induite $\sigma|\cdot|^s \times \pi$ et on pose $N(\sigma, \pi, s) := r(\sigma, \psi, s)^{-1} M(\sigma, \pi, s)$ et on montre dans cet article que $N(\sigma, \pi, s)$ est holomorphe au voisinage de l'axe réel positif.

Reçu par la rédaction le 21 février, 2008.
Publié electronique au 30 septembre, 2010.
Classification (AMS) par sujet: **22E50**, 22E35.

L'article commence par un rappel des constructions des représentations dans un paquet d'Arthur; on simplifie la construction dans le cas d'un morphisme général en 2.8 ci-dessous; cette simplification a son intérêt en soi. L'idée est toujours la même on sait définir avec une grande précision les représentations dans un paquet d'Arthur associé à un morphisme ψ si la restriction de ψ à $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ où $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est plongé diagonalement dans le produit $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est sans multiplicité. Le point est d'obtenir le cas général à partir de ce cas particulier en utilisant des modules de Jacquet. Dans la définition originale on avait rigidifié les choix de façon à avoir une paramétrisation la plus canonique possible; en fait cette paramétrisation est surtout beaucoup trop rigide et peu compatible aux procédures standard d'induction restriction. On s'affranchit donc de toute rigidité, on perd encore plus de renseignements sur la paramétrisation mais on peut alors faire des choix dans chaque situation et les rendre compatibles à l'induction ou la restriction que l'on considère. Dans cette introduction, on ne peut pas expliquer toutes les notations; mais il est certainement assez clair que ψ peut être vu comme une représentation de $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dans un groupe d'automorphismes d'une forme bilinéaire d'un type donné (éventuellement ne respectant la forme bilinéaire qu'à un scalaire près). On dit que ψ a bonne parité si toutes les sous-représentations irréductibles incluses dans ψ sont aussi à valeurs dans un groupe d'automorphismes d'une forme de même type. On avait montré en [17] repris en [19, 3.2] que par une induction qui préserve l'irréductibilité on se ramène à décrire les paquets de représentations associés à un ψ général au cas des ψ ayant bonne parité. Ensuite on construit les paquets associés à un morphisme ψ ayant bonne parité en construisant un morphisme $\psi_{\gg}$ "dominant" ψ et tel que $\psi_{\gg}$ soit de restriction discrète à la diagonale et en trouvant les représentations associées à ψ par module de Jacquet à partir de celles associées à $\psi_{\gg}$ (*cf.* ci-dessous 2.8); c'est la notion de "dominant" que l'on a simplifiée. On dit que $\psi_{\gg}$ domine ψ s'il existe un ordre total sur l'ensemble des sous-représentations irréductibles incluses dans $\psi_{\gg}$ et sur l'ensemble des sous-représentations irréductibles incluses dans ψ (il y a une ambiguité si ψ a de la multiplicité) et une bijection respectant les ordres, du premier ensemble sur le second compatible à l'action de W_F; de façon explicite en identifiant une représentation irréductible de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ à sa dimension, on voit les sous-représentations irréductibles incluses dans $\psi_{\gg}$ comme un triplet $(\rho, a_{\gg}, b_{\gg})$ et la bijection envoie un tel triplet sur un triplet (ρ, a, b) tel que $\inf(a,b) = \inf(a_{\gg}, b_{\gg})$, $\sup(a_{\gg}, b_{\gg}) \geq \sup(a,b)$ et $(a_{\gg} - b_{\gg})(a-b) \geq 0$. Remarquons que l'on ne peut pas trouver de morphisme dominant ψ et de restriction discrète à la diagonale si ψ n'a pas bonne parité.

La preuve de l'holomorphie des opérateurs d'entrelacement se fait de la façon la plus standard qui soit: on s'arrange pour inclure π dans une induite $\tau \times \pi'$ où π' sera encore dans un paquet d'Arthur et on décompose l'opérateur d'entrelacement standard en le produit des 3 opérateurs d'entrelacements standard évidents et on montre que ce produit n'a pas de pôle en utilisant une hypothèse de récurrence pour π'. On explique en détail les choix en 3.2; le point de départ est pour $s \in \mathbb{R}_{>0}$, le résultat d'Harish-Chandra qui montre que si π est une série discrète, alors l'opérateur d'entrelacement standard est holomorphe pour $\Re s > 0$ (*cf.* par exemple [28]); en $s = 0$, c'est uniquement le fait que l'opérateur d'entrelacement normalisé est autodual et les applications sont pour $s > 0$.

Je remercie très vivement le référé pour ses commentaires constructifs et l'aide qu'il m'a apportée dans la limitation des fautes de frappe.

1 Quelques notations générales

Dans tout le travail F est un corps p-adique. On considère ici un groupe G classique; le prototype sont les groupes orthogonaux symplectiques ou unitaires mais grâce à une remarque d'Arthur [5] on peut leur adjoindre les groupes $\mathrm{Gspin}(2n+1)$ et les groupes non connexes $\mathrm{Gspin}(2n)$ et pour les mêmes raisons on peut obtenir les groupes $\mathrm{GU}(m, F'/F)$ où F' est une extension quadratique de F. Chacun de ces groupes (hormi le cas des groupes unitaires) a un groupe dual de la forme $G^* \times W_F$ où W_F est le groupe de Weyl de F et où G^* est un groupe classique. Si G est un groupe unitaire, G^* sera plutôt un groupe linéaire, ceci est largement écrit dans la littérature. On considère la représentation naturelle de G^* dans un groupe $\mathrm{GL}(m^*_G, \mathbb{C})$ (cela définit m^*_G); si G est un groupe Gspin ou GU il faut prendre $\mathrm{GL}(m^*_G, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ comme expliqué par exemple dans [5]. On note θ^* l'automorphisme $g \mapsto {}^tg^{-1}$ (ou $(g, \lambda) \mapsto ({}^tg^{-1}\lambda, \lambda)$) de $\mathrm{GL}(m^*_G, \mathbb{C})$ (ou $\mathrm{GL}(m^*_G, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$)) et on note θ l'automorphisme "dual" et on impose à θ de respecter un épinglage.

On considérera des morphismes de $W_F \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ dans G^* continus-algébriques, bornés et semi-simples; en composant avec la représentation naturelle cela donne une représentation de $W_F \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. On note génériquement ψ un tel morphisme et on note $\mathrm{Jord}(\psi)$ l'ensemble des sous-représentations irréductibles incluses dans ψ; toute représentation irréductible de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est uniquement déterminée par sa dimension et on identifie donc $\mathrm{Jord}(\psi)$ à un ensemble de triplets (ρ, a, b) où ρ est une représentation irréductible de W_F et a, b sont des entiers. On tient compte des multiplicités de ψ dans $\mathrm{Jord}(\psi)$. On appelle caractère du centralisateur de ψ une application, ϵ, de $\mathrm{Jord}(\psi)$ dans $\{\pm 1\}$ et on appelle restriction de ϵ au centre de G^*, le signe $\epsilon(z_{G^*}) := \times_{(\rho,a,b)\in \mathrm{Jord}(\psi)} \epsilon(\rho, a, b)$ où les multiplicités de $\mathrm{Jord}(\psi)$ sont prises en compte. Et on dit que la restriction de ϵ au centre de G^* est déterminée par le type de G si $\epsilon(z_{G^*}) = +1$ exactement quand G est déterminé par une forme bilinéaire dont l'invariant de Hasse est $+1$. C'est une version combinatoire des notions usuelles.

Grâce aux travaux de Zelevinsky on sait donc associer une représentation irréductible de $\mathrm{GL}(m^*_G, F)$ notée $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi)$: la définition précise est la suivante. On pour tout $(\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, on note $\mathrm{Speh}\big(St(\rho, a), b\big)$ le quotient de Langlands, pour le groupe linéaire convenable, de l'induite

$$\times_{c\in[(b-1)/2,-(b-1)/2])} \mathrm{St}(\rho, a)|\cdot|^c,$$

où $\mathrm{St}(\rho, a)$ est la représentation de Steinberg généralisée de $\mathrm{GL}(d_\rho a, F)$ où d_ρ est la dimension de la représentation ρ de W_F basée sur la représentation cuspidale ${}^L\rho$ de $\mathrm{GL}(d_\rho, F)$ image de ρ par la correspondance de Langlands; par abus d'écriture on écrit ρ au lieu de ${}^L\rho$ car aucune confusion n'est possible. Cette représentation est stable par l'action de l'automorphisme extérieur de $\mathrm{GL}(m^*_G, F)$, noté θ ci-dessus et on prolonge cette représentation au produit semi-direct de $\mathrm{GL}(m^*_G, F) \times \{1, \theta\}$; ici il n'est pas important de fixer le prolongement. On appelle θ-trace la trace de cette représentation limitée à la composante non connexe de ce produit semi-direct; on identifie une telle trace à une fonction sur $\mathrm{GL}(n, F)$ invariante par θ-conjugaison.

On utilisera aussi la notation suivante bien commode: soit π une représentation de G et ρ une représentation cuspidale unitaire d'un groupe linéaire $\mathrm{GL}(d_\rho, F)$, ce qui définit d_ρ. On suppose qu'il existe un groupe G' de même type que G et de rang d_ρ plus petit tel que $\mathrm{GL}(d_\rho, F) \times G'$ soit un sous-groupe de Levi de G. On note x un réel et $\mathrm{Jac}_{\rho|\cdot|^x}\,\pi$ ou simplement $\mathrm{Jac}_x\,\pi$ (quand ρ est fixé) l'élément du groupe de Grothendieck de G', encore vu comme une représentation semi-simple de G' tel que le module de Jacquet de π relativement à un parabolique de Levi $\mathrm{GL}(d_\rho, F) \times G'$ soit de la forme $\rho|\cdot|^x \otimes \mathrm{Jac}_x\,\pi \oplus_{\sigma' \not\equiv \rho|\cdot|^x, \pi'} \sigma' \otimes \pi'$, égalité dans le groupe de Grothendieck. Soit π^{GL} une représentation de $\mathrm{GL}(m^*_G, F)$; on définit de façon analogue $\mathrm{Jac}^\theta_x\,\pi^{\mathrm{GL}}$ comme représentation semi-simple de $\mathrm{GL}(m^*_G - 2d_\rho, F)$ telle que le module de Jacquet de π^{GL} relativement à un parabolique de Levi $\mathrm{GL}(d_\rho, F) \times \mathrm{GL}(m^*_G - 2d_\rho, F) \times \mathrm{GL}(d_\rho, F)$ soit, dans le groupe de Grothendieck, de la forme $\rho|\cdot|^x \otimes \mathrm{Jac}^\theta_x\,\pi^{\mathrm{GL}} \otimes \theta(\rho|\cdot|^x) \oplus_{\sigma', \sigma'', \tau} \sigma' \otimes \tau \otimes \sigma''$ où (σ', σ'') parcourt l'ensemble des couples de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(d_\rho, F)$ sauf le couple $\bigl(\rho|\cdot|^x, \theta(\rho|\cdot|^x)\bigr)$.

L'induction pour les représentations est notée par $\times$; soit ρ une représentation cuspidale d'un groupe linéaire $\mathrm{GL}(d_\rho, F)$ et soit $[x, y]$ un segment croissant ou décroissant. Grâce aux travaux de Bernstein et de Zelevinsky, on sait que l'induite $\rho|\cdot|^x \times \cdots \times \rho|\cdot|^y$ a un unique sous-module irréductible. Ce sous-module est noté, soit $\langle \rho|\cdot|^x, \ldots, \rho|\cdot|^y \rangle$ soit de façon plus traditionnelle $\langle x, \ldots, y \rangle_\rho$. Grâce aux travaux de Zelevinsky, on peut généraliser cette construction a un ensemble de multisegments dans les cas suivants; considérons une matrice, $\mathcal{A}$ (non nécessairement rectangulaire), dont les lignes et les colonnes sont des segments de croissance différentes

$$\begin{array}{ccccc} & B_1 & \cdots & \cdots & A_1 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ B_t & \cdots & \cdots & A_t & \end{array}$$

où pour tout $i \in [1, t]$, $[B_i, A_i]$ est un segment lié au sens de Zelevinsky à celui qui le précède et à celui qui le suit, soit croissant avec alors $B_1 > \cdots > B_t$ et soit décroissant avec $B_1 < \cdots < B_t$. Dans l'écriture, l'élément en dessous de B_1 est $B_1 - 1$, donc B_t n'est pas nécessairement décalé par rapport à B_1. Dans ce cas l'induite, pour le GL convenable $\langle B_1, \ldots, A_1 \rangle_\rho \times \cdots \times \langle B_t, \ldots, A_t \rangle_\rho$ a un unique sous-module irréductible que l'on note $\langle \mathcal{A} \rangle_\rho$. Le type même de représentations qui interviennent dès que l'on étudie les paquets d'Arthur sont les représentations $\mathrm{Speh}\bigl(\mathrm{St}(\rho, a), b\bigr)$ pour des entiers a, b qui, dans cette écriture sont les représentations associées à la matrice rectangulaire ci-dessous et aussi à la transposée de cette matrice.

$$\begin{array}{ccc} (a-b)/2 & \cdots & (a+b)/2 - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a+b)/2 + 1 & \cdots & -(a-b)/2 \end{array}$$

Une convention importante

On s'intéresse aux opérateurs d'entrelacement associés à l'élémént du groupe de Weyl de longueur maximale, pour des induites de la forme $\sigma|\cdot|^s \times \pi$ où σ est une représentation de Steinberg (unitaire) et $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. En générale l'image est à valeurs dans une induite de la forme $\tilde{\sigma}|\cdot|^{-s} \times \pi$ où $\tilde{\sigma}$ est la contragrédiente de σ parfois tordu par un caractère dépendant de π (cas des groupes de similitudes); pour simplifier la notation on suppose que $\tilde{\sigma} \simeq \sigma$. C'est le seul cas important.

2 Rappel sur les paquets d'Arthur

2.1 Définition des paramètres

On fixe ψ comme dans 1. A un tel morphisme Arthur associe un ensemble fini de représentations irréductibles de G, ensemble noté $\Pi(\psi)$ uniquement déterminé par le fait qu'une combinaison linéaire convenable à coefficient tous non nuls des traces des éléments de $\Pi(\psi)$ se transfère en la θ-trace de $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi)$.

Le seul cas particulier de ce résultat dont nous avons besoin est celui beaucoup plus simple des paquets de séries discrètes; on suppose que ψ est trivial sur la 2e copie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et que la représentation définie par ψ n'a pas de multiplicité. Dans ce cas $\Pi(\psi)$ est formée de séries discrètes de G; leur nombre est exactement $2^{\mathrm{long}(\psi)-1}$ où $\mathrm{long}(\psi)$ est la longueur de ψ en tant que représentation de $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Avec cela on a déduit l'existence d'une classification des représentations cuspidales de G sous la forme suivante (les définitions de sans trou et alterné sont après l'énoncé):

Proposition 2.1.1 *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations cuspidales irréductibles de G et l'ensemble des couples ψ, ϵ où ψ est un morphisme discret et sans trou et ϵ est un caractère altérné du centralisateur de ψ de restriction au centre de G^* imposée par G.*

On dit que ψ est discret si la représentation de $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est sans multiplicité; on dit que ψ est sans trou si quand $\mathrm{Jord}(\psi)$ contient (ρ, a) avec $a > 2$, il contient aussi $(\rho, a-2)$. Le caractère du centralisateur de ψ est dit alterné si, vu comme application de $\mathrm{Jord}(\psi)$ dans $\{\pm 1\}$ il prend des valeurs différentes sur (ρ, a) et $(\rho, a-2)$ en prenant la valeur $-$ sur tout couple de la forme $(\rho, 2)$.

L'application qui à une représentation cuspidale π associe le morphisme ψ est uniquement déterminée par la propriété suivante: soit ρ une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}(d_\rho, F)$ autoduale. On sait alors d'après Silberger qu'il existe un unique réel $x_{\rho,\pi} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que l'induite $\rho|\cdot|^{x_{\rho,\pi}} \times \pi$ soit réductible. On pose $\mathrm{Red}(\pi) := \{(\rho, x_{\rho,\pi}); x_{\rho,\pi} > 1/2\}$. Alors $\mathrm{Jord}(\psi) = \{(\rho, 2x_{\rho,\pi} - 1); (\rho, x_{\rho,\pi}) \in \mathrm{Red}(\pi)\}$.

La seule démonstration que je connais de ce résultat utilise l'existence de $\Pi(\psi)$ dans le cas particulier des morphismes triviaux sur la 2e copie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et ceci est dû à Arthur et nécessite le lemme fondamental ordinaire et tordu, ainsi que le transfert pour toutes les fonctions localement constantes à support compact.

Avec cela on peut utiliser [14], [20] pour construire toutes les séries discrètes de G, ou on peut utiliser les résultats d'Arthur pour cette même construction; on a déjà montré que les constructions coïncident. On ne fait alors plus d'hypothèses sur ψ et on construit un paquet de représentations $\Pi(\psi)$ en [16] repris en [19, 3.1 et 3.2].

Et la construction est faite de telle sorte que la propriété de transfert pour les ψ discrets donne la propriété de transfert pour les ψ généraux. Ici on n'a pas besoin de savoir de quelle combinaison linéaire il s'agit. Les paquets que nous avons construits sont donc les paquets qu'Arthur trouvent (une fois tous les lemmes fondamentaux démontrés) par son étude des formules des traces. Arthur annonce que la somme des séries discrètes dans un paquet $\Pi(\psi)$ avec ψ de restriction triviale à la 2e copie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est la (à un scalaire près) combinaison linéaire stable dans le paquet. On a alors montré en [16] quelle est la combinaison linéaire stable dans le paquet $\Pi(\psi)$; les coefficients sont des signes explicites. Ici on a besoin d'une description/construction des éléments de $\Pi(\psi)$ pour un ψ général que l'on va rappeler et que l'on simplifiera un peu ci-dessous. Dans cet article, on va utiliser le calcul des coefficients mais on pourrait très bien garder des coefficients non calculés, cela ne changerait rien.

Fixons ψ; on note $\psi_{|\Delta}$ la restriction de ψ à $W_F \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ où $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est plongé diagonalement dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Pour construire les éléments de $\Pi(\psi)$ on commence par le faire dans des cas où $\psi_{|\Delta}$ est sans multiplicité; on appelle ce cas le cas où ψ est de restriction discrète à la diagonale. Ceci a été traité en détail dans [16] avec les résultats de [22].

Sous cette hypothèse $\Pi(\psi)$ est en bijection avec les couples $\underline{t}, \underline{\eta}$ d'applications définies sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ où pour tout $(\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, $\underline{t}(\rho, a, b) \in \bigl[0, [\inf(a, b)/2]\bigr]$ et $\underline{\eta}(\rho, a, b) \in \{\pm 1\}$ avec $\underline{\eta}(\rho, a, b) = +$ si $\underline{t}(\rho, a, b) = \inf(a, b)/2$; de plus à un tel couple $\underline{t}, \underline{\eta}$ on associe (*cf.* ci-dessous) un caractère du centralisateur de ψ, pour nous une application, $\epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}$ de $\mathrm{Jord}(\psi)$ dans $\{\pm 1\}$ et ce caractère à sa restriction au centre de G^* déterminée par la forme de G, c'est-à-dire pour nous $\times_{(\rho,a,b)\in \mathrm{Jord}(\psi)} \epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(\rho, a, b) = \epsilon_G$ où ϵ_G est l'invariant de Hasse intervenant dans la définition de la forme bilinéaire que G respecte (éventuellement à un scalaire près). Par définition (dans la formule ci-dessous [?] est la partie entière):

$$\forall (\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi), \epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(\rho, a, b) = \underline{\eta}(\rho, a, b)^{\inf(a,b)}(-1)^{[\inf(a,b)/2]+\underline{t}(\rho,a,b)}.$$

On note $\pi(\psi, \underline{t}, \underline{\eta})$ ou plus simplement $\pi(\underline{t}, \underline{\eta})$ la représentation correspondant à $\underline{t}, \underline{\eta}$. On définit le signe $\epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(s_\psi) := \times_{(\rho,a,b)\in \mathrm{Jord}(\psi)} \epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(\rho, a, b)^{b-1}$ (la notation est ici inutilement compliquée, elle rappelle que ce signe est la valeur d'un caractère en un point bien choisi mais on n'a pas besoin de préciser) et on a a alors montré en *loc. cit.* que $\sum_{\underline{t},\underline{\eta}} \epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(s_\psi)\pi(\underline{t}, \underline{\eta})$ est une distribution stable qui a le bon transfert pour un bon choix d'action de θ qui ne nous importe pas ici puisque cela ne change la combinaison linéaire que par un signe dépendant uniquement de ψ et de l'action de θ fixée. Ce qui est important pour ce travail est d'avoir une description en termes de représentations des $\pi(\psi, \underline{t}, \underline{\eta})$. On rappelle cette description telle qu'elle a été faite en *loc.cit.*; elle se fait par récurrence sur $\ell(\psi) := \sum_{(\rho,a,b)\in \mathrm{Jord}(\psi)} \bigl(\inf(a, b) - 1\bigr)$.

2.2 Le cas des morphismes élémentaires de restriction discrète à la diagonale

Le premier cas est donc celui des morphismes vérifiant $\ell(\psi) = 0$ que l'on a appelé morphismes élémentaires; on garde l'hypothèse que la restriction $\psi_{|\Delta}$ est sans multiplicité. Dans ce cas nécessairement $\underline{t} \equiv 0$ et $\epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}} \equiv \underline{\eta}$. On note $\psi_{|\Delta}$ la restriction de ψ à W_F fois la diagonale de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. On remarque que l'application $(\rho,a,b)\in\mathrm{Jord}(\psi)\to\big(\rho,\sup(a,b)\big)\in\mathrm{Jord}(\psi_{|\Delta})$ est une bijection; on sait donc définir une série discrète associée à $\psi_{|\Delta}$ et au caractère $\underline{\eta}$ que l'on note $\pi(\psi_{|\Delta},\underline{\eta})$ et la représentation $\pi(\psi,\underline{t},\underline{\eta})$ est l'image de $\pi(\psi_{|\Delta},\underline{\eta})$ par une application qui généralise l'involution d'Iwahori–Matsumoto. Mais en [15] on en a donné une description simple qui distingue 3 cas, le 2e et le 3e ne sont pas exclusifs l'un de l'autre. On fait ici une récurrence sur $\sum_{(\rho,a,b)\in\mathrm{Jord}(\psi)}\sup(a,b)$.

1e cas: $\psi_{|\Delta}$ est sans trou et $\underline{\eta}$ est alterné; la représentation associée est alors cuspidale et son existence résulte de la classification des représentations cuspidales.

2e cas: le morphisme $\psi_{|\Delta}$ a un trou; il existe donc $(\rho,a,b)\in\mathrm{Jord}(\psi)$ avec $\sup(a,b)>2$ et $\big(\rho,\sup(a,b)-2\big)\notin\mathrm{Jord}(\psi_{|\Delta})$; on inclut ici aussi le cas où $\sup(a,b)=2$ et $\underline{\eta}(\rho,a,b)=+$. On note (ρ,a',b') le triplet tel que $(a-b)(a'-b')\geq 0$ et $\sup(a,b)-2=\sup(a',b')$ et on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ,a,b) par (ρ,a',b'). On identifie naturellement $\underline{\eta}$ à un morphisme de $\mathrm{Jord}(\psi')$ dans $\{\pm1\}$. On sait donc définir $\pi(\psi',\underline{t}\equiv 0,\underline{\eta})$ et on a montré que l'induite $\rho|\cdot|^{(a-b)/2}\times\pi(\psi',\underline{t},\underline{\eta})$ a un unique sous-module irréductible et on a défini $\pi(\psi,\underline{t}\equiv 0,\underline{\eta})$ comme ce sous-module irréductible.

3e cas: il existe $(\rho,a,b)\in\mathrm{Jord}(\psi)$ avec $\sup(a,b)>2$ et $\big(\rho,\sup(a,b)-2x\big)\in\mathrm{Jord}(\psi_{|\Delta})$ pour tout $x\in\big[0,[\inf(a,b)/2]\big]$ et $\underline{\eta}$ n'est pas alterné sur ces éléments mais l'est sur les élément $\big(\rho,\sup(a,b)-2x\big)$ pour tout $x\in\big[1,[\inf(a,b)/2]\big]$. On pose $\zeta:=+$ si $a>1$ et $\zeta=-$ si $b>1$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant de $\mathrm{Jord}(\psi)$ les éléments (ρ,a,b) et (ρ,a',b') où $\sup(a',b')=\sup(a,b)-2$. On restreint $\underline{\eta}$ en une application de $\mathrm{Jord}(\psi')$ dans $\{\pm1\}$. On sait définir, par récurrence, la représentation $\pi(\psi',\underline{t}\equiv 0,\underline{\eta})$. On a montré que la représentation induite

$$\langle\rho|\cdot|^{(a-b)/2},\dots,\rho|\cdot|^{-(a'-b')/2}\rangle\times\pi(\psi',\underline{t}\equiv 0,\underline{\eta})$$

a exactement 2 sous-modules irréductibles. Et la représentation cherchée $\pi(\psi,\underline{t}\equiv 0,\underline{\eta})$ est l'un de ces sous-modules; on a précisé lequel mais cela n'a pas d'importance ici.

2.3 Le cas général des morphismes de restriction discrète à la diagonale

Ici on suppose que ψ est tel que $\psi_{|\Delta}$ est une représentation sans multiplicité de $W_F\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ et on suppose que $\ell(\psi)>0$. On fixe (ρ,a,b) avec $\inf(a,b)>1$. On note ζ le signe de $a-b$ et on pose $\zeta=+$ si $a=b$. On fixe encore $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ satisfaisant aux conditions générales et on décrit $\pi(\psi,\underline{t},\underline{\eta})$ suivant les cas.

1e cas: $\underline{t}(\rho,a,b)=0$; on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en changeant uniquement (ρ,a,b) en

$$\bigcup_{c\in[|a-b|+1,a+b-1];\ c\equiv a+b-1 \bmod 2}\big(\rho,\sup(1,\zeta c),\sup(1,-\zeta c)\big);$$

on définit $\underline{t}'$ sur $\mathrm{Jord}(\psi')$ en restreignant $\underline{t}$ à $\mathrm{Jord}(\psi')\cap\mathrm{Jord}(\psi)$ et en étendant ensuite par 0 et on définit $\underline{\eta}'$ sur $\mathrm{Jord}(\psi')$ en restreignant $\underline{\eta}$ à $\mathrm{Jord}(\psi')\cap\mathrm{Jord}(\psi)$ et en

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

étendant par:

$$\forall c \in [|a-b|+1, a+b-1]; \quad c \equiv a+b-1 \bmod 2,$$
$$\underline{\eta}'\big(\rho, \sup(1,\zeta c), \sup(1,-\zeta c)\big) = \underline{\eta}(\rho,a,b)^{(c-|a-b|-1)/2}.$$

On a clairement $\psi_{|\Delta} = \psi'_{|\Delta}$ et

$$\begin{aligned}\epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(\rho,a,b) &= \underline{\eta}(\rho,a,b)^{\inf(a,b)}(-1)^{[\inf(a,b)/2]}\\ &= \times_{c\in[|a-b|+1,a+b-1];\ c\equiv a+b-1 \bmod 2}\, \underline{\eta}'\big(\rho,\sup(1,\zeta c),\sup(1,-\zeta c)\big).\end{aligned}$$

Donc on a bien la relation

$$\times_{(\rho',a',b')\in \mathrm{Jord}(\psi')}\epsilon_{\underline{t}',\underline{\eta}'}(\rho',a',b') = \times_{(\rho'',a'',b'')\in\mathrm{Jord}(\psi)}\epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(\rho'',a'',b'') = \epsilon_G.$$

De plus $\ell(\psi') = \ell(\psi) - \inf(a,b) + 1 < \ell(\psi)$ on sait définir $\pi(\psi',\underline{t}',\underline{\eta}')$ et on pose tout simplement:

$$\pi(\psi,\underline{t},\underline{\eta}) = \pi(\psi',\underline{t}',\underline{\eta}').$$

2e cas: $\underline{t}(\rho,a,b) > 0$; en particulier $\inf(a,b) \geq 2$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en changeant simplement (ρ,a,b) en (ρ,a',b') où (a',b') est uniquement déterminé par le fait que $\sup(a',b') = \sup(a,b)$, $\inf(a',b') = \inf(a,b)-2$ et $\zeta(a'-b') > 0$; si $\inf(a,b) = 2$, on supprime simplement (ρ,a,b) et on se rappelle qu'alors $\underline{\eta}(\rho,a,b) = +$. On définit $\underline{t}',\underline{\eta}'$ en prenant la restriction de $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ sur $\mathrm{Jord}(\psi)\cap\mathrm{Jord}(\psi')$ et en posant $\underline{\eta}'(\rho,a',b') = \underline{\eta}(\rho,a,b)$, $\underline{t}'(\rho,a',b') = \underline{t}(\rho,a,b)-1$. On a clairement $\epsilon_{\underline{t},\underline{\eta}}(\rho,a,b) = \epsilon_{\underline{t}',\underline{\eta}'}(\rho,a',b')$. On considère le groupe G' de même type que G mais de rang celui de G moins d_ρ (d_ρ est la dimension de ρ vue comme représentation de W_F). Comme $\ell(\psi') = \ell(\psi)-2$, on sait définir $\pi(\psi',\underline{t}',\underline{\eta}')$ avec des propriétés sur les modules de Jacquet que l'on récrira en section 2.7. On pose $A := (a+b)/2-1$ et $B = |a-b|/2$. On a montré en [16] que l'induite

$$\langle \rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle \times \pi(\psi',\underline{t}',\underline{\eta}')$$

a un unique sous-module irréductible et $\pi(\psi,\underline{t},\underline{\eta})$ est ce sous-module irréductible, par définition. D'où, en revenant aux définitions de B, A

$$\pi(\psi,\underline{t},\underline{\eta}) \hookrightarrow \langle\rho|\cdot|^{(a-b)/2},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta((a+b)/2-1)}\rangle \times \pi(\psi',\underline{t}',\underline{\eta}').$$

2.4 Cas d'un morphisme de bonne parité

On fixe ψ et $(\rho,a,b)\in\mathrm{Jord}(\psi)$; on dit que (ρ,a,b) a bonne parité si la représentation de $W_F\times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ définie par ce triplet est à valeurs dans un groupe de même type que G^*. On dit que ψ a bonne parité si tous les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ ont bonne parité.

Fixons un ordre total sur $\mathrm{Jord}(\psi)$; comme $\mathrm{Jord}(\psi)$ a en général de la multiplicité, on précise que 2 éléments $(\rho,a,b),(\rho',a',b')$ de $\mathrm{Jord}(\psi)$ sont ordonnés même si

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

$\rho = \rho', a = a', b = b'$; on note $\geq_{\mathrm{Jord}(\psi)}$ cet ordre. On impose toujours à l'ordre mis de vérifier la propriété ($\mathcal{P}$):

$$(\rho', a', b') \geq_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, a, b)$$
$$\text{si } \rho = \rho', (a-b)(a'-b') > 0, |a'-b'| > |a-b| \text{ et } a'+b' > a+b.$$

Soit $G_{\gg}$ un groupe de même type que G mais de rang plus grand et soit $\psi_{\gg}$ un morphisme pour $G_{\gg}$. On suppose que $\mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$ est aussi muni d'un ordre total avec la propriété ci-dessus et on dit que $\psi_{\gg}$ domine ψ si $|\mathrm{Jord}(\psi_{\gg})| = |\mathrm{Jord}(\psi)| =: L$ et pour tout $i \in [1, L]$, en notant $(\rho_{\gg,i}, a_{\gg,i}, b_{\gg,i})$ et (ρ_i, a_i, b_i) le ième élément de $\mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$ et $\mathrm{Jord}(\psi)$ respectivement, on a $\rho_{\gg,i} = \rho_i$, $\inf(a_i, b_i) = \inf(a_{\gg,i}, b_{\gg,i})$ et $(a_{\gg,i} - b_{\gg,i})(a_i - b_i) \geq 0$.

Si ψ a bonne parité et seulement dans ce cas, il existe des morphismes $\psi_{\gg}$ de restriction discrète à la diagonale et dominant ψ. Pour définir $\Pi(\psi)$ le paquet de représentations associées à ψ l'idée est de l'obtenir par module de Jacquet à partir de $\Pi(\psi_{\gg})$ où $\psi_{\gg}$ est un morphisme dominant ψ et de restriction discrète à la diagonale. L'application de $\Pi(\psi_{\gg})$ sur $\Pi(\psi)$ est celle qui est expliquée en section 2.8 ci-dessous; comme on va le montrer en 2.8 on obtient bien ainsi $\Pi(\psi)$ mais évidemment la paramétrisation à l'intérieur de $\Pi(\psi)$ dépend du choix de $\psi_{\gg}$; on a fait une construction qui ne dépend pas du choix tout simplement en imposant à l'ordre mis sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ plus de condition que ($\mathcal{P}$). Précisément, on a demandé que

$$\forall (\rho', a', b'), (\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi) \quad (\rho', a', b') \geq_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, a, b) \text{ si } \rho = \rho' \text{ et}$$
$$|(a'-b')| > |(a-b)| \text{ ou } |(a'-b')| = |(a-b)| \text{ et } a'+b' > a+b \text{ ou}$$
$$(a', b') = (a, b) \text{ en tant qu'ensemble non ordonné et } a' \geq b'.$$

On renvoie à [19, 2.8]. On a alors montré que la paramétrisation de $\Pi(\psi)$ obtenue grâce à celle de $\Pi(\psi_{\gg})$ est indépendante du choix de $\psi_{\gg}$ dominant ψ pour un ordre vérifiant cette propriété; en [17] on a même montré que la paramétrisation de $\Pi(\psi)$ qui en résulte à l'aide de couples $(\underline{t}, \underline{\eta})$ définis sur l'ensemble $\mathrm{Jord}(\psi) \simeq \mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$ peut se définir directement sur l'ensemble $\mathrm{Jord}(\psi)$ vu comme ensemble ordinaire avec multiplicité. Ce raffinement ne sert pas pour ce travail et au contraire on préférera garder une grande liberté sur le choix de l'ordre mis sur $\mathrm{Jord}(\psi)$.

2.5 Définition générale de $\Pi(\psi)$

Il reste encore à enlever l'hypothèse que ψ a bonne parité. De l'algèbre linéaire élémentaire montre alors que ψ est la somme de façon unique $\psi_{mp} \oplus \psi_{bp}$ de 2 morphismes où ψ_{bp} a bonne parité et aucun élément de $\mathrm{Jord}(\psi_{mp})$ a bonne parité. On écrit alors $\psi_{mp} = \psi_{1/2,mp} \oplus \psi_{-1/2,mp}$ de telle sorte que les représentations des groupes linéaires associée $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi_{1/2,mp})$ et $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi_{-1/2,mp})$ se déduisent l'une de l'autre par application de θ; ici il n'y a pas unicité mais cela n'a pas d'importance. On a alors montré en [19, 3.2] que pour tout $\pi \in \Pi(\psi_{bp})$ l'induite $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi_{1/2,mp}) \times \pi$ est irréductible et que cette tensorisation définit une bijection de $\Pi(\psi_{bp})$ sur $\Pi(\psi)$. Cela termine la description des paquets.

2.6 Paquet d'Arthur et induction

On fixe $\psi =: \psi_{mp} \oplus \psi_{bp}$ (*cf.* ci-dessus) et on suppose que $\mathrm{Jord}(\psi_{bp})$ a de la multiplicité; on fixe $(\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi_{bp})$ intervenant avec au moins multiplicité 2 et on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant 2 copies de (ρ, a, b). L'hypothèse de bonne parité assure que ψ' est encore un morphisme pour un groupe G' de même type que G. On note $\pi(\rho, a, b)$ la représentation du groupe linéaire $\mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big)$ c'est-à-dire le sous-module de Langlands de l'induite $\mathrm{St}(\rho, a)|\cdot|^{-(b-1)/2} \times \cdots \times \mathrm{St}(\rho, a)|\cdot|^{(b-1)/2}$.

Proposition 2.6.1 *L'ensemble $\Pi(\psi)$ est l'ensemble des sous-modules irréductibles des induites de la forme $\pi(\rho, a, b) \times \pi'$ où π' parcourt $\Pi(\psi')$.*

Cette proposition a été démontrée en [17] sans utiliser le fait que $\Pi(\psi')$ est formé de représentation unitaires. Ici, on en donne une démonstration très rapide qui utilise l'unitarité des éléments de $\Pi(\psi')$; on aura cette unitarité dès que la totalité des résultats d'Arthur seront disponibles c'est-à-dire dès que l'on aura tous les lemmes fondamentaux y compris pondérés; sans l'unitarité et avec la démonstration ci-dessous on obtient la proposition en remplaçant sous-modules par sous-quotients. On sait que $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi) = \pi(\rho, a, b) \times \pi^{\mathrm{GL}}(\psi') \times \theta\big(\pi(\rho, a, b)\big)$. Soit $T(\psi')$ la combinaison linéaire stable de représentations de G' dont la trace se transfère en la θ-trace de $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi')$. La θ-trace de $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi)$ est alors un transfert de la trace de l'induite $\pi(\rho, a, b) \times T(\psi')$ (définie dans le groupe de Grothendieck de G). Ainsi $\Pi(\psi)$ est formé des sous-quotients irréductibles des induites de la forme $\pi(\rho, a, b) \times \pi'$ où $\pi' \in \Pi(\psi')$; l'unitarité admise de π' assure qu'une telle induite est semi-simple d'où le résultat. Remarquons qu'en général une telle induite est réductible; on a montré en [17] qu'elle est sans multiplicité de longueur inférieure ou égale à $\inf(a, b) + 1$. Le fait qu'il n'y ait pas de multiplicité se retrouve ici parce que l'on sait que $\Pi(\psi)$ est sans multiplicité (*cf.* [19]) mais cela utilise toute la force des résultats d'Arthur alors que [17] est élémentaire.

2.7 Propriétés des modules de Jacquet

On fixe ψ d'où $\mathrm{Jord}(\psi)$ et $\pi \in \Pi(\psi)$. Soient ρ une représentation cuspidale unitaire irréductible, $\zeta = \pm$, A, B des demi-entiers tels que $A - B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$; on considère le quadruplet (ρ, A, B, ζ). Ce quadruplet correspond à l'élément $(\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ où $A = (a + b)/2 - 1, B = |(a - b)|/2$ et ζ est le signe de $a - b$ si $B \neq 0$; si $B = 0$, il n'y a rien à préciser ici, on va supposer $B \neq 0$.

Le lemme ci-dessous est déjà dans [17] mais on préfère en redonner la démonstration pour pouvoir l'utiliser dans section 2.8 et rendre ce travail indépendant de [17].

Lemme 2.7.1 *On suppose que $B \neq 0$ et que $\mathrm{Jac}_{\zeta B, \ldots, \zeta A}\, \pi \neq 0$ alors il existe un sous ensemble de $\mathrm{Jord}(\psi)$ de la forme (ρ, A_i, B_i, ζ) pour $i \in [1, v]$ avec v un entier convenable tel que $B_1 = B$, $A_v \geq A$ et pour tout $i \in]1, v]$, $B_i \in]B_{i-1}, A_{i-1} + 1]$.*

On démontre le lemme par la récurrence suivante. On fixe ψ; on a mis un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$, pour définir π; on considère un élément $(\rho, A', B', \zeta') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ tel que pour tout $(\rho, A'', B'', \zeta'') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ plus grand que cet élément, on a $B'' \gg A'$

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

et pour un 3e élément de Jord(ψ), $(\rho, A''', B''', \zeta''')$ strictement plus grand que $(\rho, A'', B'', \zeta'')$, on a $B''' \gg A''$; la notion de $\gg$ est aussi relative aux A, B du l'énoncé. Le plus grand élément de Jord(ψ) convient toujours; si (ρ, A', B', ζ') peut être le plus petit élément de Jord(ψ) alors ψ est de restriction discrète à la diagonale et tous les blocs de Jordan sauf éventuellement le plus petit sont de la forme (ρ', A', B', ζ') avec $B' \gg A$. Il n'y a aucune difficulté à montrer que dans ce cas $\mathrm{Jac}_{\zeta B,\dots,\zeta A}\, \pi = 0$ sauf éventuellement si pour (ρ', A', B', ζ') comme ci-dessus, $\rho' = \rho$, $\zeta' = \zeta$, $B' = B$ et $A' \geq A$.

On raisonne donc par récurrence sur la place d'un tel élément (ρ', A', B', ζ') dans Jord(ψ). On fixe un tel élément dans ψ et on suppose que ce n'est pas le plus petit élément puisque ce cas a déjà été vu; on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ, A', B', ζ') par $(\rho, A' + T', B' + T', \zeta')$ avec T' grand mais tel que si $(\rho, A'', B'', \zeta'') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A', B', \zeta')$, on a encore $B'' \gg A' + T'$. On peut alors appliquer le lemme par récurrence aux représentations dans le paquet associé à ψ'.

On note $S(\rho, A', B', T', \zeta')$ la représentation irréductible associée aux multi-segments

$$\begin{matrix} \zeta'(B'+T') & \cdots & \zeta'(A'+T') \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \zeta'(B'+1) & \cdots & \zeta'(A'+1). \end{matrix}$$

Par définition, pour toute représentation irréductible π du paquet associé à ψ, il existe une représentation irréductible π' du paquet associé à ψ' et une inclusion

$$\pi' \hookrightarrow S(\rho, A', B', T', \zeta') \times \pi.$$

On suppose que $\mathrm{Jac}_{\zeta B,\dots,\zeta A}\, \pi \neq 0$. On fixe une représentation irréductible σ et une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \rho|\cdot|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta A} \times \sigma.$$

Avec une récurrence facile sur $A - B$, on peut supposer que cette inclusion se factorise en une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A} \rangle \times \sigma.$$

En remontant, on a une inclusion

$$\pi' \hookrightarrow S(\rho, A', B', T', \zeta') \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A} \rangle \times \sigma.$$

Supposons d'abord que l'induite $S(\rho, A', B', T', \zeta') \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A} \rangle$ dans le GL convenable est irréductible. On peut échanger les 2 facteurs et on obtient donc par réciprocité de Frobenius que $\mathrm{Jac}_{\zeta B,\dots,\zeta A}\, \pi' \neq 0$. On applique le lemme par récurrence à π' mais les blocs de Jordan qui interviennent sont nécessairement comparables à (ρ, A, B, ζ) (qui n'est pas un bloc de Jordan, en général) et sont donc des blocs de Jordan de ψ et on obtient le lemme pour π. On sait que l'induite est irréductible si $\zeta' \neq \zeta$: c'est une application immédiate du fait que $|\zeta'(B'+1) - \zeta B|$ est le plus petit écart entre une représentation intervenant dans $S(\rho, A', B', T', \zeta')$ et une représentation intervenant dans $\rho|\cdot|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta A}$ et que ce nombre vaut $|(B'+1) - \zeta'\zeta B|$ ou encore $B' + 1 + B \geq 1 + B > 1$ car on a supposé que $B \neq 0$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

On suppose donc que $\zeta' = \zeta$; si $\zeta = \zeta' = -$ on a encore l'irréductibilité d'après par exemple [21, 1.9] si $B \leq B' + 1$ et $A \geq A' + 1$. En utilisant l'involution de Zelevinsky, on a aussi le même résultat si $\zeta = \zeta' = +$. En fait on sait que $\mathrm{Jac}_{\zeta B}\,\pi = 0$ s'il n'existe pas $(\rho, \tilde{A}, B, \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ donc on peut se limiter au cas où $B \leq B'$. Le seul cas qui reste est donc $B \leq B'$ et $A \leq A'$. Si $B = B'$, on prend $v = 1$ et $(\rho, A_1, B_1, \zeta_1) = (\rho, A', B', \zeta')$. Si $B < B'$, on factorise

$$\langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A}\rangle \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(B'-1)}\rangle \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A'}\rangle$$

et on remarque que l'induite $S(\rho, A', B', T', \zeta') \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(B'-1)}\rangle$ est irréductible. On a donc $\mathrm{Jac}_{\zeta B, \dots, \zeta(B'-1)}\,\pi' \neq 0$. On applique alors le lemme pour π' et on obtient le lemme pour π en ajoutant l'élément (ρ, A', B', ζ'). Cela termine la preuve.

2.8 Assouplissement des choix

Ici, on fixe ψ et on veut décrire les représentations de $\Pi(\psi)$ avec des choix aussi peu contraignants que possible. On fixe un ordre total sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ ayant uniquement la propriété: soit $(\rho, A, B, \zeta), (\rho', A', B', \zeta') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ tels que $\rho = \rho'$, $\zeta = \zeta'$, $A > A'$ et $B > B'$ alors $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho', A', B', \zeta')$.

Cette propriété est la propriété notée $\mathcal{P}$ ci-dessus sauf qu'elle est exprimée plus simplement quand on a remplacé (ρ, a, b) par (ρ, A, B, ζ) puisque l'on a déjà mis un choix en fixant ζ si $a = b$.

On sloppy construit $\psi_{\gg}$ dominant ψ pour cet ordre c'est-à-dire que pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, on fixe une collection d'entiers $T_{\rho,A,B,\zeta}$ indexée par les quadruplets (ρ, A, B, ζ) définissant ψ de telle sorte que si $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho', A', B', \zeta')$ alors $T_{\rho,A,B,\zeta} \gg T_{\rho',A',B',\zeta'}$; et $\psi_{\gg}$ est le morphisme défini par les quadruplets $(\rho, A + T_{\rho,A,B,\zeta}, B + T_{\rho,A,B,\zeta}, \zeta)$ ou encore $\mathrm{Jord}(\psi_{\gg}) = \bigcup_{(\rho,A,B,\zeta)} \big(\rho, a + (1+\zeta)T_{\rho,A,B,\zeta}, b + (1-\zeta)T_{\rho,A,B,\zeta}\big)$. On voit ici que le choix de ζ quand $a = b$ influe sur la définition de $\psi_{\gg}$ en même temps que le choix de la collection d'entiers $T_{\rho,A,B,\zeta}$.

Soient $\underline{t}, \underline{\eta}$ vérifiant 2.1; ici on voit ces applications comme définies sur $\mathrm{Jord}(\psi) \simeq \mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas définies sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ vu comme ensemble sans multiplicité. On construit $\pi(\psi_{\gg}, \underline{t}, \underline{\eta})$. On calcule ensuite les modules de Jacquet de cette représentation

$$\mathrm{Jac}_{\psi}\,\pi(\psi_{\gg}, \underline{t}, \underline{\eta}) := \circ_{(\rho,A,B,\zeta)\in \mathrm{Jord}(\psi)} \circ_{j \in [1, T_{\rho,A,B,\zeta}]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+j), \dots, \zeta(A+j)}\,\pi(\psi_{\gg}, \underline{t}, \underline{\eta}),$$

où les (ρ, A, B, ζ) sont pris dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire, avec l'inversion provoquée par l'écriture de $\circ$, que l'on commence par "baisser" le plus petit élément de $\mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$ pour le faire devenir le plus petit élément de $\mathrm{Jord}(\psi)$, *et cetera*.

Proposition 2.8.1 *Avec les notations précédentes,* $\mathrm{Jac}_{\psi}\,\pi(\psi_{\gg}, \underline{t}, \underline{\eta})$ *est nulle ou irréductible; si cette représentation est non nulle elle est dans* $\Pi(\psi)$ *et toute représentation de* $\Pi(\psi)$ *est obtenue par cette procédure pour un unique choix de* $\underline{t}$ *et* $\underline{\eta}$.

On fixe ψ et $\psi_{\gg}$ et pour tout $k \in [1, |\mathrm{Jord}(\psi)|]$, on note $(\rho_k, A_k, B_k, \zeta_k)$ le k-ième élément de $\mathrm{Jord}(\psi)$, ces éléments étant ordonnés de telle sorte que le premier soit le plus petit. Et on note $(\rho_k, A_{\gg,k}, B_{\gg,k}, \zeta_k)$ le k-ième bloc de Jordan de $\psi_{\gg}$

avec le même principe pour l'ordre. Par hypothèse $(\rho_k, A_{\gg,k}, B_{\gg,k}, \zeta_k)$ "domine" $(\rho_k, A_k, B_k, \zeta_k)$ ce qui veut dire que $T_k := A_{\gg,k} - A_k = B_{\gg,k} - B_k \gg 0$. On note $\psi_{\leq k}$ le morphisme dont les blocs de Jordan sont tous les $(\rho_i, A_i, B_i, \zeta_i)$ pour $i \leq k$ et les $(\rho_j, A_{\gg,j}, B_{\gg,j}, \zeta_j)$ pour touts les $j > k$. On démontre la proposition par récurrence sur k; pour s'autoriser $T_1 \neq 0$, on commence à $k = 0$, où il n'y a rien à démontrer. On le démontre donc pour k en l'admettant pour $k - 1$. On note $S(\rho, A_k, B_k, T_k, \zeta)$ la représentation associée aux multi-segments

$$\begin{matrix} B_k + T_k & \cdots & A_k + T_k \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_k + 1 & \cdots & A_k + 1. \end{matrix}$$

On pose $\pi_0 := \pi(\psi_{\gg}, \underline{t}, \underline{\eta})$ et pour tout $k \in [1, |\operatorname{Jord}(\psi)|]$, on pose

$$\pi_k := \operatorname{Jac}_{\zeta(B_k+1),\dots,\zeta(A_k+1)} \cdots \operatorname{Jac}_{\zeta(B_k+T_k),\cdots,\zeta(A_k+T_k)} \pi_{k-1}$$

que l'on voit comme un élément du groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie d'un groupe convenable; c'est donc *a priori* soit 0 soit une somme finie de représentations irréductibles. On va montrer par récurrence que π_k est soit 0 soit une représentation irréductible. Ceci est vrai pour $k = 0$ par définition de π_0. Montrons le pour π_k en l'admettant pour π_{k-1}. Le premier point à démontrer est que si $\pi_k \neq 0$, alors il existe une représentation irréductible σ, une inclusion

$$\pi_{k-1} \hookrightarrow S(\rho, A_k, B_k, T_k, \zeta) \times \sigma$$

et que $\pi_k = \sigma$.

Pour tout $\ell \in [0, T_k]$, on définit la représentation irréductible $S(\rho, A_k + \ell, B_k + \ell, T_k, \zeta)$ en ne considérant que les $T_k - \ell$ premières lignes du tableau ci-dessus; on ne fait rien si $\ell = T_k$. Et on démontre par récurrence descendante sur ℓ l'assertion suivante: il existe une représentation σ_ℓ vérifiant $\operatorname{Jac}_{\zeta C,\cdots,\zeta C'} \sigma_\ell = 0$ pour tout $C \in [B_k + \ell + 1, A_k + T_k]$ et $C' \in [A_k + \ell + 1, A_k + T_k]$, avec $C' \geq C$ et tel que l'on ait une inclusion

$$\pi_{k-1} \hookrightarrow S(\rho, A_k + \ell, B_k + \ell, T_k, \zeta) \times \sigma_\ell.$$

Remarquons tout de suite que comme π_{k-1} est irréductible par hypothèse, on peut supposer (comme nous le ferons) que σ_ℓ est irréductible, on garde la propriété de nullité de certains modules de Jacquet de σ_ℓ et cette propriété de nullité assure que

$$\circ_{i \in [T_k, \ell+1]} \operatorname{Jac}_{\zeta(B_k+i),\cdots,\zeta(A_k+i)} S(\rho, A_k + \ell, B_k + \ell, T_k, \zeta) \times \sigma_\ell = \sigma_\ell.$$

En particulier pour $\ell = 0$, on aura le résultat cherché, soit $\pi_k = 0$ soit $\pi_k = \sigma_0$. Démontrons donc l'assertion.

Pour $\ell = T_k$, il n'y a presque rien à démontrer en prenant $\sigma_{T_k} = \pi_{k-1}$; il suffit de montrer les propriétés des modules de Jacquet et pour cela d'utiliser le fait que $\operatorname{Jac}_{\zeta C} \pi_{k-1} = 0$ s'il n'existe pas d'élément de $\operatorname{Jord}(\psi_{k-1})$ de la forme $(\rho, \tilde{A}, \tilde{B}, \zeta)$ avec

$\tilde{B} = C$. Or cette non existence est vraie par hypothèse puisque $C \in [B_k + T_k + 1, A_k + T_k]$. On suppose l'assertion vraie pour $\ell + 1 \leq T_k$ et on va la démontrer pour ℓ. On a une inclusion

$$\pi_{k-1} \hookrightarrow S(\rho, A_k + \ell + 1, B_k + \ell + 1, T_k, \zeta) \times \sigma_{\ell+1}.$$

On vérifie alors

$$\mathrm{Jac}_{\zeta(B_k+\ell+1),\dots,\zeta(A_k+\ell+1)} \circ_{i \in [T_k, \ell+1]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B_k+i),\dots,\zeta(A_k+i)} \pi_{k-1} \hookrightarrow \mathrm{Jac}_{\zeta(B_k+\ell+1),\dots,\zeta(A_k+\ell+1)} \sigma_{\ell+1}.$$

Comme $\pi_k \neq 0$, on a une non nullité du membre de droite. Ainsi il existe une représentation irréductible σ_ℓ et une inclusion

$$\sigma_{\ell+1} \hookrightarrow \rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell+1)} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta(A_k+\ell+1)} \times \sigma_\ell.$$

Cette inclusion se factorise par l'unique sous-module irréductible (pour le GL convenable) de l'induite $\rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell+1)} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta(A_k+\ell+1)}$ car sinon on aurait $C \in]B_k + \ell + 1]$ et $C' = A_k + \ell + 1$ avec $\sigma_{\ell+1} \hookrightarrow \langle \zeta C, \dots, \zeta C' \rangle \times \sigma''$ pour σ'' convenable et $\mathrm{Jac}_{\zeta C, \cdots, \zeta C'} \sigma_{\ell+1} \neq 0$, ce qui est exclu par hypothèse de récurrence.

D'où
$$\sigma_{\ell+1} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell+1)}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(A_k+\ell+1)} \rangle \times \sigma_\ell.$$

En remontant, on obtient une inclusion

$$\pi_{k-1} \hookrightarrow S(\rho, A_k + \ell + 1, B_k + \ell + 1, T_k, \zeta) \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell)}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(A_k+\ell)} \rangle \times \sigma_\ell.$$

On veut encore démontrer que cette inclusion se factorise par l'unique sous-module irréductible (pour un GL convenable) de

$$S(\rho, A_k + \ell + 1, B_k + \ell + 1, T_k, \zeta) \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell)}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(A_k+\ell)} \rangle$$

qui est précisément $S(\rho, A_k + \ell, B_k + \ell, T_k, \zeta)$. S'il n'en est pas ainsi, l'inclusion se factorise par

$$\rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell)} \times S(\rho, A_k + \ell + 1, B_k + \ell + 1, T_k, \zeta) \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell+1)}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(A_k+\ell)} \rangle \times \sigma_\ell.$$

Or l'induite $S(\rho, A_k + \ell + 1, B_k + \ell + 1, T_k, \zeta) \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell+1)}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(A_k+\ell+1)} \rangle$ est irréductible (*cf.* [21, 1.9]); on peut donc encore échanger les 2 facteurs; on obtient alors une inclusion pour τ une représentation convenable:

$$\pi_{k-1} \hookrightarrow \rho|\cdot|^{\zeta(B_k+\ell)} \times \langle \rho|\cdot|^{(B_k+\ell+1)}, \dots, \rho|\cdot|^{A_k+\ell} \rangle \times \tau.$$

On applique le lemme 2.7 à π_{k-1} et ψ_{k-1} pour $A = A_k + \ell + 1$ et $B = B_k + \ell + 1$. Comme $\ell < T_k$, l'élément de $\mathrm{Jord}(\psi_{k-1})$ noté $(\rho, A_1, B_1, \zeta_1)$ de *loc. cit.* est de la forme (ρ, A', B', ζ) vérifiant $(\rho, A', B', \zeta) <_{\mathrm{Jord}(\psi_{k-1})} (\rho, A_k + T_k, B_k + T_k, \zeta)$; on a donc aussi $(\rho, A', B', \zeta) <_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A_k, B_k, \zeta)$ par choix de l'ordre. Ceci reste vrai pour tout $i \in [1, v]$ puisque les blocs se chevauchent et en particulier B_v, A_v (avec les notations de *loc. cit.*) vérifie soit $B_\nu \leq B_k$ soit $A_\nu \leq A_k$; or on a $B_1 = B_k + \ell > B_k$ d'où aussi $B_\nu > B_k$ donc $A_\nu \leq A_k$ ce qui est contradictoire avec $A_\nu \geq A_k + \ell$. D'où l'assertion. On a donc montré l'inclusion

$$\pi_{k-1} \hookrightarrow S(\rho, A_k + \ell, B_k + \ell, T_k, \zeta) \times \sigma_\ell.$$

Il reste à montrer que pour tout $C \geq B_k + \ell$ et tout $A \in [A_k + \ell, A_k + T_k]$, avec $A \geq C$, on a

$$\mathrm{Jac}_{\zeta C, \dots, \zeta A}\, \sigma_\ell = 0.$$

Raisonnons par l'absurde et on fixe C maximum avec une telle propriété, d'où l'existence d'une représentation irréductible σ' et une inclusion

$$\sigma_\ell \hookrightarrow \langle \rho |\cdot|^{\zeta C}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A} \rangle \times \sigma'.$$

La représentation $S(\rho, A_k + \ell, B_k + \ell, T_k, \zeta) \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta C}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A}\rangle$ est irréductible à cause des hypothèses sur $C \geq B_k + \ell$ et $A \leq A_k + T_k$. En remontant on trouve encore une inclusion de π_{k-1} dans une induite $\langle \rho|\cdot|^{\zeta C}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A}\rangle \times \sigma''$ avec σ'' convenable et on peut conclure comme ci-dessus sauf dans le cas où $C = B_k + T_k$ qui est tout à fait possible. Ici on aurait que $\mathrm{Jac}_{\zeta(B_k+T_k), \zeta(B_k+T_k)}\, \pi_{k-1} \neq 0$ ce qui est exclu par exemple par [16, 5.2] (c'est facile).

On a donc ainsi défini π_k comme représentation irréductible. On remarque aussi que π_k détermine uniquement π_{k-1} car l'induite $S(\rho, A_k, B_k, T_k, \zeta) \times \pi_k$ a un unique sous-module irréductible par réciprocité de Frobenius. On a donc démontré le premier point de la proposition.

Montrons que les représentations obtenues sont dans $\Pi(\psi)$ encore par récurrence sur k puisque l'on connaît le résultat dans le cas de $\psi_\gg$. On sait donc qu'une bonne combinaison linéaire des π_{k-1} à coefficients tous non nuls se transfère en la trace tordue de $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi_k)$; cela donne une identité de caractère. Etant donné la compatibilité du transfert à la restriction partielle [22, 4.2] la même combinaison linéaire de π_k se transfère en $\mathrm{Jac}^\theta_\psi\, \pi^{\mathrm{GL}}(\psi_{k-1})$ (voir ci-dessous pour le rappel de la définition). L'indépendance linéaire des caractères du groupe G donnera le résultat cherché dès que l'on aura montré que $\mathrm{Jac}^\theta_\psi\, \pi^{\mathrm{GL}}(\psi_{k-1}) = \pi^{\mathrm{GL}}(\psi_k)$.

Conceptuellement, on définit $\mathrm{Jac}^\theta_\psi\, \pi^{\mathrm{GL}}(\psi_\gg)$ comme on a défini Jac_ψ et le point est que

$$\mathrm{Jac}^\theta_\psi\, \pi^{\mathrm{GL}}(\psi_\gg) = \pi^{\mathrm{GL}}(\psi).$$

En effet, soit (ρ', A', B', ζ') un quadruplet comme ceux que l'on considère ici. On considère le tableau suivant:

$$\begin{matrix} \zeta' B' & \cdots & -\zeta' A' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta' A' & \cdots & -\zeta' B' \end{matrix}$$

on peut lui associer grâce aux travaux de Zelevinsky une représentation irréductible basée sur la cuspidale ρ'; on note $Z(\rho', A', B', \zeta')$ cette représentation.

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

Pour une représentation σ d'un groupe linéaire, on note $\mathrm{Jac}^{g}_{\rho|\cdot|^x}\sigma$ l'analogue de $\mathrm{Jac}_{\rho|\cdot|^x}$ défini en 1 et $\mathrm{Jac}^{d}_{\rho|\cdot|^x}\sigma$ l'object de même nature quand on échange la gauche et la droite, ce qui a un sens pour les groupes linéaires et n'en avait pas pour les groupes classiques. Evidemment cela suppose que l'on a fixé les matrices triangulaires comme sous-groupe de Borel et que tous les paraboliques contiennent ce sous-groupe de Borel. Avec ces notations $\mathrm{Jac}^{\theta}_{\rho|\cdot|^x}\sigma = \mathrm{Jac}^{g}_{\rho|\cdot|^x}\mathrm{Jac}^{d}_{\rho|\cdot|^{-x}}\sigma = \mathrm{Jac}^{d}_{\rho|\cdot|^{-x}}\mathrm{Jac}^{g}_{\rho|\cdot|^x}\sigma$. En 1, on a abrégé $\mathrm{Jac}_{\rho|\cdot|^x}$ en Jac_x quand ρ est fixé et on abrègera de même $\mathrm{Jac}^{\theta}_{\rho|\cdot|^x}$ en Jac^{θ}_x.

Fixons ρ; soit $[x,y]$ un segment croissant ou décroissant x,y étant des demi-entiers. Les représentations $Z(\rho',A',B',\zeta')$ vérifient

$$\mathrm{Jac}_{\rho|\cdot|^x,\dots,\rho|\cdot|^y} Z(\rho',A',B',\zeta')\neq 0$$

exactement quand $\rho'=\rho$, $x=\zeta'B'$ et $y\in[\zeta'B',-\zeta'A']$ ou $y\in[\zeta'B',\zeta'A']$, les 2 possibilités sont exclusives. Dans le premier cas le résultat est l'unique représentation irréductible associée au tableau

$$\begin{matrix} & & y-\zeta'1 & \cdots & -\zeta'A' \\ \zeta'(B'+1) & \cdots & \cdots & \cdots & -\zeta'(A'-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta'A' & \cdots & \cdots & \cdots & -\zeta'B'. \end{matrix}$$

Et dans le deuxième cas, c'est l'unique représentation irréductible associée au tableau

$$\begin{matrix} & \zeta'(B'-1) & \cdots & -\zeta'A' \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ y+\zeta'1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta'A' & \cdots & \cdots & -\zeta'B'. \end{matrix}$$

On montre le résultat suivant: soient ψ' un morphisme et $(\rho,A,B,\zeta)\in\mathrm{Jord}(\psi')$; on suppose que $\mathrm{Jord}(\psi')$ est muni d'un ordre total vérifiant:

- pour tout (ρ',A',B',ζ') tel que $(\rho',A',B',\zeta)>(\rho,A,B,\zeta)$, $B'\gg A$;
- pour tout $(\rho',A',B',\zeta')<(\rho,A,B,\zeta)$ soit $\rho'\not\simeq\rho$ soit $\zeta'\neq\zeta$ avec $B'\neq 0$ soit $B'\leq B$ soit $A'\leq A$.

On note $\psi'_>$ le morphisme qui se déduit de ψ en changeant (ρ,A,B,ζ) en $(\rho, A+1,B+1,\zeta)$ et on va montrer que $\mathrm{Jac}^{\theta}_{\zeta(B+1),\dots,\zeta(A+1)}\pi^{\mathrm{GL}}(\psi'_>)=\pi^{\mathrm{GL}}(\psi')$. De proche en proche, cela donnera l'assertion cherchée.

On écrit

$$\pi^{\mathrm{GL}}(\psi'_>)=\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathrm{Jord}(\psi')-\{(\rho,A,B,\zeta)\}}Z(\rho',A',B',\zeta')\times Z(\rho,A+1,B+1,\zeta).$$

On calcule $\mathrm{Jac}^{g}_{\zeta(B+1),\dots,\zeta(A+1)}\pi^{\mathrm{GL}}(\psi'_>)$. Les formules standard de Bernstein Zelevinsky disent que le résultat a une filtration dont les sous-quotients sont indexés par

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

les découpages de l'ensemble $\mathcal{E} := \{\zeta(B+1), \dots, \zeta(A+1)\}$ en $|\operatorname{Jord}(\psi'_{>})|$ sous-ensembles, $\mathcal{E}_{(\rho',A',B',\zeta')}$, le sous-quotient correspondant à ce découpage étant isomorphe à $\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in \operatorname{Jord}(\psi'_{>})} \operatorname{Jac}_{x\in \mathcal{E}_{(\rho',A',B',\zeta')}} Z(\rho',A',B',\zeta')$. D'après ce que l'on a vu, $\mathcal{E}_{(\rho',A',B',\zeta')} = \varnothing$ si $\zeta'B' \notin [\zeta(B+1), \dots, \zeta(A+1)]$. Ainsi $\mathcal{E}_{(\rho',A',B',\zeta')} \neq \varnothing$ entraîne que nécessairement $(\rho',A',B',\zeta') \leq (\rho,A,B,\zeta)$ et que $\rho = \rho'$, $B' > B$ et $\zeta' = \zeta$; supposons que $(\rho',A',B',\zeta') \neq (\rho, A+1, B+1, \zeta)$, les propriétés de l'ordre assurent alors que $A' \leq A$ et cela entraîne que $\zeta(A+1) \notin \mathcal{E}_{(\rho',A',B',\zeta')}$. Ainsi $\zeta(A+1) \in \mathcal{E}_{(\rho,A+1,B+1,\zeta)}$ mais cela force $\zeta(B+1) \in \mathcal{E}_{(\rho,A+1,B+1,\zeta)}$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{(\rho,A+1,B+1,\zeta)}$. Ainsi qu'il n'y a qu'un seul découpage possible; le même argument s'applique pour $\operatorname{Jac}^d_{-\zeta(A+1),\dots,-\zeta(B+1)}$ et on trouve

$$\operatorname{Jac}^{\theta}_{\zeta(B+1),\dots,\zeta(A+1)} \pi^{\mathrm{GL}}(\psi'_{>}) = \pi^{\mathrm{GL}}(\psi').$$

On note $\sum_{\pi_{k-1}\in\Pi(\psi_{k-1})} a(\pi_{k-1})\pi_{k-1}$ la combinaison linéaire stable qui se transfère en la trace tordue de $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi_{k-1})$ pour des bons coefficients $a(\pi_{k-1}) \neq 0$. On a alors montré que la combinaison $\sum_{\pi_{k-1}\in\Pi(\psi_{k-1})} a(\pi_{k-1}) \operatorname{Jac}_{\psi_k} \pi_{k-1}$ est stable et se transfère en la trace tordue de $\pi^{\mathrm{GL}}(\psi_k)$. On rappelle que les $\operatorname{Jac}_{\psi_k} \pi_{k-1}$ sont soit nuls soit irréductibles et ceux qui sont non nuls sont tous distincts. C'est alors l'indépendance linéaire des caractères qui permet de conclure.

3 Définition de la normalisation et énoncé du théorème

3.1 Normalisation

On fixe ψ un morphisme définissant un paquet d'Arthur de représentations et on note $\Pi(\psi)$ ce paquet de représentations (*cf.* le paragraphe précédent). Soit $\pi \in \Pi(\psi)$; on fixe aussi un entiers a_0 et une représentation cuspidale autoduale ρ. On considère l'opérateur d'entrelacement standard

$$M(s,\pi) := \operatorname{St}(\rho,a_0)|\cdot|^{s} \times \pi \to \operatorname{St}(\rho,a_0)|\cdot|^{-s} \times \pi$$

au voisinage de $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. On définit la fonction méromorphe de s suivante

$$\begin{aligned} r(s,\psi) := \times_{(\tau,a,b)\in \operatorname{Jord}(\Psi)} &\frac{L\big(\operatorname{St}(\rho,a_0)\times \operatorname{St}(\tau,a), s-(b-1)/2\big)}{L\big(\operatorname{St}(\rho,a_0)\times \operatorname{St}(\tau,a), s+(b+1)/2\big)} \\ &\times \frac{L(\rho, r_G, 2s)}{L(\rho, r_G, 2s+1)}, \end{aligned}$$

où r_G est défini par la représentation naturelle de G^* qui sert à définir le transfert. Et on pose $N_\psi(s,\pi) := M(s,\pi) r(s,\psi)^{-1}$ et en général ψ est fixé et on pose donc $N(s,\pi) := N_\psi(s,\pi)$. On connaît complètement explicitement les fonctions L qui interviennent ci-dessus. On rappelle les résultats de Shahidi [23] que

$$L\big(\operatorname{St}(\rho,a_0)\times \operatorname{St}(\rho',a), s\big) = \times_{k\in [|(a_0-a)/2|,(a_0+a)/2[} L(\rho\times\rho', s+k).$$

On sait aussi qu'il existe une factorisation $L(\rho\times\rho,s) = L(\rho,r_G,s)L(\rho,r'_G,s)$ où $r_G \oplus r'_G$ est la décomposition de la représentation $\bigotimes^2 \mathbb{C}^n$ où $\mathbb{C}^n$ est la représentation naturelle de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ($n = m_G^*$) la décomposition dépend du plongement de G^* dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

On en déduit facilement que les dénominateurs ne peuvent avoir de pôles au voisinage d'un nombre réel positif ou nul et les numérateurs n'ont pas de zéros. Ainsi au voisinage d'un nombre réel positif ou nul, la fonction $r(s, \psi)$ est d'ordre inférieur ou égal à 0.

On a vu en [18, 2.1] que $r(s, \psi)r(-s, \psi)$ diffère du produit $M(-s) \circ M(s)$ vu comme opérateur scalaire par une fonction holomorphe inversible au voisinage de tout point réel. En *loc. cit.* on a bien expliqué que cette normalisation n'est pas en général la normalisation de Langlands–Shahidi; c'est la normalisation de Langlands–Shahidi uniquement si π est dans le paquet de Langlands associé au paquet d'Arthur.

3.2 Enoncé du théorème et shéma de la preuve

Théorème 3.2.1 *L'opérateur $N_\psi(s, \pi)$ est holomorphe en tout point s réel positif ou nul.*

Le choix de la normalisation est de nature globale et les conséquences attendues comme en [18] sont aussi de nature globale, mais je n'ai pas de démonstration globale de ce résultat car tout essai s'est heurté au fait qu'un tel opérateur peut être identiquement zéro et que pour obtenir des résultats en la place v il faut au moins empêcher des 0 aux autres places; or on a peu de liberté car la normalisation dépend du paquet, ψ. Certes il y a plusieurs façon de globaliser ce paquet mais la représentation de la deuxième copie de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est elle de nature globale et est donc fixée par la place v et ne donne lieu à aucune liberté.

Le cas $s = 0$: ici on sait que $N(-s, \pi) \circ N(s, \pi)$ est une fonction holomorphe inversible, en particulier n'a pas de pôle en $s = 0$. Donc à une fonction holomorphe inversible près $N(-s, \pi)$ est dual de $N(s, \pi)$ pour la dualité naturelle entre $\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s \times \pi$ et $\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times \pi$ construite grâce à l'unitarité de π. Cela suffit pour avoir l'holomorphie en $s = 0$ et même le fait que $N(0, \pi)$ est bijectif.

On se place donc au voisinage d'un réel $s = s_0 > 0$. On pose $b_0 = 2s_0 + 1$. Dans ce paragraphe, on explique la démonstration. Cette démonstration se fait par réduction au cas où π est une représentation tempérée. Supposons momentanément que π soit tempérée; sous cette hypothèse, on sait grâce aux travaux d'Harish-Chandra que l'opérateur d'entrelacement non normalisé est holomorphe en $s = s_0$ par positivité stricte. Il suffit alors de vérifier que $r(s, \psi)$ n'a pas de zéro en $s = s_0$; on a déjà vu que $r(s, \psi)$ est d'ordre inférieur ou égal à zéro au voisinage de tout s réel strictement positif. Cela donne le résultat.

On traitera aussi facilement le cas où $\mathrm{Jord}(\psi)$ a de la multiplicité *cf.* 4.2.

La suite de la démonstration du théorème se fait par récurrence sur les entiers suivants; soit ζ un signe. On pose $\ell(\psi; \zeta) := \sum_{(\rho', a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi), \zeta(a-b) \geq 0} \big(\inf(a, b) - 1\big)$. On note ζ_0 le signe de $a_0 - b_0$ en prenant $+$ si $a_0 = b_0$. Si $\zeta_0 = -$ on fait une récurrence d'abord sur $n(\psi, -) := |\{(\rho', a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi); a < b\}$ puis sur $\ell(\psi, -\zeta_0)|$. Le début de la récurrence se fait donc quand $\ell(\psi; +) = n(\psi, -) = 0$; on a donc pour tout $(\rho', a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, $a \geq b$ par $n(\psi, -) = 0$ et $b = 1$ par $\ell(\psi; +) = 0$. Ainsi, dans ce cas, ψ est tempéré et le début de la récurrence a déjà été montrée. Supposons

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

maintenant que $\zeta_0 = +$; ici la récurrence se fait sur $\ell(\psi, +) + \ell(\psi, -)$. Le début de la récurrence est donc quand pour tout $(\rho', a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, $\inf(a, b) = 1$ et ce cas sera traité en 4.10 on le fera en utilisant la description des représentations obtenue dans [15] et rappelée ici.

Un cas facile est le cas où l'on peut construire un morphisme ψ' tel que $\pi \in \Pi(\psi) \cap \Pi(\psi')$ et tel que l'on puisse appliquer la récurrence à ψ'; le seul point alors est de vérifier que $r(s, \psi')/r(s, \psi)$ est holomorphe. C'est d'ailleurs dans ce cas que l'on trouve facilement des exemples où $N_\psi(s, \pi)$ est identiquement 0 en $s = s_0$.

Le cas le plus fréquent est celui où on construit un morphisme ψ' est relatif à un groupe de rang plus petit que le groupe de départ et auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Ce que l'on montre alors est qu'il existe une représentation $\pi' \in \Pi(\psi')$ et une représentation complètement explicite σ d'un groupe linéaire avec une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \sigma \times \pi'.$$

Ici il faut donc aussi considérer les opérateurs d'entrelacements

$$\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{s_0} \times \sigma \to \sigma \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{s_0}$$
$$\sigma \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s_0} \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s_0} \times \sigma.$$

Donc il faut aussi étudier ces opérateurs d'entrelacements (ce qui a été fait en [21]) et on est presque obligé de ne considérer que des cas où après une normalisation explicite ils sont holomorphes; ensuite on compare les normalisations ce qui est facile. Comme les induites écrites ne sont pas irréductibles en général, dans cette étape on perd des informations. Le plus ennuyeux est qu'avec cette méthode, on ne contrôle pas la non nullité des opérateurs. Toutefois, une fois l'holomorphie démontrée, on pourra utiliser des opérateurs non holomorphes en contrôlant l'ordre des pôles, ce qui, je l'espère, permettra d'aller plus loin.

Remarquons ici que l'holomorphie sera quasi automatique pour l'opérateur d'entrelacement non normalisé et pour le facteur de normalisation (*cf.* 3.3 pour cette assertion) si pour tout $(\rho', a', b') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ on a $\rho' \not\simeq \rho$ et dans ce cas le théorème est facilement ramené au cas où π est une représentation tempérée. De plus, par les dévissages qui permettent de construire les éléments de $\Pi(\psi)$ rappelé dans le paragraphe précédent, il est facile de se ramené au cas où pout tout $\rho' \not\simeq \rho$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Jac}_{\rho'|\cdot|^x} \pi = 0$. Comme on a déjà expliqué le cas où π est tempérée, cela explique que dans la suite on se concentre sur le cas où il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $(\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ et on peut "oublier" les $\rho' \not\simeq \rho$ qui interviennent quand même dans $\mathrm{Jord}(\psi)$; c'est juste une simplification d'écriture qui, j'espère, limite les fautes de frappe.

On explique les étapes de la récurrence et la construction des ψ'; on rappelle que l'on a fixé, $\rho, a_0, b_0 = 2s_0 + 1$ et le signe ζ_0. On suppose d'abord que $\ell(\psi; -\zeta_0) > 0$ et on baisse $\ell(\psi; -\zeta_0)$ sans modifier $n(\psi, \zeta_0)$ (défini si $\zeta_0 = -$) ni $\ell(\psi, \zeta_0)$. On remplace chaque $(\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ par $\big(\rho, A = (a+b)/2 - 1, B = |(a-b)/2|, \zeta\big)$ où $\zeta = -\zeta_0$

si $a = b$. Et on fixe un tel élément tel que $A - B > 0$ et B est maximal avec cette propriété; on met alors un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que $(\rho, A', B', \zeta') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, -\zeta_0)$ entraîne que $\zeta' = -\zeta_0$, $B' > B$ et $A' > A$. Ainsi pour $(\rho, A', B', \zeta') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, -\zeta_0)$, on aura nécessairement $A' = B'$. Un cas est alors facile, celui où pour tout $(\rho, A', B', \zeta') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, -\zeta_0)$, on a $B' \geq A$; dans ce cas, on montre (*cf.* 4.3) que l'on peut remplacer ψ par un morphisme ψ' qui se déduit de ψ soit en remplaçant $(\rho, A, B, -\zeta_0)$ par $\bigcup_{C \in [B,A]} (\rho, C, C, -\zeta_0)$ soit par $(\rho, A - 1, B + 1, -\zeta_0)$ ce qui a remplacé $\ell(\psi; -\zeta_0)$ par $\ell(\psi; -\zeta_0) - (A - B)$ dans le premier cas et par $\ell(\psi; -\zeta_0) - 2$ dans le deuxième cas. Dans le cas contraire traité en 4.6, on ordonne les demi-entiers B' tels que $B' \in]B, A[$ et $(\rho, B', B', -\zeta_0) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ par l'ordre usuel; on note $B_{\inf+1}$ le plus petit et $B_{\max}$ le plus grand, en posant $B_{\inf} = B$. On se ramène d'abord au cas où pour $B' > B''$ consécutifs dans cet ensemble auquel on a ajouté B, on a $\mathrm{Jac}_{-\zeta_0 B', \ldots, -\zeta_0 B''}\, \pi = 0$; cette réduction n'améliore par la récurrence. Mais avec cette hypothèse, on montre que l'on peut remplacer ψ par un morphisme ψ' qui se déduit de ψ en remplaçant $(\rho, A, B, -\zeta_0)$ soit par $(\rho, A - 1, B + 1, -\zeta_0)$ soit par $(\rho, B_{max}, B, -\zeta_0) \bigcup_{C \in [B_{max}, A]} (\rho, C, C, -\zeta_0)$; dans le premier cas, on a remplacé $\ell(\psi; -\zeta_0)$ par $\ell(\psi; -\zeta_0) - 2$ et dans le deuxième cas par $\ell(\psi; -\zeta_0) - (A - B_{max})$. Les conséquences sur l'holomorphie cherchée sont en 4.7.1. On remarque pour la suite que dans toutes ces étapes on n'a pas modifié $n(\psi, \zeta_0)$.

Ainsi, on est ramené au cas où $\ell(\psi; -\zeta_0) = 0$ sans avoir modifié $n(\psi, \zeta_0)$ ni $\ell(\psi, \zeta_0)$.

Dans le cas où $\zeta_0 = +$, on baisse ensuite $\ell(\psi, \zeta_0)$ en 4.7.2.

Il faut donc encore expliquer comment on baisse $n(\psi, \zeta_0)$ ce qui sera utile pour $\zeta_0 = -$ mais dans ce cas on modifie $\ell(\psi; -\zeta_0)$ qui peut redevenir > 0 d'où l'ordre de la récurrence. On commence par partir d'un ψ tel que $\ell(\psi, -\zeta_0) = 0$ ce qui est loisible. On fixe un élément (ρ, A, B, ζ_0) dans $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que B soit minimal; on suppose évidemment qu'il en existe. On met un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que cet élément soit le plus petit élément de $\mathrm{Jord}(\psi)$; on montre d'abord que l'on peut se ramener au cas où $B = 0$ ou $1/2$ au prix éventuellement d'une modification des $(\rho, A', B', -\zeta_0)$; puis presque par définition que l'on peut alors changer $-\zeta_0$ en ζ_0. Dans cet étape on a donc diminué $n(\psi, \zeta_0)$ de 1 éventuellement en augmentant $\ell(\psi, -\zeta_0)$. Il faut remarquer que pour mener à bien cette preuve, on a pris un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que (ρ, A, B, ζ_0) est le plus petit élément alors que tout autre élément de la forme (ρ, A', B', ζ_0) est plus grand que tout élément de la forme $(\rho, A'', B'', -\zeta_0)$; *cf.* 4.8.2 et 4.9.

3.3 Propriétés des facteurs de normalisation

On fixe ρ une représentation cuspidale autoduale et des entiers a_0, a, b_0, b. On pose $s_0 = (b_0 - 1)/2$, $A_0 := (a_0 + b_0)/2 - 1$, $B_0 = |a_0 - b_0|/2$ et ζ_0 est le signe de $a_0 - b_0$ si ce nombre est non nul et + sinon. On voit aussi $\mathrm{Jord}(\psi)$ comme un ensemble de quadruplets et non un ensemble de triplets comme expliqué dans les constructions de 2.1 et suivant. Chaque élément (ρ, A, B, ζ) de $\mathrm{Jord}(\psi)$ contribue par un facteur dans $r(s, \psi)$; le tableau ci-dessous indique s'il contribue aux pôles de $r(s, \psi)$ en $s = s_0 > 0$ ou non; s'il remplit la condition écrite dans la case, il contribue et sinon il n'y contribue pas.

$\zeta\backslash\zeta_0$	$+$	$-$
$+$	$B \leq B_0 \leq A_0 \leq A$	
$-$	$B \leq A_0 \leq A$	$B_0 \leq B \leq A_0 \leq A$

En particulier si $\zeta_0 = -$ aucun élément de la forme (ρ, A, B, ζ) avec $\zeta = +$ contribue aux pôles de $r(s,\psi)$. On peut maintenant expliquer pourquoi la démonstration est différente suivant les valeurs de ζ_0; si on baisse $n(\psi,\zeta_0)$ en augmentant éventuellement $\ell(\psi,-\zeta_0)$, $r(s,\psi')/r(s,\psi)$ a de bonne chance d'être holomorphe en $s = s_0$ si $\zeta_0 = -$ mais pas si $\zeta_0 = +$.

A ces contributions, s'ajoute par définition

$$L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0), r_G, 2s\big) / L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0), 2s+1\big).$$

Ce facteur n'a pas de pôle au voisinage d'un réel strictement positif cas et n'intervient donc pas pour la suite de la démonstration.

De plus les éléments (ρ', A', B', ζ') de $\mathrm{Jord}(\psi)$ avec $\rho' \not\simeq \rho$ ne contribue pas aux pôles de $r(s,\psi)$ ni d'ailleurs aux zéros; c'est ce qui explique le peu de rôle que jouent ces éléments.

4 Démonstration

4.1 Un lemme connu

Soient A_0', B_0', A, B des demi-entiers tels que $A_0'+B_0'$ et $A+B$ soient des entiers. On suppose que $B_0' \leq A_0'$ et que $B \leq A$. Ainsi les représentations $\langle A_0', \ldots, B_0'\rangle_\rho$ et $\langle A, \ldots, B\rangle_\rho$ sont des séries discrètes tordues par un caractère.

Lemme 4.1.1 *Dans le* GL *convenable, l'opérateur d'entrelacement standard*

$$\langle A_0', \ldots, B_0'\rangle_\rho |\cdot|^s \times \langle A, \ldots, B\rangle_\rho \to \langle A, \ldots, B\rangle_\rho \times \langle A_0', \ldots, B_0'\rangle_\rho |\cdot|^s$$

est holomorphe en $s = 0$ si $B_0' > B$ ou si $A_0' > A$ et a un pôle d'ordre 1 exactement si $B \geq B_0'$ et $A \geq A_0'$ avec l'une des inégalité étant une égalité. L'opérateur d'entrelacement normalisé à la Shahidi est holomorphe en $s = 0$ si $B_0' \geq B$ ou $A_0' \geq A$.

La deuxième partie du lemme est démontrée en [21] (c'est un cas particulier de [21, 1.6.3]) et est une conséquence des travaux d'Harish-Chandra. Le facteur de normalisation vaut

$$\frac{L\big(\mathrm{St}(\rho, A_0'-B_0'+1) \times \mathrm{St}(\rho, A-B+1), s + (A_0'+B_0')/2 - (A+B)/2\big)}{L\big(\mathrm{St}(\rho, A_0'-B_0'+1) \times \mathrm{St}(\rho, A-B+1), s + (A_0'+B_0')/2 - (A+B)/2 + 1\big)}$$
$$= \prod_{k \in [|A_0'-B_0'-A+B|/2, (A_0'-B_0'+A-B)/2+1[} \frac{L\big(\rho \times \rho, s + k + (A_0'+B_0'-A-B)/2\big)}{L\big(\rho \times \rho, s+k+1+(A_0'+B_0'-A-B)/2\big)},$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

d'après la formule explicite dûe à Shahidi et rappelée en 3.1, d'où encore, après simplification

$$= \frac{L\big(\rho \times \rho, s + |(A_0' - A + B - B_0')/2| + (A_0' - A + B_0' - B)/2\big)}{L\big(\rho \times \rho, s + (A_0' - B_0' + A - B)/2 + 1 + (A_0' - A + B_0' - B)/2\big)}$$

$$= \frac{L\Big(\rho \times \rho, s + \sup\big((A_0' - A); (B_0' - B)\big)\Big)}{L(\rho \times \rho, s + A_0' - B + 1)}.$$

Le facteur de normalisation a un pôle si $A_0' \leq A$ et $B_0' \leq B$ avec l'une des inégalités étant une égalité. Cela termine la preuve.

4.2 Réduction dans le cas induit

Ici on suppose que $\mathrm{Jord}(\psi)$ a de la multiplicité; on fixe $(\rho, a, b) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ et on suppose que (ρ, a, b) a multiplicité au moins 2 dans $\mathrm{Jord}(\psi)$. On sait alors (*cf.* 2.6) qu'il existe une représentation π' dans le paquet associé à ψ' et une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big) \times \pi'.$$

Lemme 4.2.1 *L'holomorphie pour $N_\psi(s, \pi)$ résulte de celle de $N_{\psi'}(s, \pi')$ en tout $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

On considère la suite d'opérateurs d'entrelacement d'abord standard et que l'on normalisera ensuite:

$$\begin{aligned} \mathrm{St}(\rho, a_0)^s \times \pi &\hookrightarrow \mathrm{St}(\rho, a_0)^s \times \mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big) \times \pi' \\ &\to \mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big) \times \mathrm{St}(\rho, a_0)^s \times \pi' \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$$\mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big) \times \mathrm{St}(\rho, a_0)^s \times \pi' \to \mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big) \times \mathrm{St}(\rho, a_0)^{-s} \times \pi' \tag{4.2.2}$$

$$\mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big) \times \mathrm{St}(\rho, a_0)^{-s} \times \pi' \to \mathrm{St}(\rho, a_0)^{-s} \times \mathrm{Speh}\big(\mathrm{St}(\rho, a), b\big) \times \pi'. \tag{4.2.3}$$

On a défini la normalisation pour l'opérateur (4.2.2) et pour les opérateurs (4.2.1) et (4.2.3), on prend la normalisation de Shahidi [21], c'est-à-dire pour (4.2.1)

$$L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0) \times \mathrm{St}(\rho, a), s - (b-1)/2\big) / L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0) \times \mathrm{St}(\rho, a), s + (b+1)/2\big)$$

et pour (4.2.3)

$$L\big(\mathrm{St}(\rho, a) \times \mathrm{St}(\rho, a_0), -(b-1)/2 + s\big) / L\big(\mathrm{St}(\rho, a) \times \mathrm{St}(\rho, a_0), (b+1)/2 + s\big).$$

Ces 2 facteurs sont égaux.

On remarque alors que $r(\psi, s)$ est par définition le produit de ces 2 facteurs avec $r(\psi', s)$ puisque $\mathrm{Jord}(\psi)$ et l'union de $\mathrm{Jord}(\psi')$ avec 2 copies de (ρ, a, b). Or les opérateurs d'entrelacement normalisés (4.2.1) et (4.2.3) sont holomorphes en tout $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Donc l'holomorphie pour $N_\psi(s, \pi)$ résulte de l'holomorphie de $N_{\psi'}(s, \pi')$. On se ramène ainsi au cas où $\mathrm{Jord}(\psi)$ n'a pas de multiplicité.

4.3 Réduction, le cas isolé

Ici on suppose que Jord(ψ) contient un élément (ρ, A, B, ζ) tel que $A > B$ et tel qu'il n'existe pas d'élément $(\rho, A', B', \zeta') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ avec $\zeta' = \zeta$ et $B' \in]B, A[$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $\bigcup_{C \in [B,A]} (\rho, C, C, \zeta)$ et ψ'' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$ (ou en supprimant (ρ, A, B, ζ) si $A = B+1$).

Lemme 4.3.1 *Sous les hypothèses faites, deux cas sont possibles. Soit π appartient aussi au paquet associé à ψ', soit il existe π'' dans le paquet associé à ψ'' tel que l'on ait une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle \times \pi'.$$

On fixe un ordre sur Jord(ψ) pour pouvoir définir π; on impose à l'ordre de vérifier

$$(\rho, A', B', \zeta') <_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta) \quad \text{si soit } \zeta' = -\zeta \text{ soit } B' \leq B.$$

Avec l'hypothèse faite, on a donc $(\rho, A', B', \zeta') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta)$ exactement quand $\zeta' = \zeta$ et $B' \geq A$. Avec ce choix d'ordre, on fixe $\psi_{\gg}$ dominant tous les éléments de Jord(ψ) supérieur ou égaux à (ρ, A, B, ζ) et on note $\pi_{\gg}$ la représentation dans le paquet associé à $\psi_{\gg}$ permettant de définir π par module de Jacquet comme expliqué en 2.8. On associe $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ les paramètres de π et le premier cas se produit exactement quand $\underline{t}(\rho, A, B, \zeta) = 0$. En effet, supposons que $\underline{t}(\rho, A, B, \zeta) = 0$; alors par définition $\pi_{\gg}$ appartient au paquet associé au morphisme $\psi'_{\gg}$ qui se déduit de ψ' en remplaçant $(\rho, A+T, B+T, \zeta)$ (où T est un entier grand) par $\bigcup_{C \in [B+T, A+T]} (\rho, C, C, \zeta)$. Les modules de Jacquet qui permettent de passer de $\psi_{\gg}$ à ψ sont les mêmes que ceux qui permettent de passer de $\psi'_{\gg}$ à ψ' car

$$\circ_{j \in [1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T-j+1), \dots, \zeta(A+T-j+1)} = \circ_{C \in [A,B]} \circ_{j \in [1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(C+T-j+1)}.$$

On suppose maintenant que $\underline{t}(\rho, A, B, \zeta) \geq 1$. On note $\psi''_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, A+T, B+T, \zeta)$ par $(\rho, A+T-1, B+T+1, \zeta)$ et on sait qu'il existe $\pi''_{\gg}$ une représentation dans le paquet associé à $\psi''_{\gg}$ avec une inclusion:

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B+T)}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta(A+T)}\rangle \times \pi''_{\gg}.$$

On sait que $\mathrm{Jac}_{\zeta x} \pi''_{\gg} = 0$ pour tout $x \in [B+1, B+T]$ car $(\rho, A', B', \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi''_{\gg})$ entraîne soit $B' \leq B$ soit $B' = B+T+1$ soit $B' \gg B+T$; les formules standard donne donc l'inclusion

$$\circ_{j \in [1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T-j+1)} \pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta(A+T)}\rangle \times \pi''_{\gg}.$$

Ensuite on applique $\circ_{j \in [1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T+1-j+1), \dots, \zeta(A+T-1-j+1)}$ aux deux membres de l'inclusion ci-dessus et sur le membre de droite, ce module de Jacquet ne peut que s'appliquer à $\pi''_{\gg}$; le résultat est une représentation $\pi''_{>}$ dans le paquet associé au morphisme $\psi''_{>}$ qui se déduit de $\psi''_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, A+T-1, B+T+1, \zeta)$ par $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$ et cette représentation est irréductible. De plus elle vérifie

$\mathrm{Jac}_{\zeta x}\,\pi''_{>} = 0$ pour tout $x \in [A+1, A+T]$ car tout élément (ρ, A', B', ζ) de $\mathrm{Jord}(\psi''_{>})$ vérifie soit $B' \leq B+1$ soit $B' \gg A+T$. Il reste à appliquer $\mathrm{Jac}_{\zeta(A+T),\dots,\zeta(A+1)}$ qui sur le membre de droite n'affecte pas $\pi''_{>}$. On obtient donc

$$\circ_{j\in[1,T]}\,\mathrm{Jac}_{\zeta(B+T-j+1),\dots,\zeta(A+T-j+1)}\,\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle \times \pi''_{>}.$$

Puis ensuite on redescend à π en appliquand des $\mathrm{Jac}_{\zeta x}$ pour x parcourant un ensemble d'éléments tous strictement plus grand que A (on a utilisé ici l'hypothèse); quand on applique ces modules de Jacquet au membre de droite de l'inclusion ci-dessus, ils ne s'appliquent qu'à $\pi''_{>}$ pour donner une représentation π'' ayant les propriétés de l'énoncé.

4.4 Réduction dans le cas de 2 blocs élémentaires consécutifs

Ici on suppose que $\mathrm{Jord}(\psi)$ contient 2 éléments de la forme $(\rho, A = B, \zeta), (\rho, A' = B', \zeta)$ avec $B' > B$, tels que pour tout $(\rho, A'', B'', \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, on ait soit $B'' > B'$ soit $B'' \leq B$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant ces 2 blocs.

Lemme 4.4.1 *Avec les hypothèses ci-dessus, deux cas sont possibles; soit* $\mathrm{Jac}_{\zeta B',\dots,\zeta(B+1)}\,\pi = 0$ *soit il existe une représentation irréductible* π' *dans le paquet associé à* ψ' *et une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \pi'.$$

Dans la preuve on interprète cette dichotomie en termes de paramètres et ceci est important: on met un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que $(\rho, A'', B'', \zeta'') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A', B', \zeta)$ exactement quand $\zeta'' = \zeta$ et $B'' > B'$ et $(\rho, A'', B'', \zeta'') <_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta)$ soit si $\zeta'' = -\zeta$ soit si $B'' \leq B$. Cela épuise tous les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ d'après l'hypothèse. On peut alors associer à ψ ses paramètres $\underline{t}, \underline{\eta}$.

On va montrer que le premier cas, $\mathrm{Jac}_{\zeta B',\dots,\zeta(B+1)}\,\pi = 0$, se produit exactement quand $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = -\underline{\eta}(\rho, A', B', \zeta)$.

On fixe un morphisme $\psi_{\gg}$ qui domine tous les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ supérieurs ou égaux à (ρ, A, B, ζ). On pose $\pi_{\gg} := \pi(\psi_{\gg}, \underline{t}, \underline{\eta})$. Par définition, on sait que π s'obtient à partir de $\pi_{\gg}$ en prenant des modules de Jacquet de la forme suivante:

$$\pi = \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}}\,\mathrm{Jac}_{\zeta(B'+T'),\dots,\zeta(B'+1)}\,\mathrm{Jac}_{\zeta(B+T),\dots,\zeta(B+1)}\,\pi_{\gg}, \tag{4.4.1}$$

où $\mathcal{E}$ est un ensemble totalement ordonné et où pour tout $x \in \mathcal{E}, x > B'+1$ et où T et T' sont des entiers "grands" avec $T' \gg T$. Quand on calcule $\mathrm{Jac}_{\zeta B',\dots,\zeta(B+1)}\,\pi$, on peut faire commuter cette opération avec $\mathrm{Jac}_{x\in\mathcal{E}}$ (sur le terme de droite) à cause de l'hypothèse $x > B'+1$. Ainsi

$$\mathrm{Jac}_{\zeta B',\dots,\zeta(B+1)}\,\pi \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Jac}_{\zeta B',\dots,\zeta(B+1)}\,\mathrm{Jac}_{\zeta(B'+T'),\dots,\zeta(B'+1)}\,\mathrm{Jac}_{\zeta(B+T),\dots,\zeta(B+1)}\,\pi_{\gg} \neq 0.$$

Le terme de droite s'écrit aussi $\mathrm{Jac}_{\zeta(B'+T'),\dots,\zeta(B+1)}\,\mathrm{Jac}_{\zeta(B+T),\dots,\zeta(B+1)}\,\pi_{\gg}$. La réciprocité de Frobenius donne donc l'existence d'une représentation σ et d'une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \rho|\cdot|^{\zeta(B+T)} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta(B+1)} \times \rho|\cdot|^{\zeta(B'+T')} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta(B+1)} \times \sigma.$$

On sait que $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\, \pi_{\gg} = 0$ pour tout $x \in \left]B'+T', B+T\right[\cup]B+T, B+1[$ et que $\mathrm{Jac}_{\zeta(B+T),\zeta(B+T)}\, \pi_{\gg} = 0$. Ceci montre que l'inclusion ci-dessus se factorise par l'unique sous-module irréductible de l'induite (pour un GL convenable) $\rho|\cdot|^{\zeta(B+T)} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta(B+1)} \times \rho|\cdot|^{\zeta(B'+T')} \times \cdots \times \rho|\cdot|^{\zeta(B+1)}$; d'où une inclusion:

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B+T)}, \dots, \rho|\cdot|^{(B+1)}\rangle \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B'+T')}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(B+1)}\rangle \times \sigma.$$

Par irréductibilité, on peut échanger les 2 premières représentations et on obtient donc, *a fortiori*, $\mathrm{Jac}_{\zeta(B'+T'),\dots,\zeta(B+T+1)}\, \pi_{\gg} \neq 0$. Par définition, ceci est équivalent à $\underline{\eta}(\rho, A', B', \zeta) = \underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta)$. Supposons donc que l'on ait cette égalité et on note $\psi'_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en enlevant les blocs $(\rho, A+T, B+T, \zeta)$, $(\rho, A'+T', B'+T', \zeta)$. On sait qu'il existe une représentation $\pi'_{\gg}$ dans le paquet associé à $\psi'_{\gg}$ et une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B'+T')}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta(B+T)}\rangle \times \pi'_{\gg}.$$

Pour calculer π, on revient à (1) ci-dessus et on commence par calculer $\mathrm{Jac}_{\zeta(B+T),\dots,\zeta(B+1)}\, \pi_{\gg}$. Comme $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\, \pi'_{\gg} = 0$ pour tout $x \in [B+T, B+1]$ puisque $\mathrm{Jord}(\psi'_{\gg})$ ne contient aucun élément de la forme $(\rho, \tilde{A}, x, \zeta)$ pour ces valeurs de x, on obtient:

$$\mathrm{Jac}_{\zeta(B+T),\dots,\zeta(B+1)}\, \pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B'+T')}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \pi'_{\gg}.$$

De même on obtient

$$\mathrm{Jac}_{\zeta(B'+T'),\dots,\zeta(B'+1)}\, \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T),\dots,\zeta(B+1)}\, \pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \pi'_{\gg}.$$

Ensuite on doit encore appliquer $\mathrm{Jac}_{\zeta x \in \mathcal{E}}$ avec $x > B'+1$; on obtient donc

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}}\, \pi'_{\gg}.$$

Or par définition, $\pi' := \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}}\, \pi'_{\gg}$ est dans le paquet associé à ψ' et on a donc démontré l'alternative du lemme.

4.5 Conséquence sur l'holomorphie des opérateurs d'entrelacements

On fixe encore a_0 un entier et s_0 un réel strictement positif et on définit b_0 par $s_0 = (b_0 - 1)/2$. On note ζ_0 le signe de $a_0 - b_0$ si ce nombre est non nul et on pose $\zeta_0 = +$ sinon.

4.5.1 Le cas de 4.4

Ici on suppose que les hypothèses de section 4.4 (dont on adopte les notations) sont satisfaites; on suppose de plus que $\zeta = -\zeta_0$. Et on suppose que $\mathrm{Jac}_{\zeta B',\dots,\zeta(B+1)}\, \pi \neq 0$. D'où l'existence de π':

Lemme 4.5.1 *L'opérateur $N_\psi(s,\pi)$ est holomorphe en $s = s_0$ si l'opérateur $N_{\psi'}(s,\pi')$ est holomorphe en $s = s_0$.*

On décompose évidemment l'opérateur d'entrelacement en produit:

$$\mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^s \times \pi \hookrightarrow \mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^s \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \pi'$$

$$\text{(i)} \qquad \to \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^s \times \pi'$$

$$\text{(ii)} \qquad \to \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^{-s} \times \pi'$$

$$\text{(iii)} \qquad \to \mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^{-s} \times \langle \rho|\cdot|^{\zeta B'},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle \times \pi'.$$

Supposons d'abord que $\zeta_0 = -$; alors $\zeta = +$ et (ρ,A,B,ζ) est de la forme $(\rho,a,1)$ tandis que (ρ,A',B',ζ) et de la forme $(\rho,a',1)$ avec $a' > a$. La représentation $\langle \rho|\cdot|^{\zeta B'},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle$ est une représentation de Steinberg tordue, $\mathrm{St}\big(\rho,(a+a')/2\big)\,|\cdot|^{(a'-a)/4}$. En s_0 l'ordre de $r(s,\psi)$ est le même que celui de $r(s,\psi')$ d'après 3.3. L'opérateur d'entrelacement standard (iii) est holomorphe par positivité stricte, d'après Harish-Chandra; l'opérateur d'entrelacement normalisé (i) est holomorphe en s_0 d'après par exemple [21, 1.6.3] parce que $-(a_0-1)/2+s_0 = (b_0-a_0)/2 > 0 \geq -\zeta B = -B$. Le facteur de normalisation est

$$\frac{L\Big(\mathrm{St}(\rho,a_0)\times \mathrm{St}\big(\rho,(a+a')/2\big),s_0-(a'-a)/4\Big)}{L\Big(\mathrm{St}(\rho,a_0)\times \mathrm{St}\big(\rho,(a+a')/2\big),s_0-(a'-a)/4+1\Big)}$$
$$= \frac{L\Big(\rho\times\rho,\big|(a_0-1)/2-\big((a+a')/2-1\big)/2\big|+s_0-(a'-a)/4\Big)}{L\Big(\rho\times\rho,\big(a_0+(a+a')/2\big)/2+s_0-(a'-a)/4\Big)}.$$

L'ordre de ce facteur de normalisation en $s = s_0$ est l'ordre du numérateur; or ce numérateur n'a pas de zéro en $s = s_0$ et à un pôle d'ordre 1 quand

$$\sup\Big((a_0-1)/2-\big((a+a')/2-1\big)/2-(a'-a)/4;$$
$$-(a_0-1)/2+\big((a+a')/2-1\big)/2-(a'-a)/4\Big)+s_0 = 0.$$

Ou encore,

$$\sup\big((a_0-1)/2-(a'-1)/2;-(a_0-1)/2+(a-1)/2\big)+s_0$$
$$= \sup\big((a_0-a')/2;(a-a_0)/2\big)+s_0 = 0.$$

Or $(a-a_0)/2+(b_0-1)/2 = (a-1)/2+(b_0-a_0)/2$. Or on a supposé que $b_0 > a_0$ et la nullité ne peut donc être obtenue. Ainsi l'holomorphie de $N(s,\pi)$ en $s = s_0$ résulte de la même propriété pour $N(s,\pi')$.

On suppose maintenant que $\zeta_0 = +$ d'où $\zeta = -$. Ici, (ρ,A,B,ζ) est de la forme $(\rho,1,b)$ et (ρ,A',B',ζ) est de la forme $(\rho,1,b')$. Et la représentation

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

$\langle\rho|\cdot|^{\zeta B'},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta B}\rangle$ est le module de Speh $\langle\rho|\cdot|^{-(b'-1)/2},\dots,\rho|\cdot|^{(b-1)/2}\rangle$. Les opérateurs d'entrelacements normalisés (i) et (iii) sont holomorphes d'après [21, 1.6.3]. Il faut donc comparer les normalisations.

Le facteur de normalisation pour l'entrelacement (i) est

$$L\big(\mathrm{St}(\rho,a_0)\times\rho,s_0-(b-1)/2\big)\,/\,L\big(\mathrm{St}(\rho,a_0)\times\rho,s_0+(b'+1)/2\big)$$

et celui pour (ii) vaut

$$L\big(\mathrm{St}(\rho,a_0)\times\rho,-(b'-1)/2+s_0\big)\,/\,L\big(\mathrm{St}(\rho,a_0)\times\rho,(b-1)/2+s_0\big).$$

Or $r(s,\psi)$ est exactement le produit de ces 2 facteurs avec $r(s,\psi')$. Ainsi l'holomorphie pour $N(s,\pi)$ en $s=s_0$ résulte de l'holomorphie pour $N(s,\pi')$ en $s=s_0$.

4.5.2 Le cas de 4.3

Ici on suppose que les hypothèses de 4.3 (dont on adopte les notations) sont satisfaites. On a donc défini ψ' et ψ'' et on a montré que soit π est dans le paquet associé à ψ' soit il existe une représentation π'' dans le paquet associé à ψ'' avec une inclusion

$$\pi\hookrightarrow\langle\rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle\times\pi''. \tag{4.5.1}$$

On suppose encore que $\zeta=-\zeta_0$.

Lemme 4.5.2

(i) *Si π est dans le paquet associé à ψ', l'holomorphie de $N_\psi(s,\pi)$ en $s=s_0$ résulte de l'holomorphie de $N_{\psi'}(s,\pi)$.*

(ii) *On suppose que l'inclusion* (i) *est satisfaite pour un bon choix de π''; l'holomorphie de $N_\psi(s,\pi)$ en $s=s_0$ résulte de l'holomorphie de $N_{\psi''}(s,\pi'')$ en $s=s_0$.*

Pour prouver (i), il suffit de vérifier que $r(s,\psi')/r(s,\psi)$ est holomorphe en $s=s_0$. Or on passe de ψ à ψ' en remplaçant (ρ,A,B,ζ) par $\bigcup_{C\in[B,A]}(\rho,C,C,\zeta)$. On revient à 3.3; on suppose que $\zeta_0=+$, par hypothèse $\zeta=-$ et la contribution des éléments (ρ,C,C,ζ) aux pôles de $r(s,\psi')$ en $s=s_0$ ne peut que donner un pôle d'ordre 1 et ceci se produit exactement si $A_0\in[B,A]$; dans ce cas, (ρ,A,B,ζ) fournit aussi un pôle d'ordre 1 à $r(s,\psi)$ en $s=s_0$. On suppose maintenant que $\zeta_0=-$ et on a donc $\zeta=+$ par hypothèse. Ici les éléments (ρ,C,C,ζ) ne contribue pas aux pôles de $r(s,\psi')$ en $s=s_0$. D'où (i).

La preuve de (ii) est analogue à celle du paragraphe précédent. On commence par regarder le cas où $\zeta_0=-$ d'où $\zeta_0=+$; ici l'opérateur d'entrelacement standard:

(4.5.2)
$$\mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^s\times\langle\rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle\to\langle\rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle\times\mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^s,$$

est holomorphe en $s=s_0$ par positivité stricte. On obtient l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement standard

(4.5.3)
$$\langle\rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle\times\mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^{-s}\to\mathrm{St}(\rho,a_0)|\cdot|^s\times\langle\rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle$$

par [21, 1.6.3] et le résultat est alors clair car $r(s,\psi'')/r(s,\psi)$ est d'ordre exactement 0 en $s = s_0$ d'après 3.3. On suppose maintenant que $\zeta_0 = +$ et $\zeta = -$, les opérateurs d'entrelacement normalisés à la Shahidi (ii) et (iii) sont holomorphes en $s = s_0$ d'après [21] et les produits de leur facteur de normalisation avec $r(s,\psi'')$ est exactement $r(s,\psi)$, c'est le calcul fait précédemment.

4.6 Réduction dans le cas d'un bloc non isolé

4.6.1 Une propriété des modules de Jacquet

On suppose ici que $\mathrm{Jord}(\psi)$ contient un élément (ρ, A, B, ζ) tel que $B > 1/2$ et pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ (différent de (ρ, A, B, ζ)) vérifiant $\zeta' = \zeta$, $B' \geq B$ et $A' \geq A$, on a $B' > A$; en d'autres termes $\mathrm{Jord}(\psi)$ ne contient pas d'éléments (ρ, A', B', ζ') avec $\zeta' = \zeta$, $B' \in [B, A]$ et $A' \geq A$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-1, B-1, \zeta)$.

Lemme 4.6.1 *On suppose aussi que* $\mathrm{Jac}_{\zeta B,\dots,\zeta A}\,\pi \neq 0$*. Alors il existe* π' *dans le paquet associé à* ψ' *et une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A}\rangle \times \pi'.$$

On fixe un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que $(\rho, A', B', \zeta') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta)$ exactement quand $B' > A$; par hypothèse si $(\rho, A', B', \zeta') <_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta)$ on a soit $\zeta' = -\zeta$ soit $B' < B$ soit $A' < A$. Ainsi l'ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ induit un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi')$ qui a encore les bonnes propriétés. On choisit $\psi_{\gg}$ dominant tous les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ supérieurs strictement à (ρ, A, B, ζ). On note $\psi'_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant simplement (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-1, B-1, \zeta)$ et d'après ce que l'on vient de voir $\psi'_{\gg}$ domine tous les blocs de Jordan de ψ' strictement supérieurs à $(\rho, A-1, B-1, \zeta)$. On note $\pi_{\gg}$ la représentation du paquet associé à $\psi_{\gg}$ servant à définir π. On vérifie comme dans la preuve de section 4.4 que $\mathrm{Jac}_{\zeta B,\dots,\zeta A}\,\pi \neq 0$, entraîne que $\mathrm{Jac}_{\zeta B,\dots,\zeta A}\,\pi_{\gg} \neq 0$. On note $\pi'_{\gg}$ cette représentation dont on sait qu'elle est irréductible et dans le paquet associé à $\psi'_{\gg}$. On en déduit l'inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A}\rangle \times \pi'_{\gg}.$$

Ensuite on applique les modules de Jacquet qui calcule π en fonction de $\pi_{\gg}$; on les note $\mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}}\,\pi_{\gg} = \pi$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble convenable totalement ordonné. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a $x > A$ et on a donc

$$\pi = \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}}\,\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta A}\rangle \times \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}}\,\pi'_{\gg}.$$

On pose $\pi' := \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}}\,\pi'_{\gg}$; on sait que π' est non nulle et c'est donc une représentation irréductible dans le paquet associé à ψ'.

4.6.2 Réduction de l'amplitude dans le cas non isolé

Ici, on suppose que $\mathrm{Jord}(\psi)$ contient un élément (ρ, A, B, ζ) avec $A > B$ et que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ tel que $\zeta' = \zeta$ et $B' \in\,]B, A[$, on a $A' = B'$. On note

ℓ le cardinal des éléments $(\rho, A', B', \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ avec $B' \in]B, A[$ et on les note $(\rho, A_i = B_i, \zeta)$ pour $i \in [1, \ell]$ avec $B_1 < \cdots < B_\ell$. On note ψ'_ℓ le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant les blocs $(\rho, A_\ell = B_\ell, \zeta)$ et (ρ, A, B, ζ) par (ρ, A, A, ζ) et $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$; on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant simplement (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$ et on note ψ_0 le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant tous le blocs $(\rho, A_i = B_i, \zeta)$ pour $i \in [1, \ell]$ et en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $\bigcup_{C \in [B, A-\ell]} (\rho, C, C, \zeta)$. On suppose que l'on est pas dans le cas de 4.3 et on a donc certainement $A > B + 1$.

Lemme 4.6.2 *Sous les hypothèses ci-dessus, 3 cas sont possibles:*

(i) *soit il existe π'_ℓ dans le paquet associé à ψ'_ℓ et une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta B_\ell} \rangle \times \pi'_\ell;$$

(ii) *soit il existe π' dans le paquet associé à ψ' et une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta A} \rangle \times \pi';$$

(iii) *soit finalement il existe π'_0 dans le paquet associé à ψ'_0 et une inclusion*

$$\pi \hookrightarrow \times_{i \in [1,\ell]} \langle \rho|\cdot|^{\zeta B_i}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta(A-i+1)} \rangle \times \pi'_0.$$

On fixe un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta)$ on a soit $\zeta' = \zeta, B' > B$ soit $\zeta' = -\zeta$. Ainsi un élément (ρ, A', B', ζ') est plus grand que (ρ, A, B, ζ) soit s'il est l'un des $(\rho, A_i = B_i, \zeta)$ pour $i \in [1, \ell]$ soit si $\zeta' = \zeta$ et $B' > A$. On fixe un morphisme $\psi_\gg$ qui domine tous les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ strictement supérieurs à (ρ, A, B, ζ) et une représentation $\pi_\gg$ qui permet de calculer π. On applique à $\pi_\gg$ le lemme de 4.3 puisque les hypothèses sont satisfaites. On distingue donc suivant les deux cas de ce lemme.

On note $\psi'_\gg$ le morphisme qui se déduit de $\psi_\gg$ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$. On suppose d'abord qu'il existe une représentation $\pi'_\gg$ dans le paquet associé à $\psi'_\gg$ et une inclusion

$$\pi_\gg \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta A} \rangle \times \pi'_\gg. \tag{4.6.1}$$

Ainsi π est de la forme $\mathrm{Jac}_{-\zeta y; y \in \mathcal{F}} \mathrm{Jac}_{\zeta x; x \in \mathcal{E}} \circ_{i \in [\ell, 1]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i), \dots, \zeta(B_i+1)} \pi_\gg$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble totalement ordonné convenable de demi-entiers strictement supérieur à A, tandis que $\mathcal{F}$ est un ensemble totalement ordonné de demi-entiers strictement positifs et où les $0 \ll T_1 \ll \cdots \ll T_\ell$ sont déterminés par $\psi_\gg$. On applique ces modules de Jacquet au membre de droite de (1) ce qui donne (malheureusement) plusieurs termes. L'un des termes consiste à appliquer le module de Jacquet à $\pi'_\gg$ et on obtient alors l'induite

$$\langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta A} \rangle \times \pi',$$

où π' est une représentation dans le paquet associé à ψ'. Si l'inclusion (1) donne une inclusion de π dans cette induite, on est dans le 2e cas de l'énoncé. Sinon, on remarque d'abord le point suivant; soit $i \in [1, \ell]$ et soit $x \in [B_i + 1, A[$ alors

$$\mathrm{Jac}_{\zeta x} \mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i), \dots, \zeta(A+1)} \circ_{j \in]i,1]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B_j+T_j), \dots, \zeta(B_j+1)} \pi'_\gg = 0;$$

en effet on peut échanger $\mathrm{Jac}_{\zeta x}$ et $\mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i),\dots,\zeta(A+1)}$ car $A+1-x>1$; de plus

$$\pi_{i,\gg} := \mathrm{Jac}_{\zeta(B_j+T_j),\dots,\zeta(B_j+1)}\,\pi'_{\gg}$$

se trouve dans le paquet associé au morphisme $\psi'_{i,\gg}$ qui se déduit de $\psi'_{\gg}$ en remplaçant les $(\rho, B_j+T_j, B_j+T_j, \zeta)$ par (ρ, B_j, B_j, ζ) pour tout $j \in\,]i,1]$. Ainsi $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\,\pi_{i,\gg}=0$ parce qu'il n'existe pas $(\rho,\tilde{A},\tilde{B},\zeta)$ dans $\mathrm{Jord}(\psi'_{i,\gg})$ avec $\tilde{B}=x$, un tel élément devrait déjà être dans $\mathrm{Jord}(\psi)$ et ceci a été exclu puisque $x\in\,]B_i,A[$. Donc si l'on n'est pas dans le 2e cas de l'énoncé, il existe $i\in[1,\ell]$ tel que l'inclusion (1) donne une inclusion (on oublie $\mathcal{F}$ qui ne joue pas de rôle ici)

$$\pi \hookrightarrow \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}} \circ_{j\in[\ell,i+1]} \cdot \mathrm{Jac}_{\zeta(B_j+T_j),\dots,\zeta(B_j+1)}\big(\langle \rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta(B_i)}\rangle \times \mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i),\dots,\zeta(A+1)}\,\pi'_{i,\gg}\big),$$

avec la notation $\pi'_{i,\gg}$ déjà introduite. On veut maintenant démontrer que nécessairement $i=\ell$. D'abord, on remarque que le terme de droite est l'induite:

$$\langle \rho|\cdot|^{\zeta B},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta(B_i)}\rangle \times \mathrm{Jac}_{\zeta x; x\in\mathcal{E}} \circ_{j\in[\ell,i+1]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B_j+T_j),\dots,\zeta(B_j+1)}\,\mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i),\dots,\zeta(A+1)}\,\pi'_{i,\gg}.$$

On remarque maintenant que la non nullité du terme de droite entraîne une inclusion

$$\pi'_{i,\gg} \hookrightarrow \rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)} \times\cdots\times \rho|\cdot|^{\zeta(A+1)} \times \rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+T_{i+1})} \times\cdots\times \rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+1)} \times \sigma,$$

où σ est une représentation convenable. Cette inclusion se factorise par un sous-quotient,

$$\tau \times \rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+T_{i+1})} \times\cdots\times \rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+1)} \times \sigma$$

de l'induite écrite où τ est un sous-quotient de $\rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)}\times\cdots\times\rho|\cdot|^{\zeta(A+1)}$. Mais avec 2.7, τ vérifie nécessairement $\mathrm{Jac}_x\,\tau=0$ pour $x\in\,]\zeta(B_{i+1}+T_i),\zeta(A+1)]$ et nécessairement

$$\tau \simeq \langle \rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)},\dots,\rho|\cdot|^{\zeta(A+1)}\rangle.$$

Il existe aussi un sous-quotient τ' de l'induite, pour le GL convenable,

$$\rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+T_{i+1})} \times\cdots\times \rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+1)}$$

tel que $\pi'_{i,\gg}$ est un sous-module irréductible de l'induite

$$\langle \rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)},\dots,\rho|\cdot|^{\zeta(A+1)}\rangle \times \tau' \times \sigma.$$

Soit x tel que $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\,\tau'\neq 0$; nécessairement $x\in[B_{i+1}+T_{i+1}, B_{i+1}+1]$; si $x\neq B_i+T_i+1, A$ on a aussi $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\,\pi'_{i,\gg}=0$ et nécessairement avec 2.7, $x=B_{i+1}+T_{i+1}$ ou $x=B_i+T_i$; on élimine ce dernier cas car alors $\mathrm{Jac}_{x,x}\,\pi'_{i,\gg}=0$. Avec la référence donné, on a aussi $\mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i),\zeta(B_i+T_i+1)}\,\pi'_{i,\gg}=0$ ce qui exclu aussi la possibilité $x=B_i+T_i+1$

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

et la même référence exclut aussi $\mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i),\dots,\zeta(A+1),\zeta A}\,\pi'_{i,\gg}=0$ et donc $x=A$. Ainsi τ' est l'unique sous-module irréductible de l'induite écrite et on a une inclusion:

$$\pi'_{i,\gg}\hookrightarrow\langle\rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)},\dots,\rho|\cdot|^{\zeta(A+1)}\rangle\times\langle\rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+T_{i+1})},\dots,\rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+1)}\rangle\times\sigma.$$

Dans le GL convenable l'induite

$$\langle\rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)},\dots,\rho|\cdot|^{\zeta(A+1)}\rangle\times\langle\rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+T_{i+1})},\dots,\rho|\cdot|^{\zeta(B_{i+1}+1)}\rangle$$

est irréductible car les segments sont emboités; on peut donc échanger les 2 induites. D'où en particulier par réciprocité de Frobenius

$$\mathrm{Jac}_{\zeta(B_{i+1}+T_{i+1}),\dots,(B_i+T_i+1)}\,\pi'_{i,\gg}\neq 0.$$

Cela s'interprète avec section 4.4 en terme de paramètres et donne en particulier l'assertion analogue pour π à savoir $\mathrm{Jac}_{\zeta B_{i+1},\dots,\zeta(B_i+1)}\,\pi\neq 0$. Ceci a été exclu par hypothèse et on a donc $i=\ell$. On est donc dans le 1e cas de l'énoncé. Ainsi il nous reste à voir le 1e cas de 4.3.

On suppose donc maintenant que $\pi_{\gg}$ est aussi dans le paquet associé au morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant (ρ,A,B,ζ) par $\bigcup_{C\in[B,A]}(\rho,C,C,\zeta)$; on note $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ les paramètres pour ce morphisme permettant de définir π. Puisque π est non nul, il faut certainement $\mathrm{Jac}_{\zeta(B_1+T_1),\dots,\zeta(A+1)}\,\pi_{\gg}\neq 0$. On applique alors section 4.4 et on sait que le paramètres $\underline{\eta}$ prend la même valeur sur (ρ,A,A,ζ) et $(\rho,B_1+T_1,B_1+T_1,\zeta)$. On sait aussi que $\underline{\eta}$ alterne sur les blocs $(\rho,B_i+T_i,B_i+T_i,\zeta)$ pour $i\in[1,\ell]$ et sur les blocs (ρ,C,C,ζ) pour $C\in[B,A]$. On note $\psi'_{0,\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en enlevant tous les blocs $(\rho,B_i+T_i,B_i+T_i,\zeta)$ pour $i\in[1,\ell]$ et les blocs (ρ,C,C,ζ) pour $C\in[A,A-\ell+1]$ (on est sûr que $\ell<A-B$ par définition). On peut donc appliquer 4.4 ℓ fois et obtenir l'existence d'une représentation irréductible dans le paquet associé à $\psi'_{0,\gg}$ avec une inclusion

$$\pi_{\gg}\hookrightarrow\times_{i\in[1,\ell]}\langle\rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta(A-i+1)}\rangle\times\pi'_{0,\gg}. \tag{4.6.2}$$

Comme dans ce qui suit (1), on a

$$\pi=\mathrm{Jac}_{\zeta x;x\in\mathcal{E}}\circ_{i\in[\ell,1]}\mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i),\dots,\zeta(B_i+1)}\,\pi_{\gg}.$$

On applique ce module de Jacquet au membre de droite de (2). Calculons d'abord $\mathrm{Jac}_{\zeta(B_1+T_1),\dots,\zeta(B_1+1)}$ du membre de droite. Pour tout $x\in[B_1+1,B_1+T_1]$, $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\,\pi'_{0,\gg}=0$. On montre par récurrence descendante sur x que

$$\mathrm{Jac}_{\zeta(B_1+T_1),\dots,\zeta x}\,\pi_{\gg}\hookrightarrow$$
$$\langle\rho|\cdot|^{\zeta(x-1)},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle\times_{i\in]1,\ell]}\langle\rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta(A-i+1)}\rangle\times\pi'_{0,\gg}.$$

S'il n'en est pas ainsi, on aurait une inclusion pour une représentation τ convenable

$$\mathrm{Jac}_{\zeta(B_1+T_1),\dots,\zeta x}\,\pi_{\gg}\hookrightarrow\langle\rho|\cdot|^{\zeta x},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta(A-1)}\rangle\times\tau.$$

Ceci entraîne $\mathrm{Jac}_{\zeta(B_1+T_1),\dots,\zeta x,\zeta x}\,\pi_{\gg} \neq 0$ et encore $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\,\pi_{0,\gg} \neq 0$ ce qui est impossible si $x \in\,]B_1, B_1+T_1[$ et $\mathrm{Jac}_{\zeta x,\zeta x}\,\pi_{0,\gg} \neq 0$ si $x = B_1 + T_1$, ce qui est aussi impossible. Donc finalement on trouve une inclusion

$$\begin{aligned}\mathrm{Jac}_{\zeta(B_1+T_1),\dots,\zeta(B_1+1)}\,\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle\rho|\cdot|^{\zeta B_1},\dots,\rho|\cdot|^{-\zeta A}\rangle \\ \times_{i\in]1,\ell]}\,\langle\rho|\cdot|^{\zeta(B_i+T_i)},\dots,\rho|\cdot|^{\zeta(A-i+1)}\rangle \times \pi'_{0,\gg}.\end{aligned}$$

Ensuite on continue pour $i \in\,]1,\ell]$ en utilisant les mêmes propriétés de nullité pour certains modules de Jacquet; ici on utilise le fait que le membre de gauche ci-dessus est une représentation irréductible dans le paquet associé au morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, B_1+T_1, B_1+T_1, \zeta)$ par (ρ, B_1, B_1, ζ). Et finalement on démontre que π satisfait au 3e cas du lemme.

4.6.3 Suppression d'un bloc dans le cas non isolé

On fixe B_0 un demi-entier positif ou nul et on note ℓ' le cardinal des $i \in [1,\ell]$ tel que $B_i \le B_0$ (éventuellement $\ell' = 0$).

On fait les hypothèses suivantes un peu différentes de celles de 4.6.2

- pour tout $i \in \big]1,\ell'\big] \cup \big]\ell'+1,\ell\big]$, $\mathrm{Jac}_{\zeta B_i,\dots,\zeta(B_{i-1}+1)}\,\pi = 0$
- pour tout $x \in\,]B, B_0]$, $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\,\pi = 0$.

Lemme 4.6.3 *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe*

(i) *un morphisme ψ' qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ,A,B,ζ) et $\bigcup_{i\in[1,\ell]}(\rho,B_i,B_i,\zeta)$ par des éléments de la forme (ρ,C,C,ζ) avec $C \in [B,A]$ et une représentation π' dans le paquet associé à ψ',*

(ii) *et deux ensembles de multisegments (dont l'un peut être vide) de la forme ci-dessous avec $t' \ge t'' \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ et des demi-entiers $B'_{i_{t'-t''}} < \cdots < B'_{i_1} \le A$ tous strictement supérieurs à $B+t'-1$ (si $t' = t''-1$ les dernières lignes n'apparaissent pas)*

$$\begin{array}{cccc} \zeta B & \cdots & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \zeta(B+t''-1) & \cdots & \cdots & -\zeta(A-t''+1) \\ \zeta(B+t'') & \cdots & -\zeta B'_{i_1} & \\ \vdots & \cdots & & \\ \zeta(B+t'-1) & \cdots & -\zeta B'_{i_{t'-t''}} & \end{array}$$

et le 2e multisegment est l'union de v segments avec $v \in [0,\ell-\ell']$ de la forme $\zeta D_i,\dots,-\zeta F_i$ pour $i \in [1,v]$ avec $B_0 < D_1 < \cdots < D_v$ et $F_1 > \cdots > F_v > B_0$; on note σ_1 et σ_2 les représentations de GL *convenable associées par Zelevinsky à ces multisegments et à la cuspidale ρ tels que l'on ait $\pi \hookrightarrow \sigma_1 \times \sigma_2 \times \pi'$.*

On considère ici un ordre qui est tel que $(\rho, B_i, B_i, \zeta') <_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta)$ si $i \le \ell'$ (cette condition est vide si $\ell' = 0$) et $(\rho, B_i, B_i, \zeta) >_{\mathrm{Jord}(\psi)} (\rho, A, B, \zeta)$ si $i \in \big]\ell',\ell\big]$ (cette condition est vide si $\ell' = \ell$). On fixe un morphisme $\psi_{\gg}$ qui domine tous les

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

éléments de Jord(ψ) supérieurs ou égaux à (ρ, A, B, ζ). On considère les paramètres $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ et la représentation $\pi_{\gg}$ dans le paquet associé à $\psi_{\gg}$ qui permettent de définir π. On pose $t := \underline{t}(\rho, A, B, \zeta)$ et on pose $\psi_{t,\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, A+T, B+T, \zeta)$ par $\bigcup_{C\in[B+t,A-t}(\rho, C+T, C+T, \zeta)$. Par définition, il existe une représentation dans le paquet associé à $\psi_{t,\gg}$, notée $\pi'_{t,\gg}$ avec une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta(B+T) & \cdots & \cdots & -\zeta(A+T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(B+T+t-1) & \cdots & \cdots & -\zeta(A+T-t+1) \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi'_{t,\gg}. \tag{4.6.3}$$

On applique d'abord $\circ_{j\in[1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T-j+1),\ldots,\zeta(B+T+t-1-j+1)}$ à chacun des 2 membres de (i). Quand on applique ces modules de Jacquet au terme de droite, il y a plusieurs solution car *a priori* on peut avoir $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\, \pi'_{t,\gg} \neq 0$ pour une de ces valeurs de x. Toutefois si on n'utilise pas le début des lignes pour calculer ces modules de Jacquet, il existera $x_0 \leq B_\ell$ et $y_0 \in]B, B+t]$ avec $y_0 \leq x_0$ et

$$\mathrm{Jac}_{\zeta x_0,\ldots,\zeta y_0} \circ_{j\in[1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T-j+1),\ldots,\zeta(B+T+t-1-j+1)}\, \pi_{\gg} \neq 0.$$

Pour repasser de $\circ_{j\in[1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T-j+1),\ldots,\zeta(B+T+t-1-j+1)}\, \pi_{\gg}$ à π il faut encore appliquer des $\mathrm{Jac}_{\zeta x}$ convenable mais on est sûr qu'il restera $x'_0 \in [x_0, y_0]$ tel que $\mathrm{Jac}_{\zeta x'_0,\ldots,\zeta y_0}\, \pi \neq 0$. Ceci est contradictoire avec les hypothèses.

On note t' le plus grand entier strictement supérieur ou égal à t, s'il existe tel que $B+t' \leq B_{\ell'-t'+t+1}$ et $B+t' \leq A-t'$ (sinon on prend $t' = t-1$). Si $t' > t-1$, on applique encore $\circ_{j\in[1,T]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B+T+t-j+1)}$; pour ne pas avoir 0, il faut certainement que le paramètre $\underline{\eta}$ prenne la même valeur sur $(\rho, B+t+T, B+t+T, \zeta)$ et $(\rho, B_{\ell'}, B_{\ell'}, \zeta)$ (c'est l'argument que l'on a déjà vu dans la démonstration de 4.6.2). On note $\psi'_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, A+T, B+t, \zeta)$ par $\bigcup_{C\in]B+t',A-t]}(\rho, C+T, C+T, \zeta)$ et il faut qu'il existe une représentation $\pi'_{\gg}$ dans le paquet associé à $\psi'_{\gg}$ et une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta(B+T) & \cdots & \cdots & -\zeta(A+T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(B+T+t-1) & \cdots & \cdots & -\zeta(A+T-t+1) \\ \zeta(B+T+t) & \cdots & -\zeta B_{\ell'} & \\ \vdots & \vdots & & \\ \zeta(B+T+t') & \cdots & -\zeta B_{\ell'-t'+t} & \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi'_{\gg}. \tag{4.6.4}$$

On note $\psi'_{>}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, A+T, B+T, \zeta)$ par $\bigcup_{C\in]B+t',A-t]} (\rho, C, C, \zeta)$. Avec l'argument que l'on a déjà donné, on montre alors qu'il existe une représentation irréductible $\pi'_{>}$ dans le paquet associé à $\psi'_{>}$ et une inclusion

$$\text{(4.6.5)}\qquad \pi_{>} := \circ_{j\in[1,T]} \operatorname{Jac}_{\zeta(B+T-j+1),\dots,\zeta(A+T-j+1)} \pi_{\gg}$$

$$\hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & & -\zeta A \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \zeta(B+t-1) & \cdots & & -\zeta(A-t+1) \\ \zeta(B+t) & \cdots & -\zeta B_{\ell'} & \\ \vdots & \cdots & & \\ \zeta(B+t') & \cdots & -\zeta B_{\ell'-t'+t} & \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi'_{>}.$$

La démonstration se termine très rapidement si $A-t < B_{\ell'+1}$. On doit encore calculer $\circ_{i\in[\ell,\ell']} \circ_{j\in[1,T_i]} \operatorname{Jac}_{\zeta(B_i+T_i-j+1)}$ aux 2 membres de (3) et sur le membre de droite on ne peut l'appliquer qu'à $\pi'_{>}$. Finalement on obtient une inclusion

$$\text{(4.6.6)}\qquad \pi \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & & -\zeta A \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \zeta(B+t-1) & \cdots & & -\zeta(A-t+1) \\ \zeta(B+t) & \cdots & -\zeta B_{\ell'} & \\ \vdots & \cdots & & \\ \zeta(B+t') & \cdots & -\zeta B_{\ell'-t'+t} & \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi'$$

avec π' une représentation irréductible dans le paquet associé à un morphisme qui répond aux conditions du lemme.

On suppose donc que $A-t \geq B_{\ell'+1}$ et on note t'' le plus grand entier tel que $A-t'' \geq B+t'+1$ et $A-t'' > B_{\ell'+t''-t+1}$. On distingue encore suivant que le paramètre signe définissant $\pi'_{>}$ prend la même valeur sur $(\rho, A-t, A-t, \zeta)$ et sur $(\rho, B_{\ell'+1}+T_{\ell'+1}, B_{\ell'+1}+T_{\ell'+1}, \zeta)$ ou non. Dans le cas où ce paramètre prend la même valeur, on note $\psi''_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi'_{>}$ en enlevant les blocs (ρ, C, C, ζ) pour $C \in [A-t'', A-t]$ et les blocs $(\rho, B_{\ell'+i}+T_{\ell'+i}, B_{\ell'+i}+T_{\ell'+i}, \zeta)$ pour $i \in [1, t''-t+1]$ et il existe d'après 4.4 appliqué $t''-t+1$ fois, une représentation $\pi''_{\gg}$ dans le paquet associé à $\psi''_{\gg}$ avec une inclusion:

$$\begin{aligned} \pi'_{>} \hookrightarrow {} & \langle \zeta(B_{\ell'+t''-t+1}+T_{\ell'+t''-t+1}), \dots, -\zeta(A-t'')\rangle_{\rho} \\ & \times \cdots \times \langle \zeta(B_{\ell'+1}+T_{\ell'+1}), \dots, -\zeta(A-t)\rangle_{\rho} \times \pi''_{\gg}. \end{aligned}$$

Mais on sait aussi que le signe alterne sur chacun des blocs $(\rho, B_{\ell'+i}+T_{\ell'+i}, B_{\ell'+i}+T_{\ell'+i}, \zeta)$ pour $i \in [1, t''-t+1]$ (cela fait partie des hypothèses) et on en déduit que cette inclusion se factorise par l'unique sous-module c'est-à-dire:

$$\text{(4.6.7)}\qquad \pi'_{>} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta(B_{\ell'+t''-t+1}+T_{\ell'+t''-t+1}) & \cdots & -\zeta(A-t'') \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(B_{\ell'+1}+T_{\ell'+1}) & \cdots & -\zeta(A-t) \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi''_{\gg};$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

En mettant ensemble (3) et (5) on obtient une inclusion de $\pi_>$ dans une certaine induite de la forme $\tilde\sigma_1 \times \tilde\sigma_2 \times \pi''_{\gg}$. On applique $\circ_{i\in[t''-t+1,1]} \circ_{j\in[1,T_{\ell'+i}]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B_{\ell'+i}+T_{\ell'+i}-j+1)}$ à $\pi_>$ c'est-à-dire une succession de $\mathrm{Jac}_{\zeta x}$ avec $x > B_0 + 1$. On l'applique au membre de droite de l'inclusion obtenue; cette opération laisse certainement inchangé $\pi''_{\gg}$ et modifie les débuts de lignes de la matrice de (5) et/ou les fins de lignes des matrices de (3) et (5), en gardant, dans tous les cas, la liaison des segments à l'intérieur de chaque matrice. Mais on remarque que le nouveau début de ligne ou la nouvelle fin de colonne est certainement supérieure strictement à B_0. Ensuite il y a encore à appliquer $\circ_{i\in[\ell,\ell'+t''-t+1]} \circ_{j\in[1,T_i]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B_i+T_i-j+1)}$; ceci peuvent s'appliquer comme ci-dessus aux débuts de lignes, à la fin des lignes ou à $\pi''_{\gg}$. Ce qui est sûr est que $\pi''_{\gg}$ devient une représentation dans un paquet associé à un morphisme qui s'obtient en transformant les éléments $(\rho, B_i + T_i, B_i + T_i, \zeta)$, pour $i \in [\ell, \ell' + t'' - t + 1]$ en des (ρ, C_i, C_i, ζ) avec $C_i \le A$ et les débuts ou fin de lignes modifiés étaient et restent strictement supérieures à B_0; de plus les liaisons entre les lignes de chacune des matrices restent inchangées. On obtient alors le lemme. Dans le cas où le paramètre signe ne prend pas la même valeur sur $(\rho, A-t, A-t, \zeta)$ et $(\rho, B_{\ell'+1}, B_{\ell'+1}, \zeta)$ on procède comme ci-dessus simplement en n'ayant pas la première étape qui mène à (5); on n'a qu'une seule matrice celle qui vient de (3). Cela termine la démonstration.

4.7 Conséquence pour l'holomorphie des opérateurs d'entrelacement

On fixe encore ρ une représentation cuspidale autoduale, a_0, b_0 des entiers comme dans les paragraphes précédents. On considère $s_0 := (b_0 - 1)/2$ et c'est le point où l'on cherche à montrer l'holormorphie des opérateurs d'entrelacement. On rappelle que l'on a posé $A_0 := (a_0 + b_0)/2 - 1, B_0 := |(a_0 - b_0)|/2$ et que l'on a noté ζ_0 le signe de $a_0 - b_0$ si ce nombre est non nul et + sinon.

4.7.1 Le cas des signes contraires

On suppose que les hypothèses de 4.6.2 sont satisfaites où ici $\zeta = -\zeta_0$.

Dans le cas 2 de 4.6.2, on a vu en 4.5.2 que l'holomorphie cherchée se déduit de la même propriété pour π' et ψ'.

Dans le premier cas de 4.6.2, on distingue suivant les valeurs de ζ_0. On factorise l'opérateur d'entrelacement en tenant compte de l'inclusion écrite. Supposons que $\zeta_0 = -$; ainsi $\zeta = +$ et la représentation $\langle \rho|\cdot|^{\zeta B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\zeta B_\ell}\rangle$ est une série discrète $\mathrm{St}\big(\rho, (B + B_\ell) + 1\big)$ tensorisée par le caractère $|\cdot|^{(B-B_\ell)/2}$. Ici il suffit de vérifier que les opérateurs d'entrelacement standard

$$\begin{aligned}&\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s \times \mathrm{St}\big(\rho, (B + B_\ell) + 1\big)\,|\cdot|^{(B-B_\ell)/2}\\ &\qquad \to \mathrm{St}\big(\rho, (B + B_\ell) + 1\big)\,|\cdot|^{(B-B_\ell)/2} \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s\end{aligned}$$

est holomorphe en $s = s_0$ et que l'opérateur d'entrelacement standard

$$\begin{aligned}&\mathrm{St}\big(\rho, (B + B_\ell) + 1\big)\,|\cdot|^{(B-B_\ell)/2} \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s}\\ &\qquad \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times \mathrm{St}\big(\rho, (B + B_\ell) + 1\big)\,|\cdot|^{(B-B_\ell)/2}\end{aligned}$$

est holormophe en $s = s_0$. La première assertion est vraie par positivité car $B - B_\ell < 0$. Pour le deuxième opérateur en $s = s_0$, $\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s$ est la représentation $\langle -B_0, \dots, -A_0\rangle_\rho$; clairement $B > -B_0$ et l'holomorphie résulte de 4.1.

On suppose maintenant que $\zeta_0 = +$ et donc $\zeta = -$. Ici la représentation $\langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{B_\ell}\rangle$ est un module de Speh que l'on note $J(\rho, B_\ell, -B)$. Les opérateurs d'entrelacement normalisés

$$\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s \times J(\rho, B_\ell, -B) \to J(\rho, B_\ell, -B) \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s$$

$$J(\rho, B_\ell, -B) \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times J(\rho, B_\ell, -B)$$

sont holomorphes en $s = s_0$ d'après [21, 1.6.3]. On note $r_1(s)$ et $r_2(s)$ les facteurs de normalisation et on va vérifier que l'ordre de la fonction $r_1(s)r_2(s)r(s, \psi'_\ell)/r(s, \psi)$ en $s = s_0$ est exactement 0: le bloc de Jordan (ρ, A, B, ζ) donne un pôle d'ordre 1 à $r(s, \psi)$ exactement quand $B \leq A_0 \leq A$ et le bloc $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$ donne un pôle d'ordre 1 à $r(s, \psi'_\ell)$ exactement quand $A - 1 \geq A_0 \geq B + 1$ et le nouveau bloc (ρ, A, A, ζ) donne un pôle d'ordre 1 exactement quand $A_0 = A$. Le bloc $(\rho, B_\ell, B_\ell, \zeta)$ donne un pôle d'ordre 1 à $r(s, \psi)$ quand $A_0 = B_\ell$. La fonction $r_1(s)$ vaut $L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0) \times \rho, s - B_\ell\big)/L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0 \times \rho, s + B + 1)\big)$; donc en $s = s_0$ sont ordre est 0 sauf si $L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0) \times \rho, s - B_\ell\big)$ a un pôle ce qui se produit exactement quand $A_0 = B_\ell$. La fonction $r_2(s)$ vaut $L\big(\rho \times \mathrm{St}(\rho, a_0), s - B\big)/L\big(\rho \times \mathrm{St}(\rho, a_0), s + B_\ell + 1\big)$; cette fonction est donc d'ordre 0 en $s = s_0$ sauf exactement quand la fonction $L\big(\rho \times \mathrm{St}(\rho, a_0), s - B\big)$ a un pôle c'est-à-dire quand $A_0 = B$. L'ordre de $r(s, \psi)$ en $s = s_0$ est donc celui de $r_1(s)r_2(s)r(s, \psi'_\ell)$ comme annoncé. Cela termine l'étude du cas 2.

L'étude du 3e cas de 4.6.2 est exactement analogue.

4.7.2 Le cas de même signe

Ici on suppose que $b_0 > 1$. On remarque alors que $A_0 := (a_0 + b_0)/2 - 1 > (a_0 - b_0)/2 = B_0$ car $b_0 > 1$.

Ici on suppose que $\zeta = \zeta_0 = +$. On fixe $(\rho, A, B, +) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ tel que $A > B$ avec B maximal pour cette propriété. Ainsi pour tout $(\rho, A', B', +) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ avec $B' > B$, on a $A' = B'$. On veut montrer que l'on peut supposer que les hypothèses de 4.6.3 sont satisfaites. On considère donc d'abord des demi-entiers B'', B' vérifiant $B'' > B'$ tels que $(\rho, B', B', +)$ et $(\rho, B'', B'', +)$ sont des éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ consécutifs au sens de 4.4. On suppose que soit $B_0 \geq B''$ soit que $B_0 < B'$. On reprend les notations de 4.4 d'où une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \langle \zeta B'', \dots, -\zeta B'\rangle_\rho \times \pi'.$$

Lemme 4.7.1 *Avec les hypothèses précédentes, l'holomorphie en $s = s_0$ de $N_\psi(s, \pi)$ résulte de celle de $N_{\psi'}(s, \pi')$ au même point.*

C'est évidemment la démonstration de 4.5.1 que l'on reprend. On étudie les opérateurs d'entrelacement standard en $s = 0$ (on a décalé par $(b_0 - 1)/2$ pour que ce soit plus joli)

$$\langle A_0,\dots,-B_0\rangle_\rho|\cdot|^s\times\langle B'',\dots,-B'\rangle_\rho\to\langle B'',\dots,-B'\rangle_\rho\times\langle A_0,\dots,-B_0\rangle_\rho|\cdot|^s$$
$$\langle B'',\dots,-B'\rangle_\rho\times\langle B_0,\dots,-A_0\rangle_\rho|\cdot|^{-s}\to\langle B_0,\dots,-A_0\rangle_\rho|\cdot|^{-s}\times\langle B'',\dots,-B'\rangle_\rho.$$

On suppose que $B_0\geq B''$. On applique 4.1. Le premier opérateur est holomorphe car $A_0>B_0\geq B''$ et le deuxième l'est car $-B'>-B''\geq -B_0>-A_0$. On suppose maintenant que $B_0<B'$ et avec la même référence, on a l'holomorphie du premier opérateur car $-B_0>-B'$ et celle du deuxième car $B''>B'>B_0$. En utilisant 3.3, on vérifie que $r(s,\psi)$ et $r(s,\psi')$ (on utilise le fait que $A_0>B_0$ vu ci-dessus) ont le même ordre en $s=s_0$. Cela prouve le lemme.

On veut se ramener aussi au cas où $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\pi=0$ pour tout $x\in\,]B,B_0]$. On montre d'abord que si $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\pi\neq 0$ avec $x>B$ alors $\mathrm{Jord}(\psi)$ contient (ρ,x,x,ζ) et en notant ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ,x,x,ζ) par $(\rho,x-1,x-1,\zeta)$, il existe une représentation π' dans le paquet associé à ψ' avec une inclusion

$$\pi\hookrightarrow\rho|\cdot|^{\zeta x}\times\pi'.$$

On sait déjà que $\mathrm{Jac}_{\zeta x}\pi\neq 0$ entraîne l'existe d'un élément $(\rho,A',B',\zeta)\in\mathrm{Jord}(\psi)$ avec $B'=x$. Avec les hypothèses mises ici et le fait que $x>B$, cela entraîne que $A'=B'$. L'assertion résulte alors du lemme plus général démontré en 4.6.1.

On vérifie encore que l'holomorphie de $N(s,\pi)$ en $s=s_0$ résulte de l'holomorphie de $N(s,\pi')$ en $s=s_0$; ce sont les méthodes ci-dessus, les facteurs de normalisations ont même ordre en $s=s_0$. L'opérateur d'entrelacement standard, en $s'=0$:

$$\langle A_0,\dots,-B_0\rangle_\rho|\cdot|^{s'}\times\rho|\cdot|^{\zeta x}\to\rho|\cdot|^{\zeta x}\times\langle A_0,\dots,-B_0\rangle_\rho|\cdot|^{s'}$$

est holomorphe d'après 4.1 car $A_0>B_0\geq x$ et l'opérateur d'entrelacement standard

$$\rho|\cdot|^{\zeta x}\times\langle B_0,\dots,-A_0\rangle_\rho|\cdot|^{-s'}\to\langle B_0,\dots,-A_0\rangle_\rho|\cdot|^{-s'}\times\rho|\cdot|^{\zeta x}$$

est holomorphe en $s'=0$ car $x>-A_0$.

On reprend maintenant les notations de 4.6.3 et on écrit

$$\pi\hookrightarrow\sigma_1\times\sigma_2\times\pi'.$$

et on va montrer que $N(s,\pi)$ est holomorphe en $s=s_0$ si $N(s,\pi')$ est holomorphe en $s=s_0$. On remarque d'abord avec 3.3 que $r(s,\psi')/r(s,\psi)$ est d'ordre ≥ 0 en $s=s_0$ et a un zéro d'ordre 1 si $B\leq B_0\leq A_0\leq A$; on rappelle que l'on a supposé que $\zeta=\zeta_0=+$. L'opérateur d'entrelacement standard:

$$\langle A_0,\dots,-B_0\rangle_\rho|\cdot|^{s'}\times\sigma_2\to\sigma_2\times\langle A_0,\dots,-B_0\rangle_\rho|\cdot|^{s'}$$

est holomorphe en $s'=0$ d'après 4.1 car la fin de chaque ligne définissant σ_2 est strictement inférieur à $-B_0$. L'opérateur d'entrelacement standard

$$\sigma_2\times\langle B_0,\dots,-A_0\rangle_\rho|\cdot|^{-s'}\to\langle B_0,\dots,-A_0\rangle_\rho|\cdot|^{-s'}\times\sigma_2$$

est holomorphe en $s' = 0$ d'après 4.1 car B_0 est strictement inférieur à tout début de ligne de la matrice définissant σ_2.

Il faut faire la même chose avec σ_1; pour le première opérateur on a l'holomorphie parce que chaque ligne définissant σ_1 est une série discrète tensorisée par un caractère strictement négatif. Le 2e opérateur n'est pas toujours holomorphe en $s' = 0$. On récrit σ_1 comme la représentation associée aux multisegments $[B+i, -A'_i]$ où $i \in [0, t']$ et où les A'_i sont des demi-entiers vérifiant $A \geq A'_0 > \cdots > A'_{t'}$. Fixons $i \in [1, t']$; d'après 4.1 l'opérateur d'entrelacement standard

$$\langle B{+}i, \ldots, -A'_i \rangle_\rho \times \langle B_0, \ldots, -A_0 \rangle_\rho |\cdot|^{-s'} \to \langle B_0, \ldots, -A_0 \rangle_\rho |\cdot|^{-s'} \times \langle B{+}i, \ldots, -A'_i \rangle_\rho$$

est holomorphe en $s' = 0$ sauf si $A'_i \geq A_0 > B_0 \geq B + i$. On note i_0 le plus grand entier s'il existe dans $[0, t']$ tel que ces inégalités soient satisfaites. On peut alors remplacer σ_1 par la représentation associée aux $i_0 + 1$ premières lignes puisque les suivantes ne donne pas de pôle. On peut encore couper les lignes de façon à avoir une matrice rectangulaire; cela revient à remplacer A'_i par $A'_{i_0} + i - i_0$ car, en notant σ' la nouvelle représentation, on a clairement

$$\sigma_1 \hookrightarrow \sigma' \times_{x \in \mathcal{E}} \rho |\cdot|^{-x},$$

où $\mathcal{E}$ est un ensemble de demi-entiers tous strictement supérieur à $A_0 + 1$; les entrelacement de la représentation $\langle B_0, \ldots, -A_0 \rangle_\rho |\cdot|^{-s'}$ avec ces représentations $\rho|\cdot|^{-x}$ n'ont donc pas de pôles. On peut aussi s'arranger (quitte à raccourcir encore les lignes) pour que dans les inégalités $A'_{i_0} \geq A_0 > B_0 \geq B + i_0$ l'une soit une égalité (c'est uniquement pour pouvoir appliquer tel quel [21, 1.6.3]). On peut maintenant appliquer [21, 1.6.3] qui montre que l'opérateur d'entrelacement normalisé

$$\sigma' \times \langle B_0, \ldots, -A_0 \rangle_\rho |\cdot|^{-s'} \to \langle B_0, \ldots, -A_0 \rangle_\rho |\cdot|^{-s'} \times \sigma'$$

est holomorphe en $s' = 0$. Un calcul facile de facteur de normalisation montre que l'opérateur d'entrelacement standard a au plus un pôle d'ordre 1. Mais les inégalités $A'_{i_0} \geq A_0 > B_0 \geq B + i_0$ forcent $A \geq A_0 > B_0 \geq B$ car $A'_{i_0} \leq A$ et le pôle que l'on a ci-dessus est compensé par le zéro de la fonction $r(s, \psi')/r(s, \psi)$ en $s = s_0$. Cela termine la preuve. Donc dans le cas où $\zeta_0 = +$, on a ramené le théorème d'holomorphie pour $N(s, \pi)$ au cas particulier où ψ est élémentaire c'est-à-dire où pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, $A = B$.

4.8 Réduction par le bas

4.8.1 Réduction par le bas, première étape

Toutes nos définitions reposent sur une méthode constructive qui commence précisément par réduire le plus petit bloc de Jordan; c'est ce que l'on exploite ici. On fixe ζ et on note (ρ, A, B, ζ) un élément de $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que B soit minimal; on fixe un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que (ρ, A, B, ζ) en soit le plus petit élément. On fixe $\psi_\gg$ un morphisme dominant ψ, tel que $\mathrm{Jord}(\psi_\gg)$ contienne encore (ρ, A, B, ζ) (ce qui est loisible puisque cet élément est le plus petit de $\mathrm{Jord}(\psi)$) et $\pi_{\gg}$ une représentation dans le paquet associé à $\psi_{\gg}$ permettant de définir π. On note $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ les paramètres. Le lemme ci-dessous est, certes, effrayant mais il donne une description tout à fait précise des représentations dans le cas considéré.

Lemme 4.8.1

(i) *On suppose que B est 1/2 entier non entier et que soit $\underline{t}(\rho, A, B, \zeta) \neq 0$ soit $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = +$. On note $\psi'_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-B-1/2, 1/2, -\zeta)$ (ce terme n'apparaît pas si $A = B$). Il existe une représentation $\pi'_{\gg}$ dans le paquet associé à $\psi'_{\gg}$ et une inclusion*

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & \zeta A \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \zeta 1/2 & \cdots & \zeta(A-B+1/2) \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi'_{\gg}.$$

(ii) *On suppose que B est 1/2 entier non entier et que $\underline{t}(\rho, A, B, \zeta) = 0$ et que $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = -$. On note ici $\psi''_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-B+1/2, 1/2, -\zeta)$. Il existe une représentation $\pi''_{\gg}$ dans le paquet associé à $\psi''_{\gg}$ et une inclusion*

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & \zeta A \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \zeta 3/2 & \cdots & \zeta(A-B+3/2) \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi''_{\gg}.$$

(iii) *On suppose que B est entier; on note $\psi'_{0,\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-B, 0, -\zeta)$. Il existe une représentation $\pi'_{0,\gg}$ dans le paquet associé à $\psi'_{0,\gg}$ et une inclusion*

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & \zeta A \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \zeta 1 & \cdots & \zeta(A-B+1) \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi'_{0,\gg}.$$

Cela traduit précisément la construction des représentations: on commence par se ramener au cas où $B = 0$ ou $1/2$. On applique simplement [16, 3.1]: on note $\psi''_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-[B], B-[B], \zeta)$ (ici $[B]$ est la partie entière de B) et on pose $\pi''_{\gg} := \circ_{i \in [1,[B]]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B-i+1),\ldots,\zeta(A-i+1)}\, \pi_{\gg}$. On sait que $\pi''_{\gg}$ est non nul et est dans le paquet de représentations associées à $\psi''_{\gg}$ et on a une inclusion:

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & \zeta A \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \zeta B-[B]+1 & \cdots & \zeta(A-[B]+1) \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi''_{\gg}.$$

Maintenant on distingue suivant que $B = [B]$ ou non. Dans le premier cas, on sait que le paquet associé à ψ'' se définit aussi en remplaçant $(\rho, A-B, 0, \zeta)$ par

$(\rho, A-B, 0, -\zeta)$ et on a donc directement (iii). On suppose maintenant que $B - [B] = 1/2$; on a directement (ii), comme précédemment, quand les paramètres $\underline{t}$ et $\underline{\eta}$ qui définissent π vérifient $\underline{t}(\rho, A, B, \zeta) = 0$ et $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = -$; c'est la définition. Supposons que $\underline{t}(\rho, A, B, \zeta) = 0$ mais que $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = +$. On peut alors remplacer $(\rho, A-[B], 1/2, \zeta)$ par $\bigcup_{C \in [B,A]}(\rho, C, C, \zeta)$ avec un nouveau paramètre $\underline{\eta}$ qui alterne sur ces blocs en commençant par $+$ sur $(\rho, 1/2, 1/2, \zeta)$. On a alors par définition l'existence d'une représentation π'_1 dans le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, A-[B], 1/2, \zeta)$ par $\bigcup_{C \in [1/2, A-1]}(\rho, C, C, \zeta)$ et une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{\zeta 1/2}, \dots, \rho|\cdot|^{\zeta(A-[B])}\rangle_{\rho} \times \pi'_1.$$

Le paramètre définissant π'_1 contient en particulier un signe qui alterne sur les blocs (ρ, C, C, ζ) pour $C \in [1/2, A-1]$, en commençant par $-$ sur $(\rho, 1/2, 1/2, \zeta)$; on peut donc remplacer ζ par $-\zeta$ sur ces blocs et finalement remplacer l'ensemble de ces blocs par $(\rho, A-[B]-1, 1/2, -\zeta)$. Cela donne (i) dans ce cas. On remarque ici que les paramètres de $\pi'_{\gg} := \pi'_1$ se déduisent naturellement de ceux de $\pi_{\gg}$ avec toutefois $\underline{t}_{\pi'_{\gg}}(\rho, A-B-1/2, 1/2, -\zeta) = 0$ et $\underline{\eta}_{\pi'_{\gg}}(\rho, A-B-1/2, 1/2, -\zeta) = -\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta)$.

On considère maintenant les cas restants. On note d'abord $\pi'_{1,\gg} := \circ_{i \in [1,[B]]} \mathrm{Jac}_{\zeta(B-i+1), \dots, \zeta(A-i+1)}\, \pi_{\gg}$ et on sait que cette représentation est irréductible dans le paquet associé au morphisme $\psi_{1,\gg}$ qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-[B], 1/2, \zeta)$. De plus on a une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & \zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta 3/2 & \cdots & \zeta(A-[B]+1) \end{matrix} \right\rangle_{\rho} \times \pi_{1,\gg}. \tag{4.8.1}$$

On pose $t_0 := \underline{t}(\rho, A, B, \zeta)$ et on suppose que $t_0 \neq 0$. Il faut aussi distinguer suivant la valeur de $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta)$; on va montrer que les paramètres pour la représentation obtenue sont

$$\underline{t}_{\pi'_{\gg}}(\rho, A-B-1/2, 1/2, -\zeta) = \begin{cases} t_0 & \text{si } \underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = + \\ t_0 - 1 & \text{si } \underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = -, \end{cases}$$

$$\underline{\eta}_{\pi'_{\gg}}(\rho, A-B-1/2, 1/2, -\zeta) = \begin{cases} -\text{si } \underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = + \\ +\text{si } \underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = -. \end{cases}$$

On pose $\pi'_{2,\gg} := \circ_{i \in [1,t_0]} \mathrm{Jac}_{\zeta(1/2+i-1), \dots, -\zeta(A-[B]-i+1)}\, \pi'_{1,\gg}$ puis

$$\pi'_{3,\gg} := \circ_{j \in [1,t'_0]} \mathrm{Jac}_{\zeta(1/2+t_0-j+1), \dots, \zeta(A-[B]-t_0-j+1)}\, \pi'_{2,\gg},$$

où $t'_0 = t_0$ si $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = -$ et $t'_0 = t_0 + 1$ si $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta) = +$. On sait que $\pi'_{3,\gg}$ est une représentation irréductible dans le paquet associé au morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $\bigcup_{C \in [1/2, A-[B]-t_0-t'_0]}(\rho, C, C, \zeta)$ et avec un paramètre signe qui alterne sur tous ces blocs en commençant par $-$; on peut

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

donc encore remplacer ζ en $-\zeta$. De plus, $\pi'_{1,\gg}$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite

$$\left\langle \begin{array}{ccccc} \zeta 1/2 & \cdots & \zeta(1/2-t'_0-1) & \cdots & -\zeta(A-[B]) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \zeta(1/2+t_0-1) & \cdots & \zeta(1/2+t_0-t'_0) & \cdots & -\zeta(A-[B]-t_0+1) \\ \zeta(1/2+t_0) & \cdots & \zeta(1/2+t_0-t'_0+1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \zeta(A-[B]-t_0+1) & \cdots & \zeta(A-[B]-t_0-t'_0) & & \end{array} \right\rangle_\rho \times \pi'_{3,\gg}.$$

De plus l'induite $\rho|\cdot|^x \times \pi'_{3,\gg}$ est irréductible pour tout $x \in \big] A-[B]-t_0-t'_0+1, A-[B]\big]$. On peut donc retourner les t'_0 dernières colonnes pour les mettre à la fin des t'_0 premières colonnes et l'induite ci-dessus est isomorphe à l'induite

$$\left\langle \begin{array}{ccccc} \zeta 1/2 & \cdots & \zeta(1/2-t'_0-1) & \cdots & -\zeta(A-[B]-t'_0+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \zeta(1/2+t_0-1 & \cdots & \zeta(1/2+t_0-t'_0) & \cdots & -\zeta(A-[B]-t_0+1-t'_0) \\ \zeta(1/2+t_0) & \cdots & \zeta(1/2+t_0-t'_0+1) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \zeta(A-[B]-t_0+1) & \cdots & \zeta(A-[B]-t_0-t'_0) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \zeta(A-[B]) & \cdots & \zeta(A-[B]-t'_0+1) & & \end{array} \right\rangle_\rho \times \pi'_{3,\gg}.$$

On réserve la première colonne de la matrice, on récrit les t'_0-1 colonnes suivantes

$$\mathcal{A}_{t'_0-1} := \begin{array}{ccc} -\zeta(1/2) & \cdots & -\zeta\big(1/2+(t'_0-1)+1\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A-[B]-1) & \cdots & \zeta\big(A-[B]-1-(t'_0-1)+1\big) \end{array}$$

Et les colonnes restantes s'écrivent sous la forme

$$\mathcal{B} := \begin{array}{ccc} -\zeta(1/2+t'_0-1) & \cdots & -\zeta(A-[B]-t'_0+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\zeta(1/2+t'_0-t_0) & \cdots & -\zeta(A-[B]-t_0-t'_0+1). \end{array}$$

L'induite $\langle\mathcal{B}\rangle_\rho \times \pi'_{3,\gg}$ a un unique sous-module irréductible qui se trouve dans le paquet associé au morphisme qui se déduit de $\psi_\gg$ en remplaçant (ρ, A, B, ζ) par $\bigcup_{C\in[1/2+t'_0-1, A-[B]-t'_0+1]}(\rho, C, C, -\zeta)$; on note $\pi'_{4,\gg}$ ce sous-module irréductible, son paramètre signe alterne sur les blocs écrits en commençant par $+$ si $t'_0=t_0$ et par $-$ si $t'_0=t_0+1$. On remarque ensuite que $\langle\mathcal{A}_{t'_0-1}\rangle_\rho \times \pi'_{4,\gg}$ a un unique sous-module irréductible qui est exactement le $\pi'_\gg$ décrit. La première colonne se retourne pour s'ajouter comme dernière ligne à la matrice de (1) et on obtient le (i) de l'énoncé.

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

4.8.2 Réduction par le bas, fin

On reprend les hypothèses de 4.8.1 en les renforçant ici. On a fixé (ρ, A, B, ζ) dans $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ avec $\zeta' = \zeta$ on a $B' \geq B$ et on suppose en plus ici que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in \mathrm{Jord}(\psi)$ si $\zeta' = -\zeta$, on a $A' = B'$ et que pour $(\rho, A' = B', -\zeta), (\rho, A'' = B'', -\zeta)$ des éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ avec $B' > B''$, $\mathrm{Jac}_{-\zeta B', \ldots, -\zeta(B''+1)} \pi = 0$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant (ρ, A, B, ζ) et tous les éléments de la forme $(\rho, A' = B', -\zeta)$ avec $B' < A$ et en ajoutant $(\rho, A - [B] - 1, 1/2, -\zeta)$ resp. $(\rho, A - [B], 1/2, -\zeta)$ et resp. $(\rho, A - B, 0, -\zeta)$ suivant les cas de (i) à (iii) de 4.8.1. En suivant les 3 cas de cette référence, on pose $\delta_B = 1/2, 3/2, 1$.

Lemme 4.8.2 *Il existe:*

- *un ensemble de demi-entiers (ensemble éventuellement vide) $\mathcal{C}$ tous inférieurs ou égaux à A qui permet de définir le morphisme ψ'' obtenu en rajoutant à* $\mathrm{Jord}(\psi')$ *les éléments $(\rho, C, C, -\zeta)$ pour $C \in \mathcal{C}$,*
- *une représentation irréductible π'' dans le paquet associé à ψ'',*
- *une suite de demi-entier $B_1'' < \cdots < B_\ell'' \leq A$ avec $\ell = B - \delta_B + 1$,*

tels que π soit un sous-module de l'induite

$$\left\langle \begin{matrix} \zeta B & \cdots & & \zeta B''_\ell \\ \vdots & \vdots & & \\ \zeta \delta_B & \cdots & \zeta B''_1 & \end{matrix} \right\rangle_\rho \times \pi'',$$

en prenant comme convention que les dernières lignes peuvent ne pas apparaître si ζ fois l'extrémité de la ligne est strictement inférieure à ζ fois le début de la ligne.

On reprend le lemme de 4.8.1; pour passer de $\pi_{\gg}$ à π il faut d'abord appliquer des $\mathrm{Jac}_{\zeta x; x \in \mathcal{E}}$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble totalement ordonné de demi-entiers tous supérieurs strictement à B; cette opération appliquée au membre de droite des inclusions de *loc. cit.* ne s'applique qu'aux représentations $\pi'_{\gg}, \pi''_{\gg}, \pi_{0,\gg}$. Ensuite il faut faire redescendre les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$ qui domine les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ de la forme $(\rho, A' = B', -\zeta)$. On va du plus petit au plus grand. Pour cela il peut y avoir un choix quand on applique le module de Jacquet aux membres de droite des inclusions de 4.8.1 tant que $A' = B' < A$, on peut appliquer ces modules de Jacquet à la fois aux analogues de $\pi'_{\gg} \cdots$ soit aux bouts des lignes de la matrice décrire en *loc. cit.* Comme expliqué au début de 4.6.3, on obtient alors les données un peu imprécises de l'énoncé et cela termine la démonstration.

4.9 Fin de la preuve de l'holomorphie des opérateurs d'entrelacement dans le cas $a_{0<b_0}$

On fixe ici $a_0, b_0, s_0 = (b_0 - 1)/2$ et on suppose que $a_0 < b_0$, d'où par définition $\zeta_0 = -$.

Proposition 4.9.1 *Sous l'hypothèse faite $a_0 < b_0$, l'opérateur d'entrelacement $N_\psi(s,\pi)$ est holomorphe en $s = s_0$.*

Grâce à 4.2 on suppose que $\mathrm{Jord}(\psi)$ est sans multiplicité. En 4.7.1, on a ramené la propriété d'holomorphie de $N(s,\pi)$ en $s = s_0$ au cas où pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$ avec $\zeta = +$, $A = B$. Si pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, on a $\zeta = +$, alors ψ est tempéré et il est facile de vérifier que $r(s,\psi)$ est holomorphe non nul en $s = s_0$. L'holomorphie cherchée est donc équivalente à l'holomorphie de l'opérateur d'entrelacement standard:

$$\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s \times \pi \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times \pi.$$

Mais ici π est une série discrète et le résultat a été démontré par Harish-Chandra. On raisonne donc par récurrence sur le nombre d'éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ de la forme $(\rho, A, B, -)$. On suppose qu'il existe de tels éléments et on en fixe 1 avec B minimum. On lui applique 4.8.2. On reprend les notations de *loc. cit.* et on pose

$$\sigma := \left\langle \begin{matrix} -B & \cdots & & -B''_\ell \\ \vdots & \vdots & & \\ -\delta_B & \cdots & -B''_1 & \end{matrix} \right\rangle_\rho$$

vue comme une représentation d'un GL convenable. La représentation π'' est associée à un morphisme ψ'' auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence; de plus d'après 3.3 $r(s,\psi'')/r(s,\psi)$ en $s = s_0$ est holomorphe avec un zéro d'ordre 1 exactement quand

$$B_0 \le B \le A_0 \le A. \tag{4.9.1}$$

L'opérateur d'entrelacement standard $\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s \times \sigma \to \sigma \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s$ est holomorphe en $s = s_0$ par positivité. Le point est donc de démontrer que l'opérateur d'entrelacement standard $\sigma \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times \sigma$ a au plus un pôle d'ordre 1 en $s = s_0$ et que ce pôle n'existe que si (1) est satisfait. D'abord on remarque que pour $i \in [1,\ell]$ l'opérateur d'entrelacement standard:

$$\begin{aligned} &\langle \rho|\cdot|^{-\delta_B - i+1}, \ldots, \rho|\cdot|^{-B''_i} \rangle \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \\ &\quad \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times \langle \rho|\cdot|^{-\delta_B - i+1}, \ldots, \rho|\cdot|^{-B''_i} \rangle \end{aligned}$$

est holomorphe en $s = s_0$ (*cf.* 4.1) sauf si $B_0 \le \delta_B + i - 1 \le A_0 \le B''_i$ cas où il a un pôle d'ordre au plus 1. Donc si pour tout $i \in [1,\ell]$ ces inégalités ne sont pas satisfaites, on a l'holomorphie cherchée. Sinon, on note j le plus petit entier tel que $B_0 \le \delta_B + j - 1 \le A_0 \le B''_j$ et on note σ_j la représentation associée à la matrice

$$\begin{matrix} -B & \cdots & -B''_j - \ell + j \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\delta_B - j + 1 & \cdots & -B''_j. \end{matrix}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

Ainsi on peut écrire

$$\sigma \hookrightarrow \sigma_j \times_{x\in\mathcal{E}} \rho|\cdot|^{-x} \times_{i\in]j,1]} \langle \rho|\cdot|^{-\delta_B-i+1}, \ldots, \rho|\cdot|^{-B_i''}\rangle,$$

où $\mathcal{E}$ est un ensemble totalement ordonné d'éléments tous strictement supérieurs à A_0+1. Les propriétés cherchées pour l'entrelacement avec σ découlent donc des mêmes propriétés pour l'entrelacement avec σ_j remplaçant σ; pour la même raison et quitte à augmenter B_0 on peut supposer que $B_0 = \delta_B + j - 1$ pour pouvoir aisément appliquer [21, 1.6.3]. Dans cette référence, on a alors montré que l'opérateur d'entrelacement normalisé à la Shahidi

$$\sigma_j \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times \sigma_j$$

est holomorphe en $s = s_0$; il faut donc prendre en compte les pôles éventuels du facteur de normalisation. Le facteur de normalisation est, à une fonction holomorphe inversible près,

$$L\big(\mathrm{St}(\rho,\alpha)\times\mathrm{St}(\rho,a_0), s-x_d\big)\big/L\big(\mathrm{St}(\rho,\alpha)\times\mathrm{St}(\rho,a_0), s-x_f+1\big)$$

où $\alpha = B_j'' - (\delta_B + j - 1) + 1$, x_f et x_d sont tels que $(\alpha-1)/2 + x_f = -B$ et $-(\alpha-1)/2 + x_d = -B_j''$. Le numérateur a un pôle en $s = s_0$ exactement quand $B_0 \le B \le A_0 \le B_j'' + \ell - j$ et ce pôle est alors d'ordre 1; ces dernières égalités entrainent en particulier que $B_0 \le B \le A_0 \le A$ car $A \ge B_\ell'' \ge B_j'' + \ell - j$. On en déduit donc l'assertion cherchée.

4.10 Fin de la preuve de l'holomorphie des opérateurs d'entrelacement dans le cas $a_0 \ge b_0$

Ici on fixe $a_0, b_0, s_0 = (b_0-1)/2$ et on suppose que $a_0 \ge b_0$ d'où par définition $\zeta_0 = +$. En 4.7.2 et 4.7.1, on a réduit l'holomorphie de $N(s,\pi)$ en $s = s_0$ au cas où le morphisme ψ est élémentaire. On suppose donc ici que ψ est élémentaire, c'est-à-dire que pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, on a $A = B$ et que $\mathrm{Jord}(\psi)$ n'a pas de multiplicité. On suppose que $s_0 > 0$ ce qui veut dire que $b_0 > 1$ et on a donc $A_0 > B_0$. Ainsi si pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathrm{Jord}(\psi)$, $\zeta = +$, π est une série discrète, le facteur $r(s,\psi)$ est holomorphe non nul en $s = s_0$ et l'holomorphie de $N(s,\pi)$ en $s = s_0$ est équivalente à celle de l'opérateur d'entrelacement standard, holomorphie qui résulte des travaux d'Harish-Chandra. Pour démontrer l'holomorphie de $N(s,\pi)$ en $s = s_0$, on raisonne donc par récurrence sur le nombre d'éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ de la forme $(\rho, A = B, -)$. On suppose qu'il existe un tel élément et on le fixe avec B minimum. On fixe un ordre sur $\mathrm{Jord}(\psi)$ tel que cet élément soit minimal et on note $\psi_\gg$ un morphisme qui domine tous les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ qui lui sont strictement supérieurs et on note $\pi_\gg$ la représentation dans le paquet associé à $\psi_\gg$ permettant de définir π. On peut utiliser 4.8.1: l'une des situations suivantes est réalisée.

(i) B est un demi-entier non entier, on note $\psi'_\gg$ le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant $(\rho, B, B, -)$ et il existe une représentation $\pi'_\gg$ dans le paquet associé à $\psi'_\gg$ avec une inclusion

$$\pi_\gg \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{-B}, \ldots, \rho|\cdot|^{-1/2}\rangle \times \pi'_\gg;$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2010-074-6 Published online by Cambridge University Press

(ii) B est un demi-entier non entier, on note $\psi'_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant $(\rho, B, B, -)$ par $(\rho, 1/2, 1/2, +)$ et il existe une représentation $\pi'_{\gg}$ dans le paquet associé à $\psi'_{\gg}$ avec une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-3/2}\rangle \times \pi'_{\gg};$$

(iii) B est entier et on note $\psi'_{\gg}$ le morphisme qui se déduit de $\psi_{\gg}$ en remplaçant $(\rho, B, B, -)$ par $(\rho, 0, 0, +)$ et il existe $\pi'_{\gg}$ dans le paquet associé à ce morphisme avec une inclusion

$$\pi_{\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-1}\rangle \times \pi'_{\gg}.$$

On passe maintenant de $\pi_{\gg}$ à π. Pour cela on fait d'abord redescendre les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$ dominant les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ de la forme $(\rho, B', B', -)$; nécessairement $B' > B$ et on applique donc des Jac_{-x} pour $x > B+1$; on note $\pi_{+,\gg}$ le résultat. On applique ces modules de Jacquet aux membres de droite des inclusions ci-dessus et ces modules de Jacquet ne s'appliquent qu'à la représentation $\pi'_{\gg}$; on note $\pi'_{+,\gg}$ le résultat. On a donc des inclusions analogues avec $_{\gg}$ remplacé par $_{+,\gg}$.

Il faut maintenant faire redescendre les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi_{\gg})$ qui dominent les éléments de $\mathrm{Jord}(\psi)$ de la forme $(\rho, B', B', +)$; on note v le nombre de ces éléments et on les ordonne par $0 \leq B'_1 < \cdots < B'_v$. Pour tout $i \in [1, v]$ il existe un entier T'_i tel que $(\rho, B'_i+T'_i, B'_i+T'_i, +) \in \mathrm{Jord}(\psi'_{+,\gg})$. On doit calculer $\circ_{i\in[v,1]} \mathrm{Jac}_{B'_i+T'_i,\dots,B'_i+1}\, \pi_{+,\gg}$ et on obtient π. On applique ces modules de Jacquet aux membres de droite des inclusions obtenues; dans le cas (i), ces modules de Jacquet ne s'appliquent qu'à $\pi'_{+,\gg}$ et on se trouve donc dans le cas

(i) (bis) on note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en supprimant $(\rho, B, B, -)$ et il existe une représentation π' dans le paquet associé à ce morphisme avec une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-1/2}\rangle \times \pi';$$

dans les cas (ii); si $B'_1 > 1/2$, c'est le même phénomène que ci-dessus en prenant pour ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en remplaçant $(\rho, B, B, -)$ par $(\rho, 1/2, 1/2, +)$. Si $B'_1 = 1/2$, on a deux possibilités soit

$$\mathrm{Jac}_{B'_1+T'_1,\dots,3/2}\, \pi_{+,\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-3/2}\rangle \times \mathrm{Jac}_{B'_1+T'_1,\dots,3/2}\, \pi_{+,\gg}$$

soit

$$\mathrm{Jac}_{B'_1+T'_1,\dots,3/2}\, \pi_{+,\gg} \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-5/2}\rangle \times \mathrm{Jac}_{B'_1+T'_1,\dots,5/2}\, \pi_{+,\gg},$$

le premier terme dans l'induite n'intervenant pas si $B = 3/2$. Le premier cas donne le même résultat que si $B'_1 > 1/2$ mais dans le deuxième cas la représentation $\mathrm{Jac}_{B'_1+T'_1,\dots,5/2}\, \pi_{+,\gg}$ se trouve dans le paquet associé au morphisme qui se déduit de $\psi'_{+,\gg}$ en remplaçant $(\rho, B'_1 + T'_1, B'_1 + T'_1, +)$ par $(\rho, B'_1 + 1, B'_1 + 1, +)$. Ensuite il faut appliquer $\mathrm{Jac}_{B'_2+T'_2,\dots,B'_2+1}$ et en l'appliquant à l'induite de droite on peut encore avoir deux possibilités si l'on est dans le 2e cas; en tenant compte du fait que $B'_2 \geq B'_1+1$, on contrôle les deux possibilités en faisant apparaître une représentation qui est dans le paquet associé au morphisme qui se déduit de $\psi'_{+,\gg}$ en remplaçant $(\rho, B'_1 + T'_1, B'_1 + T'_1, +)$ par $(\rho, B'_1 + 1, B'_1 + 1, +)$ et $(\rho, B'_2 + T'_2, B'_2 + T'_2, +)$ soit par $(\rho, B'_2, B'_2, +)$ soit par $(\rho, B'_2 + 1, B'_2 + 1, +)$. Et on continue jusquà $i = \nu$. Donc finalement on trouve un demi-entier $\tilde{B} < B$ avec $\tilde{B} \geq 1/2$ et un morphisme $\tilde{\psi}$ qui se déduit de ψ en remplaçant $(\rho, B, B, -)$ par $(\rho, 1/2, 1/2, +)$ et les $(\rho, B'_i, B'_i, +)$ qui vérifie $B'_i < \tilde{B}$ par $(\rho, B'_i + 1, B'_i + 1, +)$ et une représentation $\tilde{\pi}$ dans le paquet associé à $\tilde{\psi}$ avec une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\tilde{B}-1} \rangle \times \tilde{\pi}, \tag{4.10.1}$$

où $\langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\tilde{B}-2} \rangle$ n'intervient pas si $\tilde{B} = B - 1$. Dans le cas (iii) on a une inclusion de même type que (1) simplement $(\rho, 1/2, 1/2, +)$ devient $(\rho, 0, 0, +)$. On fait rentrer le cas (i)(bis) dans le cas (1) ci-dessus en posant $\tilde{B} = -1/2$ dans ce cas.

On démontre l'holomorphie de $N(s, \pi)$ en $s = s_0$ en utilisant l'inclusion (1); par récurrence, on sait que $N(s, \tilde{\pi})$ est holomorphe en $s = s_0$; on vérifie aisément que $r(s, \tilde{\psi})/r(s, \psi)$ est holomorphe avec un zéro d'ordre 1 quand $A_0 = B$. L'opérateur d'entrelacement standard

$$\mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s \times \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\tilde{B}-1} \rangle \to \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\tilde{B}-1} \rangle \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^s,$$

est holomorphe en $s = s_0$ par positivité. D'après [21, 1.6.3], l'opérateur d'entrelacement normalisé à la Shahidi

$$\langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\tilde{B}-1} \rangle \times \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \to \mathrm{St}(\rho, a_0)|\cdot|^{-s} \times \langle \rho|\cdot|^{-B}, \dots, \rho|\cdot|^{-\tilde{B}-1} \rangle,$$

est holomorphe en $s = s_0$ sauf si $A_0 = \tilde{B}$; dans ce cas on vérifie que l'opérateur d'entrelacement standard est holomorphe, ce qui règle ce cas. On calcule aisément (ici) le facteur de normalisation à une fonction holomorphe inversible près, il vaut

$$L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0) \times \rho, s - B\big) \big/ L\big(\mathrm{St}(\rho, a_0) \times \rho, s - \tilde{B}\big).$$

En posant $s' = s - s_0$, cela vaut encore $L(\rho \times \rho, s' + A_0 - B)/L(\rho \times \rho, s' + A_0 - \tilde{B})$. Donc l'opérateur d'entrelacement standard ne peut avoir de pôle que si $A_0 = B$ c'est-à-dire que si $r(s, \tilde{\psi})/r(s, \psi)$ a un zéro. D'où l'holomorphie cherchée.

Références

[1] J. Arthur, *Unipotent automorphic representations, conjectures.* In: Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque **171–172**(1989), 13–72.

[2] ———, *On local character relations.* Selecta Math. **2**(1996), 501–579. doi:10.1007/BF02433450

[3] ———, *An introduction to the trace formula.* Clay Math. Proc. **4**(2005), 1–253.

[4] ———, *A note on L-packets.* Pure Appl. Math. Quart. (special issue: in honor of J. H. Coates, part 1 of 2), **2**(2006), 199–217.

[5] ———, *Automorphic Representations of* GSp(4). In: Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory (Shalika volume, eds. H. Hida, D. Ramakrishnan, and F. Shahidi), Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, 65–81.

[6] ———, *Automorphic Representations of Classical Groups.* En préparation.

[7] A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique.* Transl. Amer. Math. Soc. **347**(1995), 2179–2189; avec l'erratum publié dans Transl. Amer. Math. Soc. **348**(1996), 4687–4690.

[8] I. N. Bernstein et A. V. Zelevinsky, *Induced Representations of Reductive p-adic groups. I.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **10**(1977), 147–185.
[9] D. Goldberg, *Some results on reducibility for unitary groups and local Asai L-functions.* Crelle J. **448**(1994), 65–95.
[10] M. Harris et R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*. Ann. of Math Stud. **151**, Princeton Univ. Press, 2001.
[11] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL_n *sur un corps p-adique.* Invent. Math. **139**(2000), 439–455. doi:10.1007/s002220050012
[12] D. Ginzburg, D. Jiang et D. Soudry, *Poles of L-functions and theta lifting for orthogonal groups*. Prépublication, 2007.
[13] H. Kim, *On local L-function and normalized intertwining operators*. Canad. J. Math. **57**(2005), 535–597.
[14] C. Mœglin, *Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques p-adiques; paramètre de Langlands et exhaustivité.* J. Eur. Math. Soc. **4**(2002), 143–200. doi:10.1007/s100970100033
[15] ———, *Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert–Schneider–Stuhler généralisée.* Represent. Theory **10**(2006), 86–129. doi:10.1090/S1088-4165-06-00270-6
[16] ———, *Paquets d'Arthur discrets pour un groupe classique p-adique*. Prépublication, 2004; à paraître dans le volume en l'honneur de S. Gelbart, Amer. Math. Soc.
[17] ———, *Paquets d'Arthur pour les groupes classiques p-adiques; point de vue combinatoire*. Prépublication, 2006.
[18] ———, *Formes automorphes de carré intégrable non cuspidales*. Prépublication, 2007; à paraître Manuscripta.
[19] ———, *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques*. Prépublication, 2007; à paraître volume en l'honneur de F. Shahidi.
[20] C. Mœglin et M. Tadic, *Construction of discrete series for classical p-adic groups*. J. Amer. Math. Soc. **15**(2002), 715–786. doi:10.1090/S0894-0347-02-00389-2
[21] C. Mœglin et J.-L. Waldspurger, *Le spectre résiduel de* $\mathrm{GL}(n)$. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **22**(1989), 605–674.
[22] ———, *Sur le transfert des traces tordues d'un groupe linéaire à un groupe classique p-adique.* Selecta Math. **12**(2006), 433–516.
[23] F. Shahidi, *Local coefficients and intertwining operators for* $\mathrm{GL}(n)$. Compositio Math. **48**(1983), 271–295.
[24] ———, *On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain L-functions.* Ann. of Math. **127**(1988), 547–584. doi:10.2307/2007005
[25] ———, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups.* Ann. of Math. **132**(1990), 273–330. doi:10.2307/1971524
[26] M. Schneider et U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **85**(1997), 97–191.
[27] A. Silberger, *Special representations of reductive p-adic groups are not integrable.* Ann. of Math. **111**(1980), 571–587. doi:10.2307/1971110
[28] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques, d'après Harish-Chandra*. J. Inst. Math. Jussieu **2**(2003), 235–333. doi:10.1017/S1474748003000082
[29] A. V. Zelevinsky, *Induced Representations of Reductive p-adic groups II*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **13**(1980), 165–210.

CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Franc
courriel: moeglin@math.jussieu.fr